الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية



السنة الرابعة من التعليم المتوسط

المؤلفون :

- محمد العيدي - مليكة دايم الله - فتيحة ساحة



الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية



بسم الله الرحمن الرحيم

يمثل هذا الكتاب الحلقة الأخيرة من المرحلة المتوسّطة في برنامج الرّياضيات الذي يُعدُّ ترجمة حقيقيّة لبرنامج السّنة الرّابعة، وهو مبنيّ أساسا وفق المقاربة بالكفاءات. ذلك أنّ تعلّم الرّياضيّات في مثل هذه المرحلة القاعديّة، يسهم بقسط وافر في إكساب المتعلّم مهاراتٍ وكفاءاتٍ تتعلق بالتّجريد، كما يُكسبه القدرة والفاعليّة على توظيف المجرّد وترجمته إلى الملموس في مختلف مناحي الحياة. كما يُكسبه أيضا مبادئ المنطق والموضوعيّة في الطّرح والمعالجة بروح إبداعيّة.

وفي مثل هذه المرحلة من التّعليم فإنّ تعلّم الرّياضيات يهدف أساسًا إلى غاية تكوينيّة رئيسة عملنا على تجسيدها من خلال هذا الكتاب في محاور ثلاثة.

أولا: الأنشطة العددية

- تعمل هذه الأنشطة على تهيئة المتعلّم لمواصلة الحساب العدديّ والتّوسّع في موضوع الأعداد بإدخال القاسم المشترك الأكبر والجذور التّربيعيّة، وتهتم أيضا بالحساب الحرفيّ من خلال أنشطة النّشر والتّبسيط والتّحليل لعباراتٍ جبريّة مع إدخال المتطابقات الشّهيرة، وحلّ المعادلات والمتراجحات.
- التّدريب على الاستدلال الاستنتاجيّ بإنجاز بعض البراهين لخواص مقرّرة في هذا البرنامج، وعند معالجة بعض المشكلات.
- تستغل هذه الأنشطة أدوات الحساب (المجدولات على الخصوص) لفهم بعض خوارزميّات الحساب والعمل بها.

ثانيا: الدّوال وتنظيم المعطيات

- نوظف وضعيّات تناسبيّة وتستخرج مفهوم الدّالة الخطيّة ومفهوم الدّالة التّآلفيّة من وضعيّات الحياة اليوميّة للمتعلّم.
- نواصل التّدريب على تنظيم المعطيات وتقديمها في شكل جدول سلاسل إحصائيّة وتمثيلها.

كما نهتم بحساب التّكرارات وإدخال التّكرارات المجمّعة ونشرع في إدخال مؤشّرات الموقع وترجمتها...

ثالثا: الأنشطة الهندسيّة

- تعمم هذه الأنشطة نظريّة طالس وعكسها، وتتناول بعض النسب المثلّثيّة الجديدة (الجيب والظل) في المثلّث القائم.
- تعرفنا على مفهوم الشّعاع انطلاقا من الانسحاب، وعلى الجمع الشّعاعيّ انطلاقا من مركّب انسحابين، وعلى إحداثيي شعاع (قراءة وحساب) في معلم متعامد ومتجانس.
- نواصل تناول التّحويلات النّقطيّة بدراسة الدّوران.
- نتعرف على الكرة والجلّة وندرس مقاطع مستوية على المجسّمات المألوفة.

ينتهي كل باب من أبواب الكتاب بصفحتين وضعتا تحت عنوان «إستراحة». وتتطرق هذه الإستراحات إلى جوانب من الثقافة العلمية إذ تتناول في كل باب موضوعا تاريخيا متبوعًا بموضوع آخر يتصل بالرياضيات المعاصرة.

وقد زوّدنا بنصوص هذه الصفحات الدكتور أبو بكر خالد سعد الله (الأستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة، القبة).

نتمنى أن يؤدي هذا الكتاب المهمة التي وضع من أجلها.

المؤلفون



1 الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

تشخيص المكتسبات القبلية وتحضير للدرس.

أنشطة

1 التعرف على قاسم عدد طبيعي

2 تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي

اكتشاف وبناء معارف جديدة.

معارف

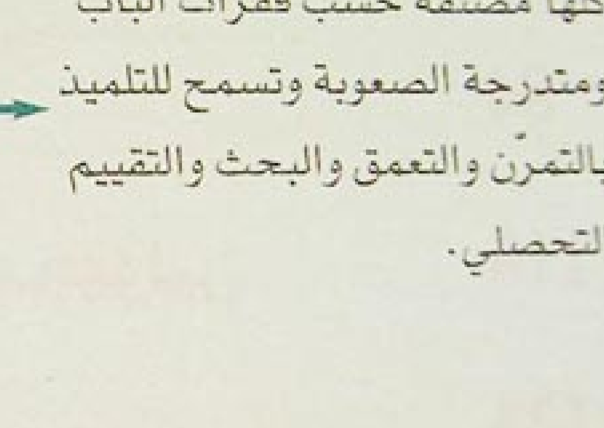
1 قاسم عدد طبيعي

2 خواص قواسم عدد طبيعي

صياغة المفاهيم والمعارف المكتشفة.



كل تمرين يمكن التلميذ من توظيف معارفه الجديدة ويكسبه طريقة للحل وينمي لديه المهارات في حل وتحرير تمارين مماثلة.



كلها مصنفة حسب فقرات الباب ومتدرجة الصعوبة وتسمح للتلميذ بالتمرّن والتعمق والبحث والتقييم التحصلي.



ثقافة علمية



محتويات الكتاب

1 الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

تمهيد

1 انقل الجدول التالي وضع كل عدد من الأعداد الموالية في العمود المناسب :
6732 ؛ 732 ؛ 595 ؛ 219 ؛ 1475 ؛ 3147.

يقبل القسمة على			
2	3	5	9

2 من بين المساويات الآتية، ما هي المساويات التي تعبر عن قسمة إقليدية ؟

- $58 = 12 \times 4 + 10$
- $20 = 3 \times 6 + 2$
- $31 = 15 \times 2 + 1$
- $48 = 4 \times 11 + 4$
- $62 = 5 \times 11 + 7$
- $18 = 6 \times 3 + 0$

3 اختزل الكسور الآتية :

$\frac{171}{15}$ ؛ $\frac{48}{16}$ ؛ $\frac{35}{56}$ ؛ $\frac{150}{130}$ ؛ $\frac{18}{12}$ ؛ $\frac{5}{15}$.

* اختزل الكسور الآتية مستعينا بالآلة الحاسبة :

$\frac{1978}{732}$ ؛ $\frac{444}{888}$ ؛ $\frac{315}{399}$ ؛ $\frac{1954}{1962}$.

4 احسب، ثم اختزل الناتج إن أمكن :

$\frac{3}{2} - \frac{7}{10}$ ؛ $\frac{3}{11} + \frac{7}{11}$.

$\frac{-6}{-5} + \frac{+2}{-1,3}$ ؛ $\frac{12}{5} \times \frac{-10}{9}$.

$\frac{-39}{45} \times \frac{44}{26}$ ؛ $\frac{4}{10}$ ؛ $\frac{2}{3}$.

$\left(3 + \frac{-4}{9}\right)$ ؛ $\frac{-1}{6}$ ؛

$\frac{7}{5} - \frac{1}{2}$ ؛ $-2 - \frac{3}{5}$ ؛

$\frac{1}{2} \times \frac{17}{16} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$.

5 اكتب الأعداد على شكل قوة للعدد 10 :

$\frac{1}{10000000}$ ؛ $0,000001$ ؛ $0,001$ ؛ $\frac{1}{10}$ ؛ 100000.

6 أعط الكتابة العشرية للأعداد التالية :

17^0 ؛ $(-5)^{-1}$ ؛ 8^{-2} ؛ $2,4^2$ ؛

$0,07 \times 10^6$ ؛ $6,25 \times 10^{-3}$ ؛

-4×10^{-1} ؛ 45×10^{-1}.

7 أعط الكتابة العلمية للأعداد الآتية :

72 ؛ $0,0000056$ ؛ 56000 ؛

$10,42 \times 10^{-5}$ ؛ $135,4 \times 10^{-4}$ ؛ $0,15 \times 10^{-2}$.

8 اكتب الأعداد الآتية على شكل قوة للعدد 10.

$\frac{1}{10^{-6}}$ ؛ $\frac{10^{-1}}{10^{-3}}$ ؛ $(10^3)^{-3}$ ؛ $\frac{1}{10^4}$ ؛

$10^{-2} \times 10^{-3}$.

أنشطة

100

1 التعرف على قاسم عدد طبيعي

1 أعط الكتابة المناسبة التي تعبر عن القسمة الاقليدية للعدد :

376 على 19 ؛ 24 على 4 ؛ 96 على 8.

اكمل:

.96 = 8 x ......

.24 = 4 x ......

ما هو باقي القسمة الاقليدية لـ:

24 على 4.

96 على 8.

نقول إن :

24 مضاعف 4.

24 قابل للقسمة على 4.

4 قاسم لـ 24 أو 4 يقسم 24.

• هل 19 قاسم لـ 376 و هل 12 قاسم لـ 96 ؟

2 من بين الجمل الآتية، ما هي الصحيحة وما هي الخاطئة : (برّر إجابتك).

• 25 قابل للقسمة على 5.
• 15 مضاعف 5.
• 14 مضاعف 28.
• 7 قاسم لـ 48.
• 1 قاسم لـ 76.
• 0 قاسم لـ 8.

2 تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي

1 اكتب على شكل جداء وبجميع الطرق الممكنة كلا من :

.12 ; 15 ; 11 ; 48 ; 20

اوجد قواسم الأعداد :

.12 ; 15 ; 11 ; 48 ; 20

3 خواص قواسم عدد طبيعي

1 n ، b ، a أعداد طبيعية حيث : $n \neq 0$ و $a > b$.

اكمل الجدول التالي :

a	b	n	a + b	a − b
48	30	2		
105	50	5		

تحقق أن :

إذا كان: n يقسم a و n يقسم b.

فإن: n يقسم $(a-b)$ و n يقسم $(a+b)$.

2 n ، b ، a أعداد طبيعية حيث $n \neq 0$ و $a > b$. أكمل الجدول التالي :

a	b	n	باقي القسمة الاقليدية لـ a على b
56	49	7	
65	26	13	
48	30	6	

ليكن r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b.

تحقق أن :

إذا كان: n يقسم a و n يقسم b.

فإن: n يقسم r.

4 القاسم المشترك الأكبر لعددين

1 اوجد مجموعة القواسم المشتركة للعددين 48 ، 18.

- ما هو أكبر هذه القواسم ؟

نقول إنّ هذا العدد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 48 و 18.

نرمز للقاسم المشترك الأكبر بالرمز : PGCD.

ونكتب : PGCD (48,18) = ...



أنشطة

2 اوجد مجموعة القواسم المشتركة للعددين : 30 و 45 ، 60 و 90 ، 18 و 24.

عين : (30 ؛ 45) PGCD ؛ (60 ؛ 90) PGCD ؛ (18 ؛ 24) PGCD.

قارن بين مجموعة القواسم المشتركة للعددين ومجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما.



5 خوارزمية إقليدس (عملية الطرح المتتالية)

1 نعتبر العددان 72 و 56 وفرقهما 16.

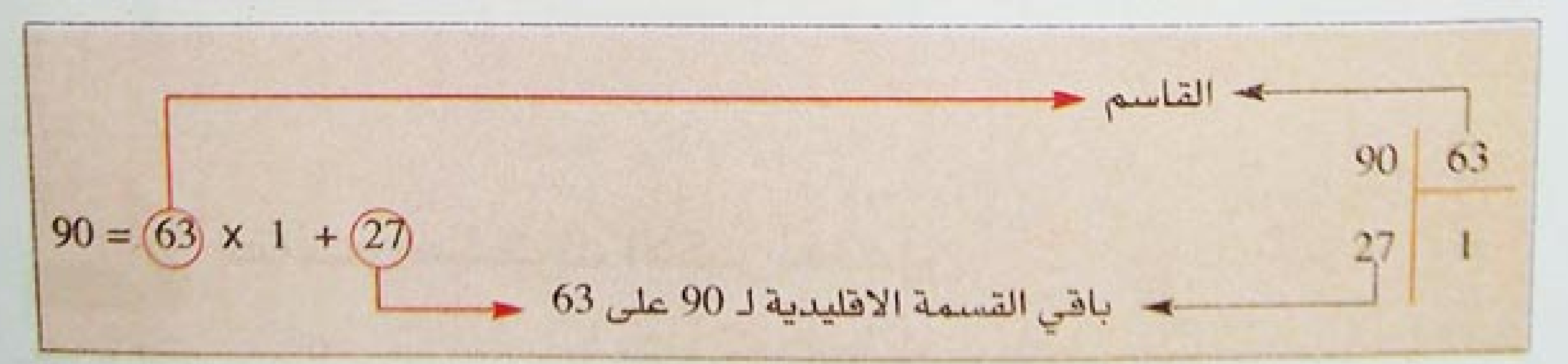
- تحقق أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 72 و 56 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 56 و 16 .
- اختر عددين a و b (a>b) وتحقق أن :
- القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو القاسم المشترك الأكبر للعددين b و (a − b).
- تمعّن جيدا في عمليات الطرح التالية، وتحقق من ذلك :

$209 - 133 = 76$ ؛
$133 - 76 = 57$ ؛
$76 - 57 = 19$ ؛
$57 - 19 = 38$ ؛
$38 - 19 = 19$.

- باستعمال الملاحظة السابقة والعمليات الطرح أعلاه، اوجد (133 ; 209) PGCD.

6 خوارزمية إقليدس (القسمات الاقليدية)

لدينا



- تحقق أن (27 ; 63) PGCD = (63 ; 90) PGCD.
- اختر عددين طبيعيين a، b (a > b) وتحقق أنّ (b ; r) PGCD = (a ; b) PGCD حيث :

r هو باقي القسمة الاقليدية لـ a على b.

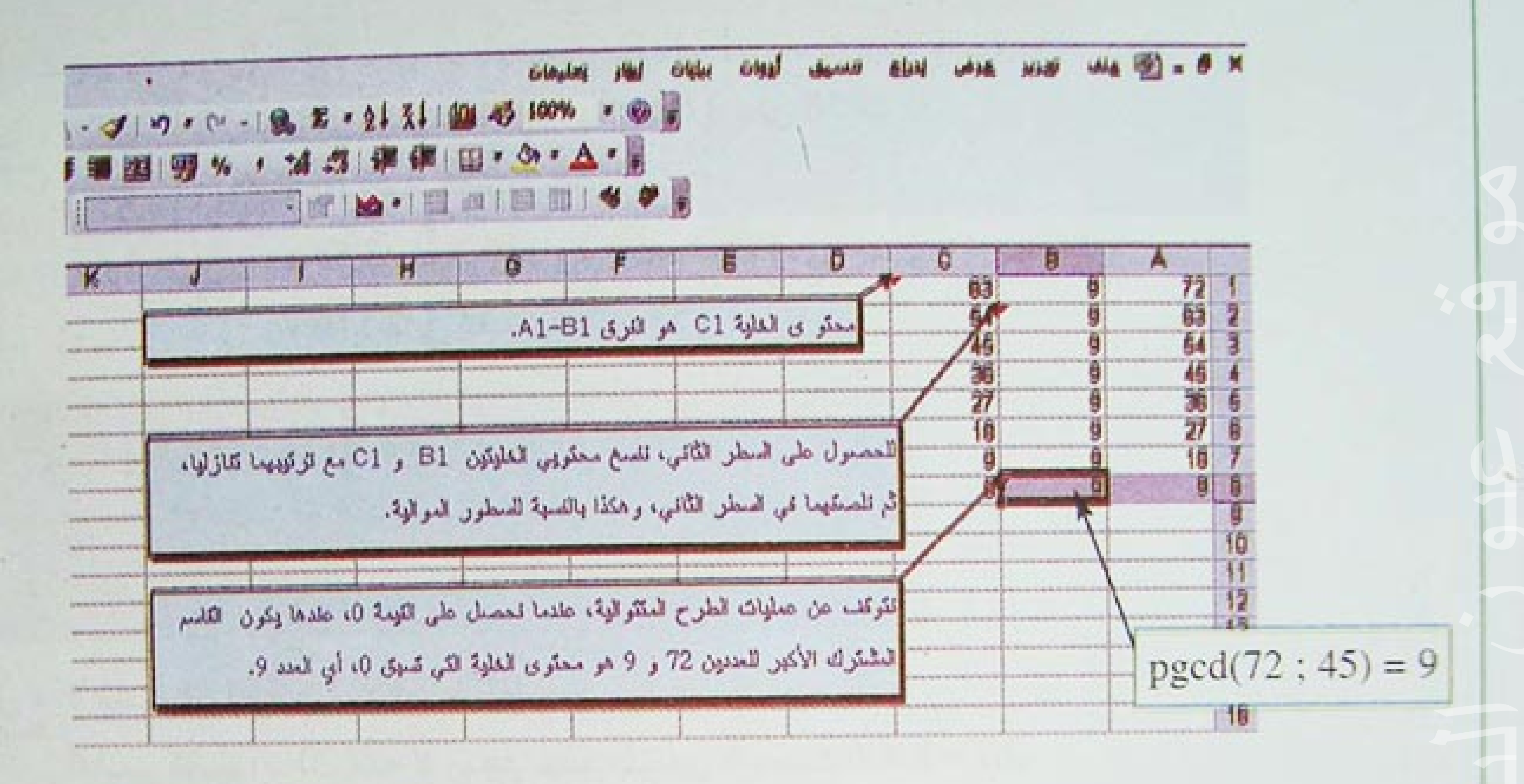
- تمعّن جيدا في القسمات الاقليدية التالية، ثم تحقق من ذلك :

$468 = 396 \times 1 + 72$ ؛
$396 = 72 \times 5 + 36$ ؛
$72 = 36 \times 2 + 0$.

- اعتمادا على الملاحظة السابقة والقسمات الاقليدية، اوجد (396 ; 468) PGCD.

7 الاستعانة بمجدول

تطبيق خوارزمية إقليدس سهلة في حالات بسيطة، لكنها ثقيلة ومملّة عندما نجري عمليات الطرح المتتالية باليد على أعداد كبيرة، في حين أنّها سهلة جداً عندما نستعين بمجدول.



	A	B	C
1	72	9	63
2	63	9	54
3	54	9	45
4	45	9	36
5	36	9	27
6	27	9	18
7	18	9	9
8	9	9	0

برمج مجدولاً لايجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1890 و 15723 ؛ 1944 و 15470.

8 العددان الأوليان فيما بينهما

1 a و b عددان طبيعيان بحيث $PGCD(a ; b) = 1$.

ما هي القواسم المشتركة للعددين a و b ؟

نقول إنّ العددين :

a و b أوليان فيما بينهما.

2 تحقق أن : 27 و 25 أوليان فيما بينهما.

111 و 104 أوليان فيما بينهما.

9 الكسور غير القابلة للاختزال

1 من بين الكسور الآتية، ما هي الكسور غير القابلة للاختزال ؟ (برّر إجابتك).

$\frac{1}{5}$ ؛ $\frac{5}{9}$ ؛ $\frac{12}{14}$ ؛ $\frac{41}{15}$ ؛ $\frac{130}{160}$ ؛ $\frac{11}{3}$.

2 حسب $PGCD(221 ; 204)$ ؛ $PGCD(127 ; 107)$.

اوجد الكسر غير القابل للاختزال لكل من الكسور التالتية : $\frac{2346}{1479}$ ؛ $\frac{204}{221}$ ؛ $\frac{127}{107}$

معـــارف

1 قاسم عدد طبيعي

تعريف

b ، a عددان طبيعيان حيث b غير معدوم.

نقول إنّ b قاسم لـ a عندما يكون باقي القسمة الاقليدية لـ a على b معدوماً.

مثال :

116	58
0	2

باقي القسمة الاقليدية لـ 116 على 58 هو 0.

- 116 مضاعف لـ 58.
- 58 قاسم لـ 116 و2 قاسم لـ 116 .
- 116 قابل للقسمة على 58.

من أجل عددين طبيعيين غير معدومين a و b.

(a مضاعف لـ b) معناه (a قابل للقسمة على b) معناه (b يقسم a)

معناه (يوجد عدد طبيعي k بحيث $a = k \times b$).

مثال : 7 قاسم لـ 91 لأنّ $7 \times 13 = 91$.

6 ليس قاسماً لـ 20 لأنّه لا يوجد عدد طبيعي k بحيث $6 \times k = 20$.

ملاحظة

1 قاسم لكل عدد طبيعي.

2 خواص قواسم عدد طبيعي

خاصة 1

n .b .a أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.

إذا كان n يقسم كلا من a و b، فإن n يقسم كلا من $(a + b)$ و $(a - b)$.

مثال : 7 قاسم لكلا من 21 و 56.

و منه 7 قاسم لـ $(21 + 56)$ أي 7 يقسم 77 و 7 يقسم $(56 - 21)$ أي 7 يقسم 35.

خاصة 2

n .b .a أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.

إذا كان n يقسم كلا من a و b، فإنّ n يقسم باقي القسمة الاقليدية لـ a على b.

مثال : 3 يقسم كلا من 36 و 15. ومنه 3 يقسم باقي القسمة 6.

36	15
6	2

3 القاسم المشترك الأكبر

تعريف

القاسم المشترك لعددين طبيعيين هو عدد طبيعي يقسم كل منهما.
أكبر قاسم مشترك لعددين يسمى القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال : قواسم 45 هي : 1، 3، 5، 9، 15، 45. قواسم 30 هي : 1، 2، 3، 5، 6، 10، 15، 30.

القواسم المشتركة لـ 45 و 30 هي : 1، 3، 5، 15.

العدد 15 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 45 و 15. ونكتب $PGCD\ (45\ ;\ 30) = 15$.

خاصة

مجموعة القواسم المشتركة لعددين هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال : قواسم 48 هي : 1، 2، 3، 4، 6، 8، 12، 16، 24، 48.

قواسم 54 هي : 1، 2، 3، 6، 9، 18، 27، 54.

القواسم المشتركة لـ 48 و 54 هي : 1، 2، 3، 6.

$PGCD\ (48\ ;\ 54) = 6$ قواسم 6 هي : 1، 2، 3، 6.

4 العددان الأوليان فيما بينهما

تعريف

a و b عددان أوليان فيما بينهما معناه أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

مثال : قواسم 14 هي : 1، 2، 7، 14.
قواسم 15 هي : 1، 3، 5، 15.
$PGCD\ (14\ ;\ 15) = 1$.

- العددان 14 و 15 أوليان فيما بينهما.
- العددان 14، 8 غير أوليين فيما بينهما لأن $PGCD\ (14\ ;\ 8) = 2$.

5 الكسر غير القابل للاختزال

تعريف

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.
الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال يعني a و b أوليان فيما بينهما.

مثال :

$\frac{14}{15}$ غير قابل للاختزال
إذن 14 و15 أوليان فيما بينهما.

ملاحظة

عندما نقسم كلا من حدي كسر على القاسم المشترك الأكبر لبسطه ومقامه نحصل على كسر غير قابل للاختزال.

مثال : $PGCD\ (1449\ ;\ 2277) = 207$ (إعتمادا على خوارزمية إقليدس).

إذن $\frac{2277}{1449} = \frac{2277 : 207}{1449 : 207} = \frac{11}{7}$.

الكسر $\frac{11}{7}$ غير قابل للاختزال.



إيجاد جميع قواسم عدد طبيعي غير معدوم

طريقة نكتب العدد على شكل جداء عددين طبيعيين بذكر جميع الحالات الممكنة.

لنبحث عن قواسم 28.

1يقسم 28، نكتب 28 x 1 = 28، إذن 28 و 1 قاسمان لـ 28.

2 يقسم 28، نكتب 14 x 2 = 28، إذن 14 و 2 قاسمان لـ 28.

3 لا يقسم 28.

4 يقسم 28، نكتب 7 x 4 = 28، إذن 7 و 4 قاسمان لـ 28.

6.5 لا يقسم 28.

7 يقسم 28، وقد ذُكِرَ كقاسمًا لـ 28 إذن نتوقف

نكتب قواسم 28هي : 1 ، 28 ، 14 ، 2 ، 7 ، 4.

حساب القاسم المشترك الأكبر

طريقة 1 نبحث عن جميع القواسم المشتركة لعددين ونأخذ أكبرها.

احسب PGCD (65 ; 91)

قواسم 65 هي : 1 ؛ 65 ؛ 5 ؛ 13.

قواسم 91 هي : 1 ؛ 91 ؛ 7 ؛ 13.

القواسم المشتركة لـ 65 و 91 هي : 1 و 13.

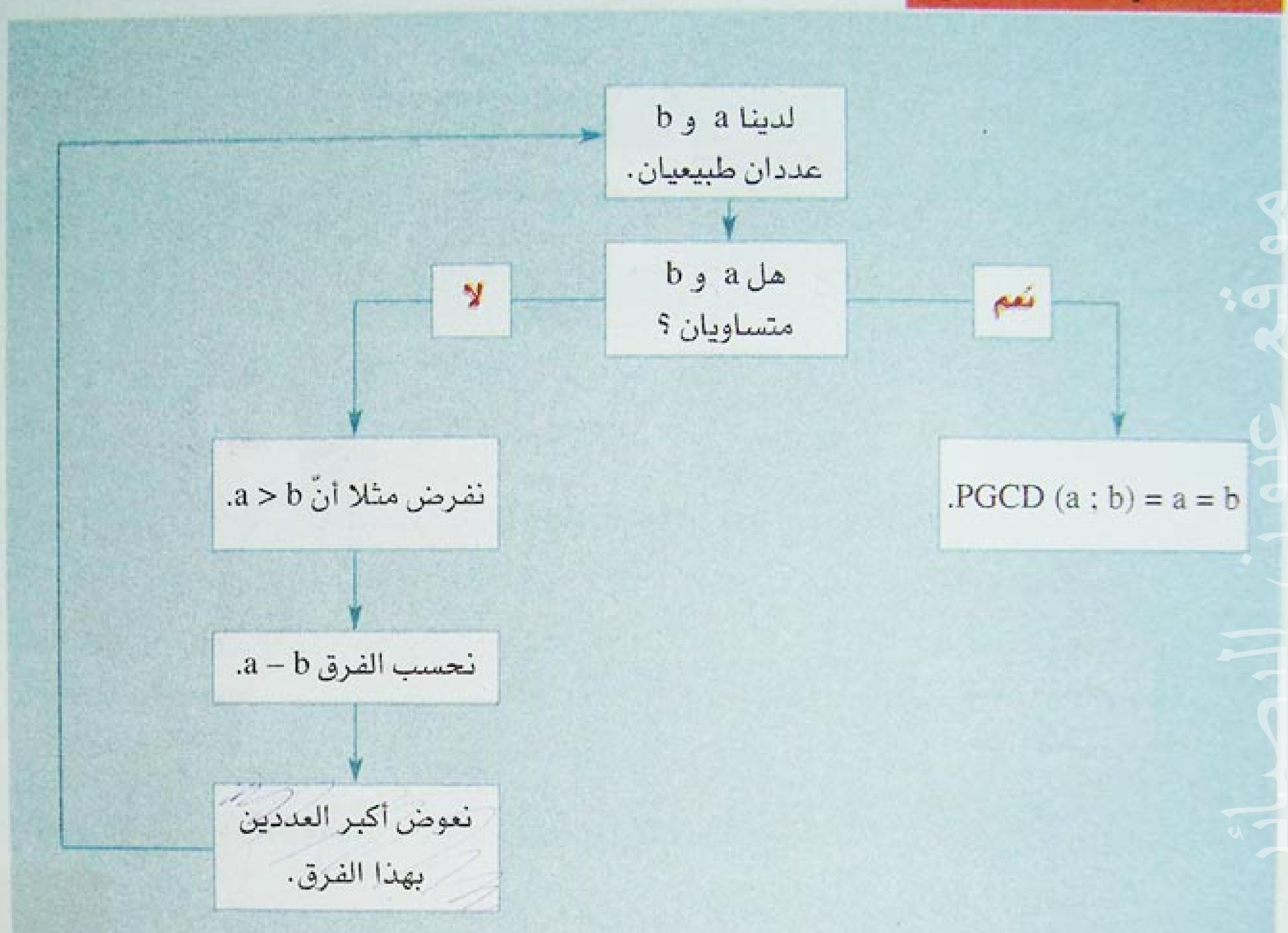
إذن PGCD (65 ; 91) = 13.



طرائق وتمارين محلولة

طريقة 2 تطبيق خوارزمية إقليدس (عمليات الطرح المتتالية).

نشرحها في المخطط التالي:



تمرين

اوجد PGCD (3465 ; 1575).

$3465 - 1575 = 1890$ ؛

$1890 - 1575 = 315$ ؛

$1575 - 315 = 1260$ ؛

$1260 - 315 = 945$ ؛

$945 - 315 = 630$ ؛

$630 - 315 = 315$ ؛

$315 - 315 = 0$.

نتحصل على عددين متساويين. إذن PGCD (3465 ; 1575) = 315.

طرائق وتمارين محلولة

طريقة 3 تطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة من القسمات إقليدية).

نوضحها في المخطط التالي :

لدينا عددين.

نقسم أكبرهما على أصغرهما.

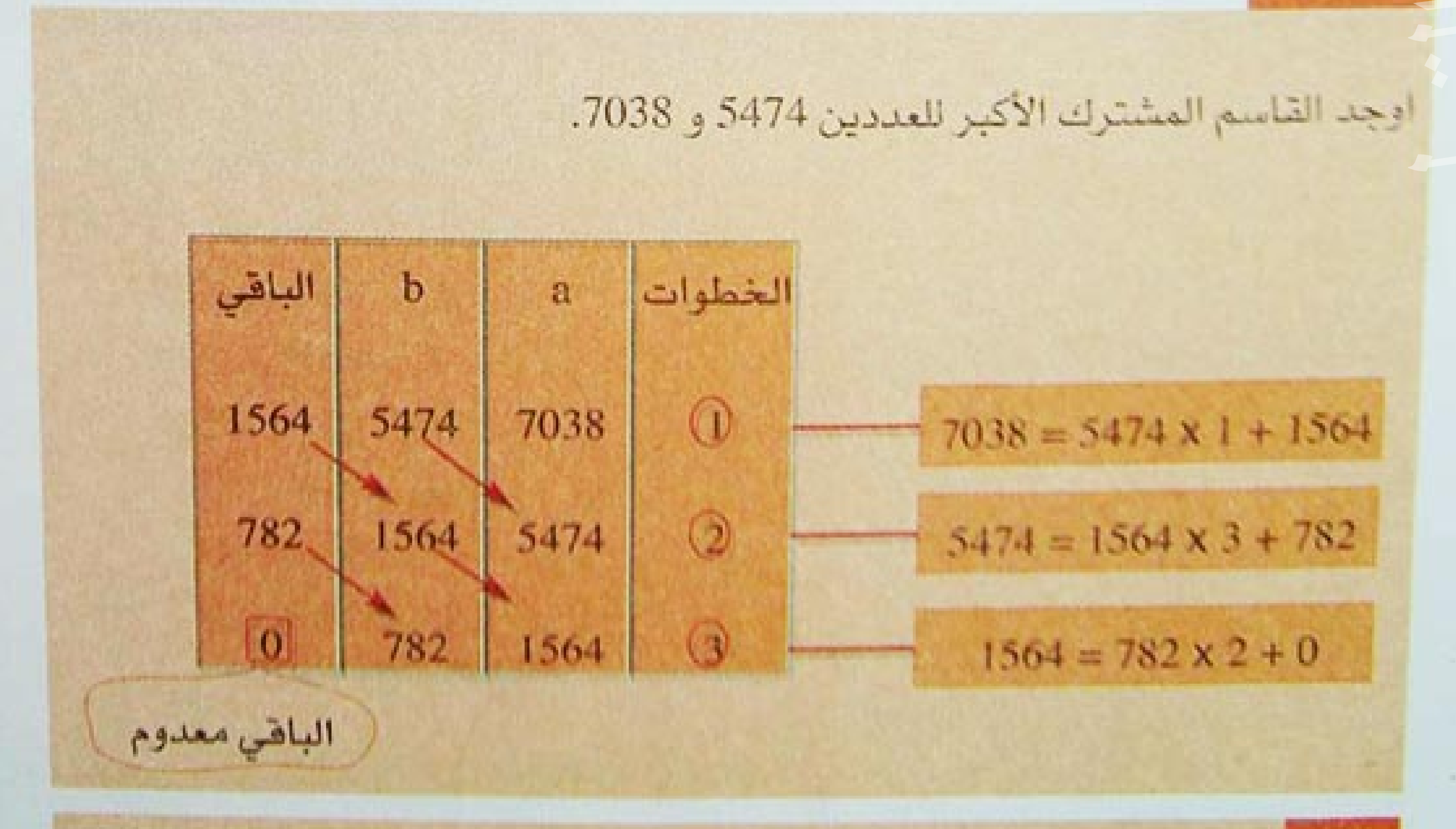
هل الباقي معدوم ؟

نعم ← القاسم هو قاسمهما المشترك الأكبر.

لا ← نقسم القاسم على الباقي.

تمرين

اوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 5474 و 7038.



الخطوات	a	b	الباقي
①	7038	5474	1564
②	5474	1564	782
③	1564	782	0

$7038 = 5474 \times 1 + 1564$

$5474 = 1564 \times 3 + 782$

$1564 = 782 \times 2 + 0$

إذن العدد 782 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 7038 و 5474.

تمارين للتطبيق المباشر

قواسم عدد طبيعي

1 أكمل ما يلي باستبدال النقط بإحدى الكلمتين «مضاعف» و«قاسم لـ ».

3 ...... 15.	9 ...... 3.
1 ...... 76.	55 ...... 550.

2 • تحقق أن $3553 = 11 \times 17 \times 19$.
• عيّن الجمل الصحيحة من بين الجمل التالية :
أ) 3553 قاسم لـ 17. ب) 19 قاسم لـ 3553.
جـ) 3553 مضاعف 11.
• اوجد جميع قواسم 3553.

3 اوجد جميع قواسم كل من الأعداد الآتية:
32 ؛ 14 ؛ 35 ؛ 5×17 ؛ $2 \times 11 \times 13$.

4 اوجد القواسم المشتركة للأعداد المعطاة في كل حالة :
أ) 20 و 60 و 70. ب) 30 و 45. جـ) 36 و 56.

5 a، b، c ثلاثة أعداد حيث :
$a = 3^5 \times 10^3 \times 8^4$ ؛ $b = 3^2 \times 10^3 \times 7^3$ ؛
$c = 3^4 \times 2^4 \times 5$.
هل : 1) 3^2 قاسم مشترك للعددين a و b ؟
2) 3×10 قاسم مشترك للعددين b و c ؟
3) $7^3 \times 3^4$ قاسم مشترك للعددين b و c ؟

6 انقل و اكمل بصحيح أو خاطئ ما يلي :
أ) 1 يقسم 0 ...... ب) 3 يقسم 15 ......
جـ) 0 يقسم 15 ...... د) 9 قابل للقسمة على 4 ......
هـ) 12 قاسم 16 ...... و) 27 قابل للقسمة على 9 ......
ي) 14 يقسم 14 ...... ن) 17 مضاعف 17 ......
م) 5 يقسم 35 ...... ل) 35 مضاعف 5 ......

القاسم المشترك الأكبر لعددين

7 احسب القاسم المشترك الأكبر لكل من الأعداد التالية باستعمال خوارزمية اقليدس في كل حالة :
أ) 2175 و 1044. ب) 11484 و 3564. جـ) 580 و 928.

8 اوجد ذهنيا الكسور غير القابلة للاختزال والكسور القابلة للاختزال من بين الكسور الآتية :
$\frac{49}{86}$ ؛ $\frac{6}{12}$ ؛ $\frac{150}{70}$ ؛ $\frac{15}{7}$ ؛ $\frac{15}{35}$ ؛ $\frac{105}{9}$ ؛ $\frac{21}{3^2}$.

9 اختزل الكسور الآتية:
أ) $\frac{444}{888}$ ؛ $\frac{1978}{732}$ ؛ $\frac{704}{204}$ ؛ $\frac{315}{399}$.
ب) $\frac{310}{651}$ ؛ $\frac{201}{101}$ ؛ $\frac{520}{240}$ ؛ $\frac{91}{77}$ ؛ $\frac{104}{136}$.

10 اختزل إن أمكن :
1) $\frac{25+35+50}{40+70}$ ؛ $\frac{18+21}{102+45}$ ؛ $\frac{12+24}{8+18}$.
2) $\frac{70-45}{35+20}$ ؛ $\frac{52-36}{44-22}$.

11 نعلم أن :
• القاسم المشترك الأكبر للعددين 798 و 285 هو 57.
• القاسم المشترك الأكبر للعددين 99396 و 63108 هو 36.
• العددان 693 و 845 أوليان فيما بينهما.
اعتمادا على هذه المعطيات، اختزل الكسور الآتية إن أمكن حتى تتحصل على كسر غير قابل للاختزال :
أ) $\frac{19}{285}$ ؛ $\frac{693}{845}$ ؛ $\frac{99396}{63108}$ ؛ $\frac{798}{285}$.
ب) $\frac{993960}{631080}$ ؛ $\frac{79800}{28500}$ ؛ $\frac{798 \times 5}{285 \times 3}$ ؛ $\frac{63108}{36}$.

الأعداد الأولية فيما بينها

12 هل العددان الطبيعيان أوليان فيما بينهما في كل حالة من الحالات التالية ؟
أ) 21 و 55. ب) 63 و 110. جـ) 78 و 285. د) 15 و 10.

13 a و b عددان أوّليان فيما بينهما.
هل العددان 2a و 4b أوّليان فيما بينهما ؟

14 اوجد إن أمكن :
أ) عددين زوجيين أوّليين فيما بينهما.
ب) عددين فرديين أوّليين فيما بينهما.
جـ) مضاعفين للعدد 3 وأوّليين فيما بينهما.

1 بدّل النقط بأرقام حتى يقبل كل عدد من الأعداد الآتية القسمة على 3 و على 5 في آن واحد :
أ) •1285. ب) •784. ج) •38. د) •31.

2 ما هو الرقم الذي يكمل العدد 3.0 حتى يقبل القسمة على 9 ؟
ما هو الرقم الذي يكمل العدد 12.7 حتى يقبل القسمة على 9 ؟

3 بيّن، من أجل كل عددين x و y حيث $4y \leq 3x$، أنّ :
أ) 14 يقسم $42x + 56y$. ب) 14 يقسم $42x - 56y$.

4 في كل حالة من الحالات الآتية بين أنّ b قاسم لـ a،
واحسب حاصل القسمة q لـ a على b :
1) $a = 2^4 \times 5^3 \times 11^2 \times 7^4$ و $b = 11 \times 7^2 \times 2^3$.
2) $a = 3^5 \times 10^3 \times 8^4$ و $b = 3^4 \times 8^3 \times 10^2$.

5 اوجد جميع قواسم كل من الأعداد 36 ، 56 ، 24.
استنتج القواسم المشتركة للأعداد 24 و 56 و 36 .

6 x و y عددان طبيعيان بحيث $432x = 264y$.
احسب الكسر $\frac{x}{y}$.
واعط الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال.

7 أجر الحسابات الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة
واعط الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال :

$$A = \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{4}} \; ;$$

$$B = \frac{1}{\frac{4}{9} + \frac{2}{5}} \; ;$$

$$C = \frac{\frac{3}{7}}{14} \; ;$$

$$D = \frac{3}{\frac{7}{14}} \, .$$

8 احسب العدد الطبيعي x في كل حالة من الحالات التالية :
أ) $x = 3 : 87$; $14 = x : 84$; $3x = 18$.
ب) $3(x-1) = 120$; $4(x+2) = 48$.
جـ) $12(36 - 2x) = 144$.

9 بين أن 5^3 و 5^4 من قواسم 5^7.
• اكتب العدد 7 على شكل مجموع عددين طبيعيين،
اذكر كل الحالات الممكنة.
استنتج قواسم 5^7.

10 عندما نقسم 402 على العدد x نجد الباقي 12.
عندما نقسم 488 على نفس العدد x نجد الباقي 8.
اوجد العدد x، علما أنّ $x > 12$.

11 A ، B ، C عبارات جبرية حيث :
$A = 5x^2 - 3x - 2$; $B = (-5x + 1)(x + 2)$;
$C = -x^2 + 2x + 1$.
احسب قيمة كل من A و B و C من أجل :
$x = \frac{1}{5}$; $x = \frac{-4}{3}$; $x = 5 \times 10^{-3}$; $x = 0$.

12 يتكون قسم سنة الرابعة متوسط من 39 تلميذ.
كم فريقا يمكن تشكيله للعب مباراة في : كرة القدم، كرة الطائرة، كرة اليد؟ كم يبقى من تلميذ في كل حالة ؟

13 اختزل الكسور الآتية واعط الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال :

$$A = \frac{72 \times 45}{27}$$

$$B = \frac{36 \times 45 \times 96}{24 \times 36}$$

$$C = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2 \times 5^2 \times 3^2 \times 4 \times 11}$$

$$D = \frac{2^3 \times 5 \times 3^2}{25 \times 2^2 \times 3} \, .$$

14 احسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد التالية باستعمال المجدول :
أ) 1275 و 1428 ; ب) 43351 و 21957.

15 x عدد طبيعي غير معدوم.
بقسمة كل عدد من العددين 280 ، 3470 على x نجد على الترتيب : الباقيين 8 ، 5.
عين اكبر قيمة للعدد x.

تمارين

16 اعط الكتابة العلمية لكل من :

$a = 65\,00\,000\,000$ ؛ $b = 0{,}012$ ؛ $c = 0{,}000\,005$.

احسب الجداء (اعطاء الناتج بالكتابة العلمية).

- $6500\,000\,000 \times 0{,}000005$.
- $100002000000 \times 0{,}000\,000\,0001$.

17 نصف قطر الكرة الأرضية $R = 6400$ km.

المسافة بين الأرض والشمس تساوي $23400 \times R$.

سرعة الضوء هي $300\,000$ km s^{-1}.

احسب بالثواني الزمن الذي يستغرقه الضوء لقطع المسافة بين الأرض والشمس.

18 اوجد عددين طبيعيين مجموعهما 81 وقاسمهما المشترك الأكبر 27.

19 b عدد طبيعي بحيث $PGCD(378 ; b) = 54$.

ما هي قيم b (اذكر بعض الحلول).

20 احسب ذهنيا القاسم المشترك الأكبر للعددين في كل حالة من الحالات الآتية :

أ) 70 و 70 ؛ ب) 20 و 100 ؛ جـ) 60 و 50 ؛ د) 50 و 45.

21 هل الأعداد التالية أولية فيما بينها في كل حالة؟

أ) 13 و 6 ؛ ب) 64 و 48 ؛ جـ) 7 و 17 ؛

د) 12 و 130 ؛ هـ) 35 و 31 ؛ و) 33 و 9.

22 اوجد عددين طبيعيين جداؤهما 1617 والقاسم المشترك الأكبر لهما هو 7 (اذكر جميع الحلول).

23 أجر الحسابات التالية بدون استعمال الآلة الحاسبة :

$A = 4{,}2 \times 10^{-5} + 7{,}8 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-2}$

$B = \dfrac{3 \times 10^{-2}}{1{,}5 \times 10^{-4}} - 2 \times 10^{2}$

$C = (4{,}5\times10^{21}+5{,}5\times10^{21}) \times (1{,}2\times10^{31}+0{,}8\times10^{31})$.

24 اكمل إن أمكن بإحدى العبارتين «قاسم» أو «مضاعف» :

أ) 9 ... 54 ، 45 ... 4455 ، 12 ... 4 ، 35 ... 70.

ب) 48 ... 4 ، 45 ... 5 ، 56 ... 56.

25 هل الكسور التالية متساوية ؟

$\frac{6}{25}$ و $\frac{54}{228}$ ؛ $\frac{3}{2}$ و $\frac{108}{36}$ ؛ $\frac{1}{4}$ و $\frac{5}{20}$ ؛ $\frac{4}{3}$ و $\frac{8}{6}$ ؛

$\frac{252}{276}$ و $\frac{45339}{49657}$ ؛ $\frac{88263}{160181}$ و $\frac{48125}{23375}$.

26 a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

اختزل الكسور التالية :

أ) $\dfrac{12b}{144ab^2}$ ؛ $\dfrac{21a^2}{42a}$ ؛ $\dfrac{13a}{52a^2}$.

ب) $\dfrac{54ab}{27a^2b^2}$ ؛ $\dfrac{75a^2}{105ab^2}$ ؛ $\dfrac{8}{12ab}$.

27 احسب واعط الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال، ثم اعط القيمة التقريبية إلى 10^{-4} بالنقصان للناتج. ماذا تلاحظ ؟

$$A = 1 + \frac{1}{2}$$

$$B = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

$$C = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$D = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$



مسائل

1 أبعاد صندوق متوازي المستطيلات هي 36، 48، 60 (وحدة الطول هي السنتيمتر).

نريد أن نملأه بمكعبات لها نفس البعد x (x عدد طبيعي).

• اوجد x حتى يكون عدد المكعبات التي تملأ الصندوق أصغر ما يمكن ؟

2 لبائع الزهور 48 وردة و72 قرنفلة يريد أن يستعمل كل هذه الزهور ليشكل أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة.

• ما هو عدد باقات الزهور ؟

• ما هو عدد الورود في كل باقة ؟

• ما هو عدد القرنفل في كل باقة ؟

3 مجموعة أقلام تتكوّن من 301 قلم أحمر و210 قلم أخضر. نريد وضع تلك الأقلام في علب بحيث :

– تضمّ كلّها نفس عدد الأقلام.

– تكون أقلام كلّ علبة من نفس اللّون.

• ما هو عدد الأقلام في كل علبة ؟

• ما هو عدد العلب من كل لون ؟

4 9 و 11 عددان فرديان متتاليان.

• اوجد العددين a و b بحيث :

$\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال ويساوي $\frac{1}{9} + \frac{1}{11}$.

• ارسم مثلثا قائما ضلعاه القائمان طولاهما a و b.

• تحقق أن طول وتر هذا المثلث هو عدد طبيعي.

• أعد نفس الحساب ونفس التحقيق من أجل عددين فرديين متتاليين آخرين ثم، عددين زوجيين متتاليين.

5 نريد ملء دنّين بالماء و ذلك باستعمال دّن سعته x L حيث x عدد طبيعي. نعلم أنّ سعة الدّن ❶ هي 18 L وسعة الدّن ❷ هي 15 L.



• ما هي أكبر قيمة للعدد x ؟ (نفرغ هذا الدّن كلّيا في كل مرّة).

• كم مرّة استعملنا هذا الدّن لملء الدّن❶؟ لملء الدّن❷؟

6 لمحمّد 165 كريّة بيضاء و 135 كريّة حمراء. يريد أن يكوّن علبا متماثلة من حيث عدد الكريّات البيضاء والحمراء.

1) ما هو أكبر عدد من العلب التي يمكن تكوينها ؟

2) ما هو عدد الكريّات البيضاء وعدد الكريّات الحمراء التي تكون في كلّ علبة ؟

7 لصاحب مكتبة 78 كتاب رياضيات، و 102 كتاب تكنولوجيا. أراد أن يرتّبها في رفوف مكتبته بحيث تكون كلّ الرّفوف متماثلة من حيث عدد كتب الرياضيات وكتب تكنولوجيا.

• ما هو أكبر عدد من الرفوف المستعملة ؟

• إذا كان سمك كتاب الرياضيات هو 1,5 cm وسمك كتاب التكنولوجيا هو 1 cm، فما هو طول كلّ رف (توضع الكتب جنبا إلى جنب في الرّف) ؟

8 نريد غرس أشجار على محيط حديقة مثلثة الشكل على أن توجد شجرة في كل ركن من أركان الحديقة، وأن تكون المسافة التي تفصل الأشجار المتجاورة متساوية.

1) ما هي اكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين إذا علمت أنّ الأبعاد الثلاثة للحديقة هي بالمتر : 42 و 70 و 98 ؟

2) ما هو عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة ؟



من التاريخ

بـول إردوس Paul Erdös (1913- 1996)



حياته : ولد بول إردوس ببودابست، عاصمة المجر، في مارس 1913 وتوفي بوارسو، عاصمة بولندة، في سبتمبر عام 1996 حين كان يحضر مؤتمرا دوليا في الرياضيات. وكان الألمان قد ألقوا القبض على والده خلال الحرب العالمية الثانية، فأخرجته أمه من المدرسة وواصلت تدريسه بالمنزل.

تحصل إردوس على شهادة الدكتوراه في الرياضيات عام 1934. واهتم منذ صغره بالأعداد، إذ يحكى أنه كان يقوم ذهنيا بعمليات ضرب الأعداد الثلاثية الأرقام وعمره لم يتجاوز الرابعة.

وعندما بلغ 17 سنة اكتشف برهانا لنظرية أجمل من البرهان الذي كان معروفا آنذاك. تقول هذه النظرية إن بين كل عدد طبيعي (غير معدوم) وضعفه يوجد، على الأقل، عدد أولي. مثال ذلك : بين 8 و 16 هناك عدد أولي (خذ مثلا 11 أو 13) وبين 50 و 100 هناك عدد أولي (خذ مثلا 61 أو 67 أو 71 أو 73 أو 97. الخ).

من نظرياته : ومن بين النتائج المهمة في نظرية الأعداد تلك المتعلقة بمواقع الأعداد الأولية وتوزيعها بين الأعداد الأخرى، وهي مسألة لازالت مطروحة إلى اليوم. لقد كان هذا الموضوع من جملة اهتمامات إردوس. واهتدى إردوس عام 1949 إلى برهان جد بسيط على نظرية بالغة الأهمية في موضوع الأعداد الأولية. ذلك أن نوع المسائل الذي يهتم به بول إردوس هو : المسائل البسيطة الطرح العويصة الحل.

لقد قارب عدد البحوث والكتب التي نشرها إردوس 1500 عنوانا. واشترك معه في نشر هذه الأعمال حوالي 500 باحث. إنها أرقام لم يدركها أحد من قبل.

سخاء إردوس : كان إردوس سخيا جدا. فعلى سبيل المثال تحصل عام 1983 على جائزة قدرها 50.000 دولار، لكنه لم يأخذ منها سوى 720 دولارا وأوصى بتخصيص 30.000 دولار لمنح دراسية باسم والدته، وترك الباقي للمعوزين. كما كان يستخدم نقوده للجوائز التي يعلن عنها لحل المسائل الرياضية العويصة.

ما كان يميز إردوس :

* لم يحصل على رخصة سياقة !
* لم يمتلك حاسوبا (رغم أن جزءا كبيرا من مكونات الحاسوب قائمة على نظرياته)!
* لم يستخدم الحاسوب قط!
* لم ينقطع عن مكالمة والدته، يوميا، حتى وفاتها!
* لم يكن له منزل شخصي يأوي إليه!
* لم يكن يغادر بذلته البالية أو نعله الصيفي إلا نادرا!
* لم يكن يصافح أو يعانق الأهل والأصدقاء!



الرياضيات تتقدم



الرياضيات رائدة المنافسات الأولمبية العلمية

يعتقد الناس أن المنافسات الأولمبية لا تنظم إلا في مجال الألعاب البدنية. وهم مخطئون في هذا الاعتقاد. إذ أن أهل الرياضيات ربطوا رياضة الجسم برياضة الفكر وراحوا يقيمون منافسات عديدة وطنية وإقليمية وعالمية، أطلقوا عليها مصطلح "المنافسات الأولمبية".

في سنة 1959 بادر أحد الأساتذة الرومانيين، وهو تبرين رومان Roman، بتنظيم منافسة في الرياضيات لطلبة السنة النهائية من التعليم الثانوي سميت آنذاك "المنافسة الأولمبية العالمية الرياضية". وكانت هذه المبادرة محاولة متواضعة ورائدة. وهكذا انطلقت الدورة الأولى من هذه المنافسات العالمية من رومانيا وشارك فيها طلبة أتوا من سبعة بلدان. وفي الدورة الثانية لهذه المنافسة سنة 1960 التي نظمت أيضا برومانيا لم يشارك فيها سوى 5 بلدان. وابتداء من سنة 1964 صارت هذه المنافسات تقام سنويا ويستضيفها كل مرة بلد من بلدان العالم ويشارك فيها أزيد من 80 بلدا.

والجدير بالملاحظة أن هناك دولا كثيرة تنظم منافسات أولمبية وطنية في الرياضيات، وهذا منذ سنين طويلة. ومن بين تلك المنافسات نجد المنافسات الأولمبية الأفريقية التي تشارك فيها الجزائر.

تقوم كل دولة تنوي المشاركة في المنافسة الأولمبية العالمية بتدريب وإعداد مرشحيها خلال السنة الدراسية حتى يكونوا مهيئين للمنافسة التي تجري عادة في غضون شهر جويلية من كل سنة. ويتم اختيار الطلبة من بين المنتمين للسنة النهائية من التعليم الثانوي. وفي الدول المتقدمة ينطلق التدريب لهذه المنافسات مبكرا، بعضها يبدأ في مرحلة التعليم المتوسط.

وحتى ندرك أن الرياضيات رائدة حقا في هذا المجال نشير إلى أن المنافسات الأولمبية العالمية تشمل في حقل العلوم منافسات في ست مواد علمية هي: الرياضيات، الفيزياء، الكيمياء، البيولوجيا، المعلوماتية، علم الفلك. يوضح الجدول التالي الرمز العالمي لكل منافسة وسنة انطلاقها مع موقع من المواقع التي يمكن أن نجد فيها كميات كبيرة من المعلومات حول هذه المنافسات :

المادة	الرمز العالمي	سنة الانطلاق	أحد مواقعها على شبكة الإنترنت
الرياضيات	IMO	1959	http://olympiads.win.tue.nl/imo/index.html
الفيزياء	IphO	1967	http://olympiads.win.tue.nl/ipho/index.html
الكيمياء	IChO	1968	http://olympiads.win.tue.nl/icho/index.html
البيولوجيا	IBO	1989	http://olympiads.win.tue.nl/ibo/index.html
المعلوماتية	IOIs	1990	http://olympiads.win.tue.nl/ioi/index.html
علم الفلك	IAO	1996	http://olympiads.win.tue.nl/ibo/index.html





الحساب على الجذور

تمهيد

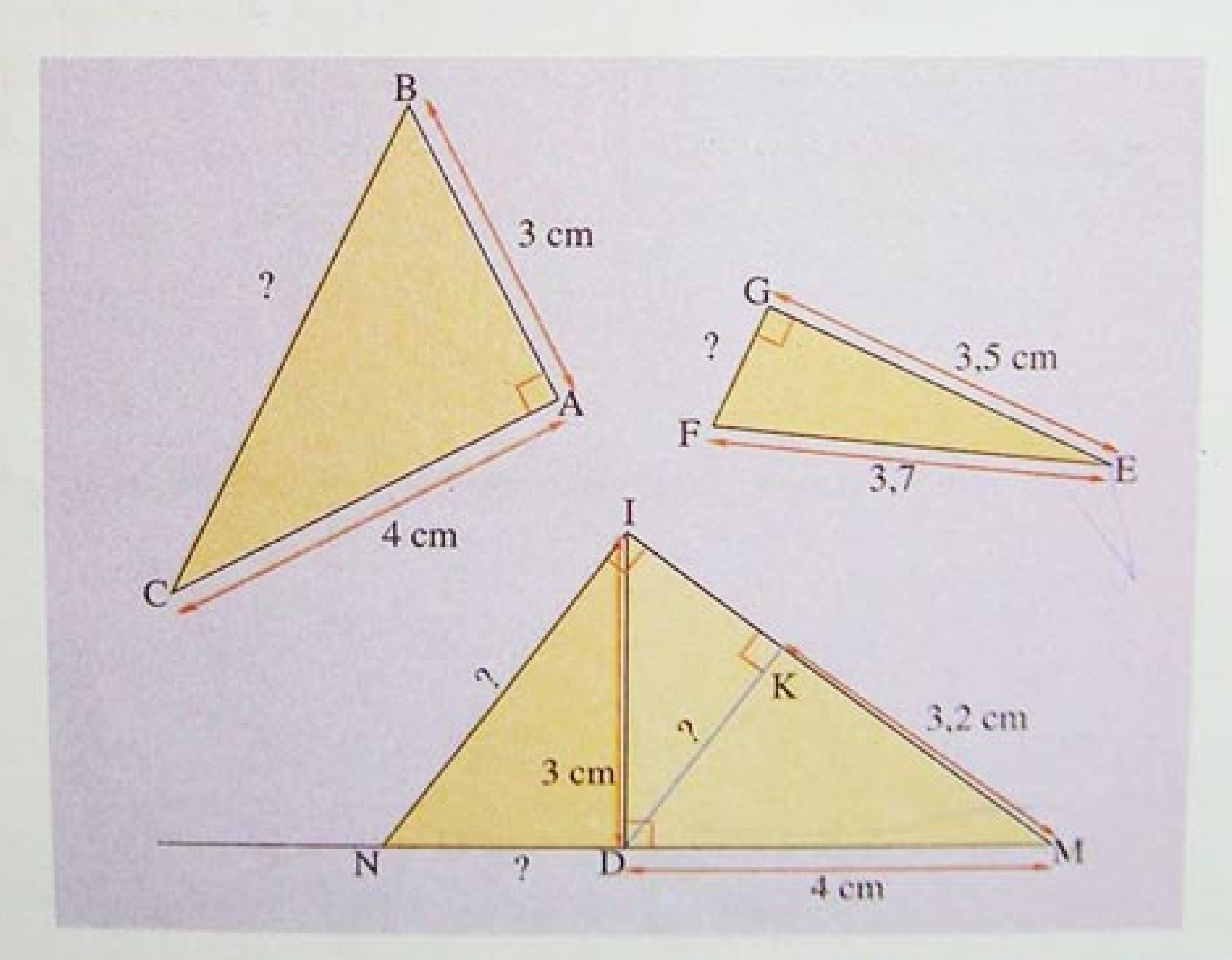
1 x عدد ناطق. أكمل الجدول التالي :

x	0	1	$\frac{7}{4}$	$-0,05$	-4	$+4$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x^2			$\frac{49}{16}$					

2 اوجد العدد الناطق الموجب x في كل حالة :

أ) $2x = 17$ ؛ ب) $x^2 = 289$ ؛ جـ) $x = 17^2$.

3 اوجد الأطوال المطلوبة في كل شكل من الأشكال الآتية :



4 بسّط العبارات الجبرية الآتية :

$A = 2x - (3x - 2)$.

$B = (2x - 5)(-5x + 2)$.

$C = 4x - x(x + 3)$.

الجذر التربيعي لعدد موجب

1

1 انقل وأكمل ما يلي :

$(+6)^2 = \ldots\ldots\ldots$ ؛ $(-6)^2 = \ldots\ldots\ldots$.

$0{,}49 = (\ldots\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots\ldots)^2$.

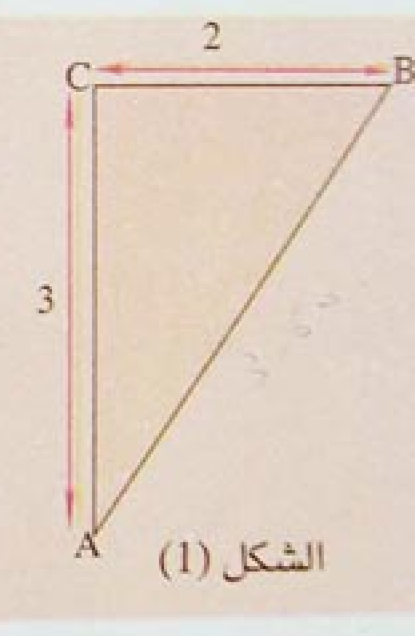
$\frac{4}{25} = (\ldots\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots\ldots)^2$.

2 اوجد إن أمكن العدد الذي مربعه : 1– ؛ 0 ؛ 25.

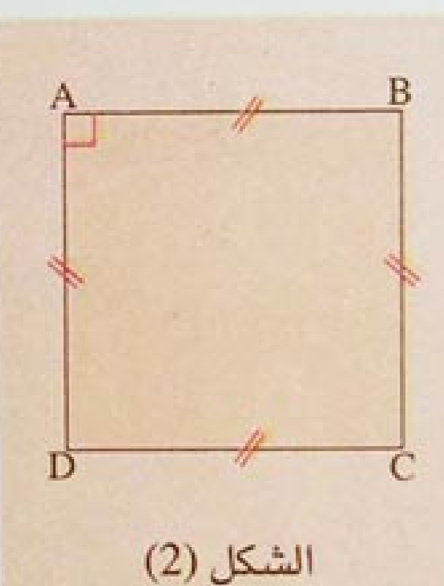
3 احسب العدد السالب v بحيث :

$v^2 = \frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-20} \times 8 \times 10^{-9}}{0{,}9 \times 10^{-27}}$.

4 وحدة الطول هي «السنتيمتر»



الشكل (1)



الشكل (2)

ملاحظة

الشكلان (1) و (2) غير مرسومين أطوالهما الحقيقية.

اوجد الطول AB في كل من الشكلين علماً أن مساحة الشكل (2) تساوي $5cm^2$.

2

1 عيّن الأعداد الناطقة في قائمة الأعداد التالية (علّل إجابتك) :

$\sqrt{15}$ ؛ $\sqrt{45}$ ؛ $\sqrt{64}$ ؛ $\sqrt{49}$ ؛ $\sqrt{\frac{27}{16}}$ ؛ $\sqrt{\frac{20}{45}}$ ؛ $\sqrt{144}$.

2 عيّن الأعداد غير الناطقة من بين الأعداد التالية :

$\sqrt{\frac{4}{9}}$ ؛ $\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{12}$ ؛ $\sqrt{20}$ ؛ $\sqrt{0{,}16}$ ؛ $\sqrt{100}$.

أنشطة

حصر عدد غير ناطق - القيمة المقربة

1 أكمل الجدول الآتي :

مربعه										الجذر التربيعي
الجذر التربيعي			6	5	4			1	0	
مربعه	64	49				9	4			

2 احصر كلا من الأعداد الآتية بين عددين طبيعيين متتاليين :

$\sqrt{7}$ ؛ $\sqrt{63}$ ؛ $\sqrt{13}$ ؛ $\sqrt{50}$ ؛ $\sqrt{26}$ ؛ $\sqrt{130}$ ؛ $\sqrt{172}$ ؛ $\sqrt{290}$.

3 احسب القيمة المقربة إلى 0,01 بالنقصان :

$A = 5\sqrt{28} + 3\sqrt{175} - \sqrt{252}$ ؛ $B = \dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$ ؛ $C = \dfrac{2}{3-\sqrt{3}}$ ؛

$D = \sqrt{84} + \sqrt{138} - \sqrt{196}$ ؛ $E = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

المعادلة من الشكل $x^2 = b$ حيث b عدد معطى

حل المعادلات ذات المجهول x التالية :

$x^2 = 1$ ؛ $x^2 = -4$ ؛ $x^2 = 169$ ؛ $x^2 = 0$ ؛ $x^2 = \dfrac{25}{81}$ ؛ $x^2 = 64$.

العمليات على الجذور التربيعية

1- جداء جذرين تربيعيين

1 قارن العددين في كل حالة :

$\sqrt{9} \times \sqrt{4}$ و $\sqrt{36}$ ؛ $\sqrt{0,04} \times \sqrt{0,25}$ و $\sqrt{0,04 \times 0,25}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{64}{81}} \times \sqrt{\dfrac{9}{121}}$ و $\sqrt{\dfrac{64 \times 9}{81 \times 121}}$.

2 a ، b عددان موجبان. لنبرهن أن $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

نضع $x = \sqrt{a}$ ، $y = \sqrt{b}$ فيكون $x^2 = ...$ ، $y^2 = ...$ ؛

أي $x^2 \times y^2 = ...$ ومنه $(x \times y)^2 = ...$ إذن $x \times y = ...$

وبالتالي : .... = ... $\times \sqrt{a}$.

احسب الجداءات التالية :

$\sqrt{5} \times \sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$ ؛ $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ ؛ $\sqrt{0,5} \times \sqrt{0,02}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{9}}$.

2- كتابة عدد غير ناطق على شكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان موجبان



لاحظ المثال التالي :

1
$$\sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

2
$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

اعتمادا على هذا المثال، اكتب كلا من الأعداد الآتية على شكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر عدد ممكن :

$\sqrt{32}$ ؛ $\sqrt{48}$ ؛ $\sqrt{72}$ ؛ $\sqrt{50}$ ؛ $\sqrt{8}$ ؛ $\sqrt{63}$ ؛ $\sqrt{175}$ ؛ $\sqrt{40}$.

$\sqrt{8} \times \sqrt{18}$ ؛ $2\sqrt{3} \times 5\sqrt{2}$ ؛ $7\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$ ؛ $2\sqrt{3} \times \sqrt{6}$.

2 اكتب إن أمكن الأعداد التالية على شكل $\sqrt{a}$ حيث a عدد موجب :

$2\sqrt{3}$ ؛ $5\sqrt{2}$ ؛ $7\sqrt{5}$ ؛ 6 ؛ $2\sqrt{5}$ ؛ $3\sqrt{2}$ ؛ $2\sqrt{2}$ ؛ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

مربع طول ضلعه b (cm). اكتب بدلالة b طول قطر هذا المربع.





3- حاصل قسمة جذرين تربيعيين



قارن العددين في كل حالة :

$\sqrt{\frac{9}{4}}$ و $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$ ؛ $\sqrt{\frac{49}{36}}$ و $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}}$.



a و b عددان موجبان حيث $b \neq 0$.

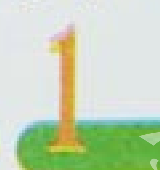
بين أن $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.



بسط الأعداد الآتية أن أمكن :

$\sqrt{\frac{25}{12}}$ ؛ $\sqrt{\frac{32}{49}}$ ؛ $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ ؛ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}$ ؛ $\sqrt{\frac{8}{3}}$ ؛ $\sqrt{6}$.

4- الجذر التربيعي لمجموع ولفرق



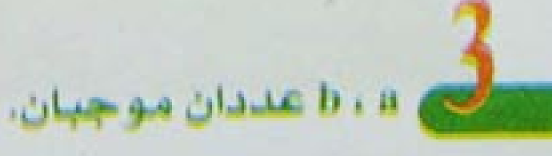
قارن بين :

1	$\sqrt{9}+\sqrt{4}$ و $\sqrt{9+4}$	ثم	$\sqrt{4^2+3^2}$ و $4+3$
2	$\sqrt{64}-\sqrt{36}$ و $\sqrt{64-36}$	ثم	$\sqrt{15^2-12^2}$ و $15-12$



بسط العبارات التالية :

$A = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ ؛ $B = 5\sqrt{3} - 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - \sqrt{3}$ ؛ $C = 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$.



a ، b عددان موجبان.

اكتب العبارات التالية على شكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر عدد ممكن :

$A = \sqrt{18} - \sqrt{50}$ ؛ $B = \sqrt{54} - 2\sqrt{24}$ ؛ $C = 2\sqrt{125} + \sqrt{45} - 3\sqrt{20}$.



5- الحساب على الجذور التربيعية



انشر، ثم بسط العبارات الآتية :

$3\sqrt{7}(2\sqrt{7}-5)$ ؛ $(2\sqrt{3}-9)(4+7\sqrt{3})$ ؛ $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}+\sqrt{2})$ ؛ $(\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{3})(\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3})$.

2

نقبل أن إذا كانت نسبة $\frac{a}{b}$ معلومة و K عددا حقيقيا غير معدوم، فإنّ $\frac{a}{b}=\frac{Ka}{Kb}$.

اكتب العبارات التالية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق :

$\frac{5}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ؛ $\sqrt{\frac{9}{2}}$ ؛ $\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{6}}$.



معـــارف

1 الجذر التربيعي لعدد موجب

مربع عدد هو دائما عدد موجب.
من أجل كل عدد موجب a، يوجد عددان متعاكسان مربع كل منهما يساوي a.

مثال : 1) $4 = (-2)^2$ و $4 = (+2)^2$.
2) 64 مربع للعددين (8−) و (8+).
3) 0,09 مربع للعددين (0,3−) و (0,3+).

تعريف
من أجل كل عدد موجب a، يوجد عدد موجب مربعه a نرمز له $\sqrt{a}$ ، ونكتب $(\sqrt{a})^2 = a$.

$\sqrt{a}$ يقرأ «الجذر التربيعي لـ a» أو «جذر a».

مثال : $\sqrt{64} = 8$ ؛ $\sqrt{0,09} = 0,3$.

ملاحظة
لا يوجد عدد مربعه عدد سالب.

مثال : لا يوجد عدد مربعه 1− .

$\sqrt{5}$ هو العدد الموجب الذي مربعه 5، ونكتب $(\sqrt{5})^2 = 5$.
$\sqrt{5}$ ليس عددا طبيعيا، ليس عددا عشرياً ،وليس عددا ناطقا.
يسمى $\sqrt{5}$ عدد غير ناطق قيمته التقريبية تعطى مثلا بالآلة الحاسبة.

كل من الأعداد $\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{7}$ ؛ $\sqrt{20}$ ؛ $\sqrt{12}$ ؛ $\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ هو عدد غير ناطق.

a عدد ناطق موجب.
إذا كان a مربعاً لعدد ناطق، فإن $\sqrt{a}$ عدد ناطق.
إذا كان a ليس مربعا لعدد ناطق، فإن $\sqrt{a}$ عدد غير ناطق.

مثال : • $\frac{100}{81}$ عدد ناطق.

• $\frac{100}{81}$ مربع العددين $(\frac{10}{9})$ و $(-\frac{10}{9})$. ونكتب $\sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9}$. إذن $\sqrt{\frac{100}{81}}$ عدد ناطق.

• 8 عدد ناطق.
8 ليس مربعاً لأي عدد ناطق، إذن $\sqrt{8}$ عدد غير ناطق.



معـــارف

نقبل أن : العدد الحقيقي هو عدد إمّا ناطق وإمّا غير ناطق.

كل من الأعداد 0 ؛ 2 ؛ $7,9$ ؛ -5 ؛ $\frac{6}{8}$ ؛ $-\frac{7}{5}$ ؛ $\sqrt{2}$ ؛ -3 ؛ π ؛ $-\sqrt{7}$ ؛ 45×10^{-7} ؛ $\frac{1}{3}$ هو عدد حقيقي.

اللمسة $\sqrt{}$ على الآلة الحاسبة تعين لنا القيمة **المضبوطة** أو القيمة **التقريبية** لجذر تربيعي.

مثال :

- $\sqrt{15} \approx 3,872$ ؛ • $\sqrt{361} = 19$ ؛
- $\sqrt{2} \approx 1,414$ ؛ • $\sqrt{196} = 14$.

2 المعادلة $x^2 = b$

b عدد حقيقي.
إذا كان $b > 0$، فإن للمعادلة $x^2 = b$ حلين مختلفين هما $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$.
إذا كان $b = 0$، فإن للمعادلة $x^2 = b$ حلاً واحداً فقط هو العدد 0.
إذا كان $b < 0$، فإن المعادلة $x^2 = b$ ليس لها حلاً حقيقيًا لأن $x^2 \geq 0$.

أمثلة : لنحل المعادلات التالية :

(1) $x^2 = 25$ ؛ (2) $x^2 = -5$ ؛ (3) $x^2 = 0$.

الحلّ

(1) $x^2 = 25$	(2) $x^2 = -5$	(3) $x^2 = 0$
ومنه : $x = \sqrt{25} = 5$ أو $x = -\sqrt{25} = -5$. للمعادلة حلان مختلفان هما 5- و 5+.	المعادلة ليس لها حل لأن x^2 موجب و(5-) سالب تمامًا.	للمعادلة حل واحد فقط، ونكتب $x = 0$.

3 العمليات على الجذور التربيعية

خاصة

a و b عددان موجبان.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ و $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

أمثلة :

1) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$ ؛ $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$.

2) $\sqrt{\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 2} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ ؛ $7\sqrt{5} = \sqrt{49 \times 5} = \sqrt{245}$ ؛ $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$.

3) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 2 \times 3 \times \sqrt{3}^2 = 6 \times 3 = 18$ ؛

$\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}^2 = 4 \times 3 = 12$ ؛

$5 \times 2\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.

خاصة

a و b عددان موجبان حيث $b \neq 0$.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

أمثلة :

• $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$ ؛ $\sqrt{\frac{50}{25}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{25}} = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$.

ملاحظة

a و b عددان موجبان.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ حيث $b < a$.

أمثلة :

• $\sqrt{64} + \sqrt{36} \neq \sqrt{64+36}$

لأن $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$

و

$\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$.

ونحن نعلم أنّ $10 \neq 14$.

• $\sqrt{225} - \sqrt{144} \neq \sqrt{225 - 114}$

لأن $\sqrt{225} - \sqrt{144} = 15 - 12 = 3$

و

$\sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$

ونحن نعلم أنّ $3 \neq 9$.

طرائق وتمارين محلولة

تبسيط عدد غير ناطق

طريقة تبسيط عدد غير ناطق هو كتابته على شكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد موجب و b أصغر عدد طبيعي ممكن.

لنبسط العدد $\sqrt{50}$.

1) نبحث عن أكبر مربع يقسم 50، أي $50 = 25 \times 2$.

2) نطبق خاصية جداء جذرين تربيعيين، أي $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$ ؛ $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$.

3) نطبق تعريف الجذر التربيعي، أي $\sqrt{25} = 5$.

نكتب $\sqrt{50} = 5 \times \sqrt{2}$. **إذن** $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

لنتحقق أن $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

نكتب $4\sqrt{5}$ على شكل $\sqrt{a}$ حيث a عدد موجب.

1) نطبق تعريف الجذر التربيعي، أي $4 = \sqrt{16}$.

2) نطبق خاصية جداء جذرين تربيعيين، أي:

$$4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5}$$
$$= \sqrt{16 \times 5}$$
$$= \sqrt{80}$$

تبسيط عبارة تتضمن جذرا تربيعيا

طريقة 1 تطبيق الخاصة التوزيعية.

تمرين بسط العبارة A حيث : $A = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$

الحل نطبق الخاصة التوزيعية : $A = (3 + 2 - 7) \times \sqrt{5}$

$$= -2 \times \sqrt{5}$$
$$= -2\sqrt{5}$$

طريقة 2 تبسيط الجذور، أي كتابتها على شكل $a\sqrt{b}$.

تمرين بسط العبارتين A و B التاليتين :

$A = \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{50}$ ؛ $B = 3\sqrt{27} + 5\sqrt{8}$.



الحل نكتب كلا من حدود العبارتين على الشكل $a\sqrt{b}$.

تبسيط العبارة A :

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.

فتصبح العبارة : $A = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

$= (2 - 3 + 5)\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

تبسيط العبارة B : $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$.

فتصبح العبارة : $B = 3(3\sqrt{3}) + 5(2\sqrt{2})$

$= 9\sqrt{3} + 10\sqrt{2}$

الكسر الذي مقامه عدد غير ناطق $\frac{a}{\sqrt{b}}$

طريقة 1 لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عدداً ناطقاً نضرب كلا من a و $\sqrt{b}$ في العدد $\sqrt{b}$ (b عدد ناطق).

تمرين اكتب $\frac{2}{\sqrt{3}}$ على شكل نسبة مقامها عددٌ ناطقٌ.

الحل نضرب كلا من بسط ومقام النسبة في العدد $\sqrt{3}$ ، أي :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} .$$

نطبق خاصة جداء جذرين تربيعيين فيصبح :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} .$$

تمارين للتطبيق المباشر

الجذر التربيعي

1 أكمل الفراغ باستعمال إحدى الجملتين :

- هو مربع للعدد .
- هو الجذر التربيعي للعدد .

49 .... 7 ؛ 0,01 .... 0,0001 ؛

3 .... 9 ؛ $\frac{64}{9}$ .... $\frac{8}{3}$ ؛

1 .... 1 ؛ 1,21 .... 1,1 ؛

0 .... 0 ؛ 0,04 .... 0,2 ؛

0,81 .... 0,9 ؛ $\frac{2}{3}$ .... $\frac{4}{9}$.

2 احسب ذهنيا :

أ) $\sqrt{\frac{16}{36}}$ ؛ $-\sqrt{16}$ ؛ $\sqrt{10^6}$ ؛ $\sqrt{64}$.

ب) $\sqrt{9 \times 10^{-4}}$ ؛ $\sqrt{6400}$ ؛ $\sqrt{0,01}$.

3 عيّن الكتابات الخاطئة من بين الكتابات الآتية (برّر إجابتك) :

$\sqrt{0}$ ؛ $-\sqrt{1}$ ؛ $\sqrt{-(36)}$ ؛ $\sqrt{1,44}$ ؛ $\sqrt{\pi - 4}$ ؛ $\sqrt{(-2)^3}$ ؛

$\sqrt{-9^2}$ ؛ $\sqrt{(-6)^2}$.

4 ضع الأعداد المناسبة في الفراغات :

- 6 هو الجذر التربيعي للعدد ....
- 0,49 هو مربع للعدد ....
- 144 هو مربع للعدد ....
- 1,3 هو الجذر التربيعي للعدد ....
- .... هو الجذر التربيعي للعدد 81.
- 10 هو مربع للعدد ....
- .... هو الجذر التربيعي للعدد 100.

5 من بين الأعداد الآتية، ما هي الأعداد التي جذرها التربيعي ليس عددًا طبيعيًا ؟

400 ؛ 500 ؛ 81 ؛ $\frac{49}{25}$ ؛ π ؛ 2^3 ؛ 25.

6 ضع الأعداد التالية في الجدول :

-7 ؛ $-\sqrt{10}$ ؛ $\frac{18}{3}$ ؛ $\sqrt{5}$ ؛ $\frac{22}{7}$ ؛ 7 ؛ -3 ؛ $\frac{15}{9}$ ؛ 12.

أعداد طبيعية	أعداد نسبية	أعداد ناطقة	أعداد حقيقية

القيمة المقربة للجذر التربيعي

7 مربع مساحته $15\ cm^2$.

عين القيمة المدوّرة إلى 0,01 cm لطول ضلعه.

8 أعط القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالنقصان لكل من الأعداد التالية :

- $\sqrt{39}$ ؛ $\sqrt{17,2}$ ؛ $\sqrt{6,3}$ ؛ $\sqrt{49}$ ؛ $\sqrt{7}$ ؛ $\sqrt{5}$.
- $\sqrt{31} + 15$ ؛ $\sqrt{31 + 15}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ؛ $2\sqrt{5} - 2$.

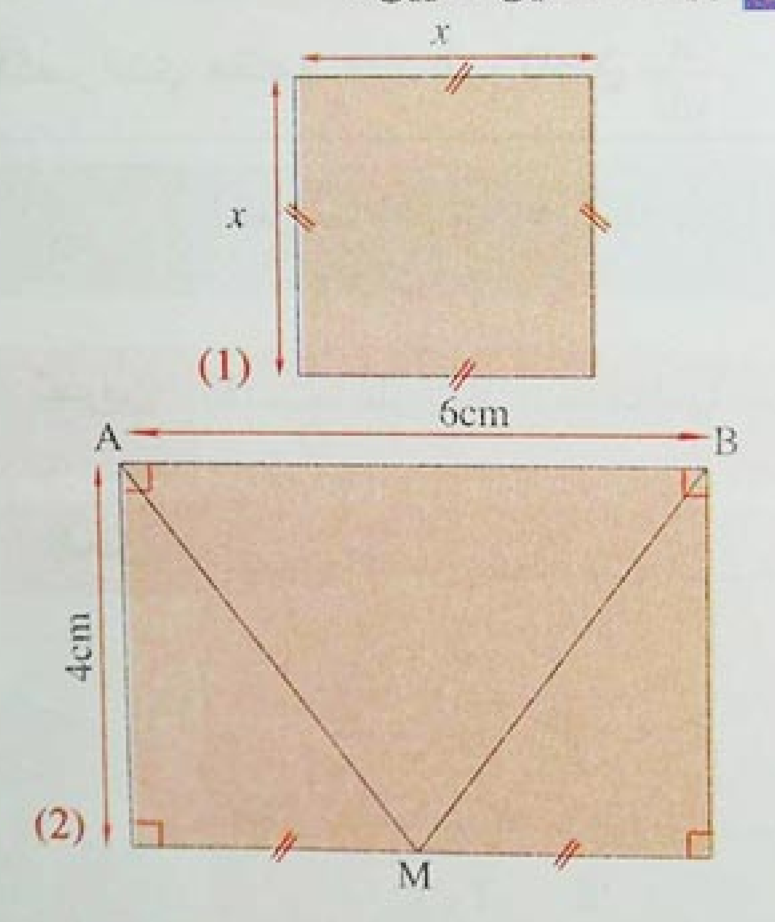
المعادلة من الشكل $x^2 = b$ حيث b عدد حقيقي

9 حل المعادلات التالية ذات المجهول x :

$x^2 = 13$ ؛ $7x^2 = 343$ ؛ $x^2 = 16$ ؛

$x^2 = 0$ ؛ $x^2 - \frac{121}{49} = 0$ ؛ $-5x^2 = 20$.

10 إليك الشكلين الآتيين :



اوجد القيمة المضبوطة لـ x حيث مساحة الشكل (1) تساوي مساحة المثلث ABM في الشكل (2).

العمليات على الجذور التربيعية

11 احسب ذهنيا :

$\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{32} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$ ؛ $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ ؛

$\sqrt{\frac{1}{27}} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$ ؛ $\sqrt{1,8} \times \sqrt{0,2}$ ؛ $\sqrt{50} \times \sqrt{2}$.

تمارين للتطبيق المباشر

12 علما أن : $\sqrt{361} = 19$ ، أعط القيمة المضبوطة للأعداد التالية :

$\sqrt{3,61}$ ؛ $\sqrt{36100}$ ؛ $\sqrt{0,0361}$.

13 احسب الجداءات التالية :

$\sqrt{8} \times \sqrt{18}$ ؛ $\sqrt{63} \times \sqrt{7}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{9}}$ ؛

$\sqrt{\frac{11}{3}} \times \sqrt{\frac{6}{11}} \times \sqrt{2}$ ؛ $6\sqrt{72} \times \sqrt{50}$.

14 بسط ما يلي :

$5\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$ ؛ $\sqrt{\frac{12}{25}}$ ؛

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \times \sqrt{\frac{10}{7}}$ ؛ $\sqrt{\frac{8}{9}} \times \sqrt{\frac{3}{4}}$ ؛ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ؛

$-\frac{1}{9} \times \sqrt{\frac{81}{64}}$ ؛ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{2\sqrt{5}}{3}$ ؛ $\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{6} \times \sqrt{10}}$.

15 احسب ما يلي :

$-(\sqrt{7})^2$ ؛ $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2$ ؛ $3(\sqrt{2})^2$ ؛ $\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{6}}$.

$\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{6^2}}$ ؛ $(-2\sqrt{5})^2$ ؛ $-2(\sqrt{5})^2$ ؛ $3(\sqrt{6})^2$ ؛ $\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2}$.

16 اكتب الأعداد الآتية على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b أصغر عدد ممكن :

$\sqrt{20}$ ؛ $\sqrt{18}$ ؛ $\sqrt{63}$ ؛ $\sqrt{175}$ ؛

$\sqrt{3^2 \times 10}$ ؛ $\sqrt{5^2 \times 7 \times 2^2}$ ؛ $\frac{2\sqrt{27}}{3}$.

17 a ؛ b عددان حقيقيان موجبان. بسط ما يلي:

$\sqrt{4a^2b}$ ؛ $\sqrt{2a^2b^2}$ ؛ $\sqrt{5^2(a+b)^2}$ ؛ $\sqrt{36ab^2}$.

الحسابات على الجذور التربيعية

18 بسط العبارات التالية :

$a = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ ؛

$b = -6\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$ ؛

$c = 9\sqrt{2} - 14\sqrt{7} - 4\sqrt{2} + 21\sqrt{7}$.

19 السؤال السابق نفسه :

$a = \sqrt{54} - \sqrt{6} + \sqrt{24}$ ؛

$b = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 3\sqrt{5}$ ؛

$c = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{75}}{6} + \frac{\sqrt{8}}{15}$ ؛

$d = 5\sqrt{12} - 4\sqrt{12} - \sqrt{12}$ ؛

$e = 6\sqrt{\frac{72}{9}} + 15\sqrt{\frac{18}{25}} - 14\sqrt{\frac{8}{49}}$.

20 احسب محيط الشكل الآتي :

$5\sqrt{3}$ cm

$\sqrt{12}$cm

$\sqrt{27}$cm

21 احسب، ثم اكتب الناتج على الشكل $a+b\sqrt{c}$، حيث a ؛ b ؛ c أعداد طبيعية و c أصغر عدد ممكن :

$\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$ ؛ $(3\sqrt{5} + 4)$ ؛

$-5\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 2)$ ؛ $4\sqrt{7} - (6\sqrt{7} + 2)$ ؛

$(6\sqrt{3} - 2) - \sqrt{3}(2 + 6\sqrt{3})$ ؛

$(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$ ؛

$(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ ؛

$(\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{32})(\sqrt{63} - 2\sqrt{8})$.

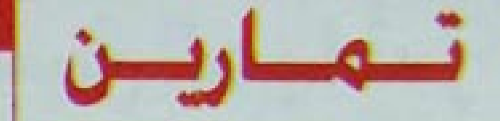
22 اكتب الأعداد التالية على شكل كسر مقامه عدد ناطق :

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$ ؛ $\sqrt{\frac{25}{12}}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ؛ $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{6}{\sqrt{98}}$ ؛

$\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

23 اكتب الأعداد التالية على الشكل $\sqrt{a}$ حيث a عدد طبيعي :

$4\sqrt{4,5}$ ؛ $\frac{3\sqrt{108}}{6}$ ؛ $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ؛ $5\sqrt{3}$ ؛ $5\sqrt{3}$.



1 اوجد عدّة أعداد طبيعية n يكون من أجلها العدد $\sqrt{3n+1}$ طبيعيا.

2 بسط الأعداد التالية :

أ) $\sqrt{96}$ ؛ $\sqrt{28}$ ؛ $\sqrt{54}$ ؛ $\sqrt{60}$ ؛ $\sqrt{48}$.

ب) $\sqrt{1800}$ ؛ $\sqrt{700}$ ؛ $\sqrt{4300}$ ؛ $\sqrt{1000}$.

3 نفس السؤال :

$\sqrt{\frac{45}{49}}$ ؛ $\sqrt{\frac{28}{25}}$ ؛ $\sqrt{\frac{72}{16}}$ ؛ $\sqrt{\frac{121}{81}}$ ؛ $\sqrt{\frac{5}{49}}$ ؛ $\sqrt{\frac{7}{25}}$ ؛ $\sqrt{\frac{36}{16}}$.

4 اكتب على شكل $a\sqrt{b}$ العبارات التالية:

$A = \sqrt{20} + 2\sqrt{5} - \sqrt{45}$ ؛

$B = 4\sqrt{2} - \sqrt{8} - \sqrt{18}$ ؛

$C = \sqrt{28} - \frac{1}{2}\sqrt{63} - \frac{3}{4}\sqrt{7}$ ؛

$D = \sqrt{\frac{16}{28}} - \sqrt{\frac{112}{49}} - \sqrt{\frac{25}{7}}$ ؛

$E = (5\sqrt{12} + 8\sqrt{27} + \sqrt{75}) - (2\sqrt{48} + \sqrt{147})$ ؛

$F = \sqrt{\frac{7}{3}} + 3\sqrt{\frac{28}{27}} - 4\sqrt{\frac{63}{75}}$.

5 A ؛ B عددان حقيقيان حيث :

$A = \sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$ ؛

$B = \sqrt{162} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$ ؛

1) بسط كل من A و B.

2) عين القيمة المضبوطة لكل عدد من الأعداد التالية :

$\frac{2AB}{A+B}$ ؛ $\sqrt{A \times B}$ ؛ $\frac{B+A}{2}$.

6 احسب الجداءات التالية :

أ) $\sqrt{6}\times\sqrt{30}$ ؛ $\sqrt{72}\times\sqrt{8}$ ؛ $\sqrt{6}\times\sqrt{12}$.

ب) $\sqrt{10}\times\sqrt{50}$ ؛ $\sqrt{15}\times\sqrt{75}$ ؛ $\sqrt{32}\times\sqrt{96}$ ؛ $\sqrt{5}\times\sqrt{35}$.

جـ) $\sqrt{20}\times\sqrt{\frac{1}{2}}$ ؛ $3\sqrt{12}\times\sqrt{18}\times\sqrt{24}$.

د) $\sqrt{\frac{3}{8}}\times\sqrt{\frac{6}{50}}$ ؛ $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{45}$.

هـ) $\sqrt{1,4}\times\sqrt{16,9}\times\sqrt{0,7}$ ؛ $\sqrt{0,4}\times\sqrt{1,44}\times\sqrt{0,25}$.

7 بسّط ما يلي :

$a = 5\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{6}} - 2\sqrt{54}$.

$b = \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{25}{12}}$.

$c = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{10} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$.

$d = (\sqrt{27} - \sqrt{3})(\sqrt{27} + \sqrt{3})$.

$e = 5\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{50})$.

$f = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \times \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

$g = (\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32})$.

8 انشر، ثم بسّط الجداءات التالية :

$6\sqrt{7}(11\sqrt{7} - 7)$ ؛ $\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 1)$ ؛

$(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$ ؛ $(3\sqrt{6} - 1)(3\sqrt{6} - 2)$ ؛

$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} \div 1)$ ؛ $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

9 اكتب الأعداد التالية بدون استعمال الرمز $\sqrt{\ }$:

$\sqrt{10^{-6}}$ ؛ $\sqrt{7^{-4}}$ ؛ $\sqrt{10^{-8}}$ ؛ $\sqrt{5^{8}}$ ؛ $\sqrt{3^{6}}$ ؛ $\sqrt{2^{2}}$.

10 احسب ما يلي :

$\sqrt{9 \times 10^{-6}}$ ؛ $\sqrt{16 \times 10^{-4}}$ ؛ $\sqrt{142 \times 10^{-2}}$ ؛

$\sqrt{3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$ ؛ $\sqrt{[(-5) \times 3]^2}$ ؛ $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$.

11 من بين الأجابات المقترحة في الجدول الآتي اوجد الإجابات الصحيحة في كل حالة :

العبارة	إجابة (1)	إجابة (2)	إجابة (3)
$a = \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$
$b = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{3,5}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{\sqrt{14}}{2}$
$c = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$	1	$\frac{5}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$

12 مجموع مربع العدد الحقيقي x و العدد -5 هو العدد 3.
ما هي قيم x الممكنة ؟

تمارين

13 A و B عبارتان جبريتان حيث :

$$A = (2x + 1)(x - 4)$$

$$B = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

احسب قيمة العبارة A من أجل $x = (\sqrt{2} - 1)$.

احسب قيمة العبارة B من أجل $x = -\sqrt{3}$.

14 سرعة الصوت تتغير في الهواء حسب درجة الحرارة. القانون الذي يعبر عن هذه الظاهرة الفيزيائية هو $V = 20\sqrt{273 + T}$

V سرعة الصوت وحدتها m/s.

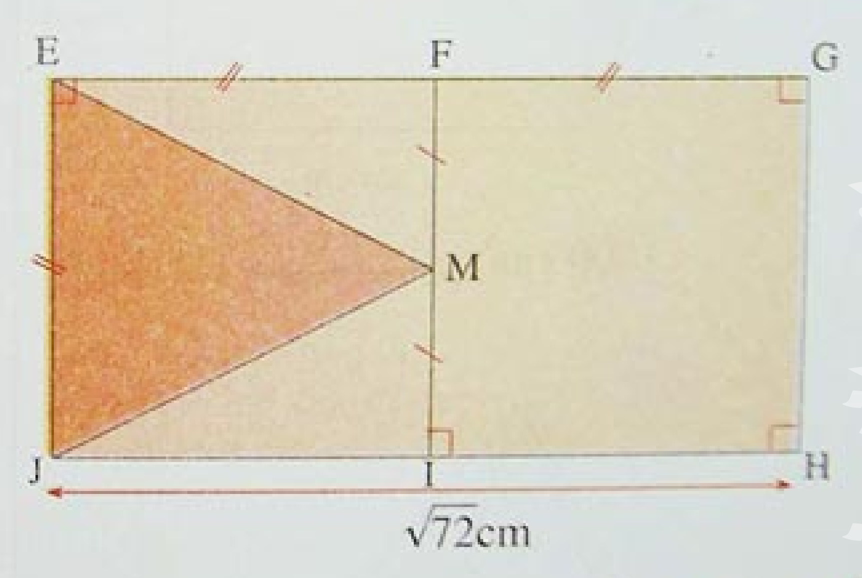
T درجة الحرارة بدرجة سلسيوس (°T).

احسب تدويراً للقيمة المقربة لسرعة الصوت في الحالات التالية :

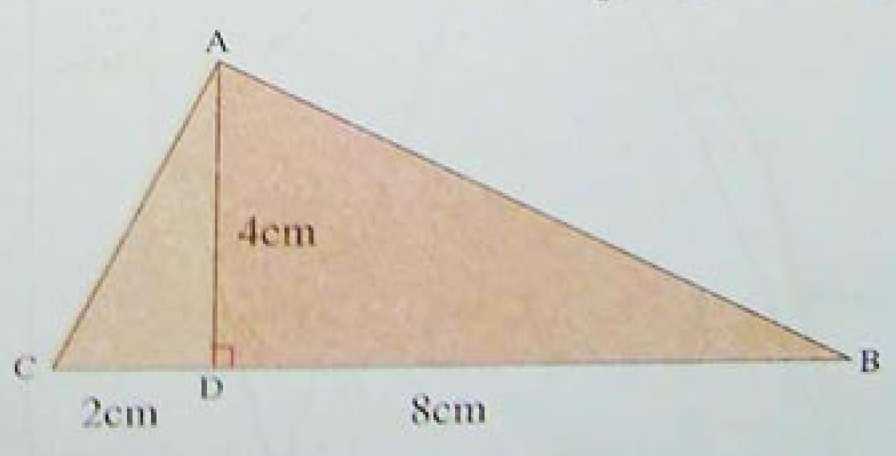
$T = 0°$ ؛ $T = 16°$ ؛ $T = 25°$ ؛ $T = -17°$.

15 1) احسب محيط المستطيل EGHJ.

2) احسب مساحة المثلث EMJ.



16 إليك الشكل الآتي :



بين أن المثلث ABC قائم في A.

احسب مساحة هذا المثلث بطريقتين مختلفتين.

17 • بدون إستعمال الآلة الحاسبة، أعط القيمة المقربة إلى الوحدة بالنقصان للعددين $\sqrt{103}$ ؛ $\sqrt{37}$.

• باستعمال الآلة الحاسبة، أعط تدويراً إلى 10^{-2} للقيمة المقربة للأعداد :

$\frac{26}{2 + \sqrt{5}}$ ؛ $\sqrt{5} + 4$ ؛ $\sqrt{40}$ ؛ $\sqrt{5 + 4}$.

18 قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $1320\ m^2$.

1) احسب بعدي هذه القطعة بتقريب $10^{-2}m$ بالنقصان إذا علمت أن طولها يساوي ضعف عرضها.

2) أعط تدويرا إلى $10^{-1}m$ لكلا من طول وعرض هذه الأرض.

19 حقل مستطيل الشكل مساحته $9548\ m^2$.

عرضه يساوي $\frac{4}{7}$ طوله.

احسب طول وعرض هذا المستطيل بتقريب إلى 0,1m بالنقصان.

20 احسب $\sqrt{(x-1)^2}$ في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $x = -5$ ؛ $x = 3$ ؛ $x = 0$.

2) $x < 1$ ؛ $x \geq 1$.

21 x و y عددان حقيقيان حيث :

$x = \sqrt{72}$ ؛ $y = \sqrt{98}$.

اكتب كلا من x و y على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b أصغر عدد طبيعي ممكن.

بسط : $x^2 - y^2$ ؛ $x + y$ ؛ xy.

22 A، B، C أعداد حقيقية حيث :

$A = \sqrt{18} - \sqrt{20}$ ؛ $B = \sqrt{98} - \sqrt{5}$ ؛

$C = -4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$.

1) اكتب على ابسط شكل ممكن كلا من A و B.

2) احسب الجداء $A \times B$.

3) احسب المجموع S حيث $S = A + B - C$.

4) احسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد S.

23 بسط العبارتين التاليتين :

$A = \sqrt{48} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{2}$.

$B = 3\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{9}}$.

24 a ، b عددان حقيقيان حيث :

$$a = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}} .$$

اجعل مقامي الكسرين a و b عددين ناطقين.
تحقق أن العددين a + b ، a x b عددان ناطقان.

25 x ، y عددان حقيقيان حيث :

$$x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} .$$

1) اجعل مقامي الكسرين x و y عددين ناطقين.
2) احسب العدد Z حيث $Z = x - y$، ثم أعط القيمة المقربة للعدد Z بالتقريب إلى 10^{-2} بالنقصان.

26 احسب العدد x في كل حالة :

1) $\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$; 2) $3 - \sqrt{7} = \frac{x}{\sqrt{7}}$;

3) $\frac{-3\sqrt{5}}{-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{x}$; 4) $\frac{3+\sqrt{2}}{x} = \frac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$.

27 حل المعادلات ذات المجهول x التالية :

1) $x^2 - 45 = 55$; 2) $(x+1)^2 = 4$;
3) $(x-\frac{3}{2})^2 = 2$; 4) $(2x+5)^2 = 81$;
5) $x^2 + 25 = 0$; 6) $(x-1)^2 = -3$.

28 مستطيل بعداه $(3 + 2\sqrt{3})$ و $(1 + \sqrt{5})$.
احسب مساحته، علما أن وحدة الطول هي السنتمتر.

29 ABCD مربع طول ضلعه x cm. إذا أضفنا 6cm إلى طول ضلعه نحصل على مربع مساحته $121cm^2$.
ما هو طول ضلع المربع ABCD ؟

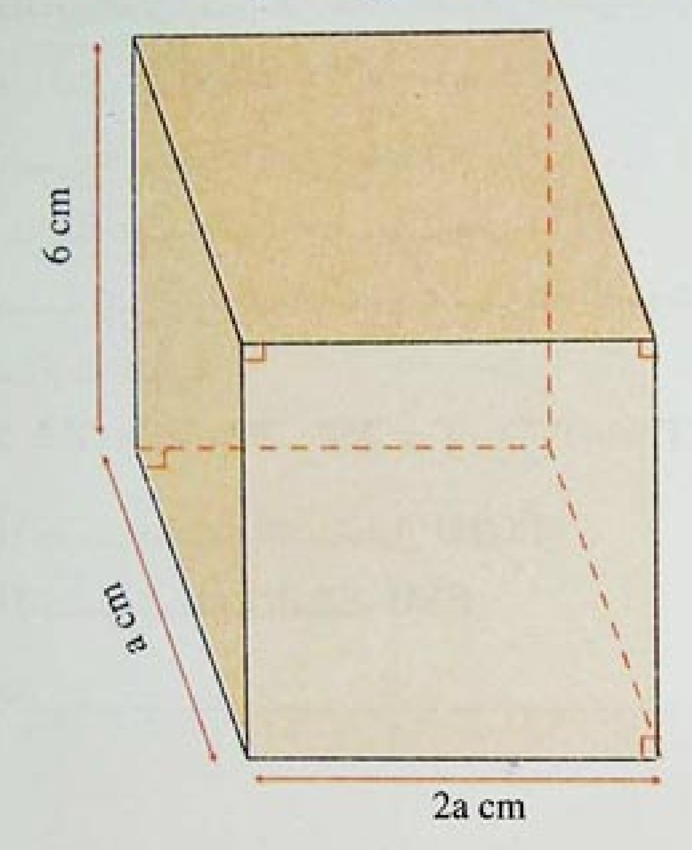
30 EFGH مربع طول ضلعه x cm . إذا أنقصنا من طول ضلعه 7cm نحصل على مربع مساحته $289cm^2$.
ما هو طول ضلع المربع EFGH (أعط القيمة بالضبط) ؟

31 حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلتين ذات المجهول x :

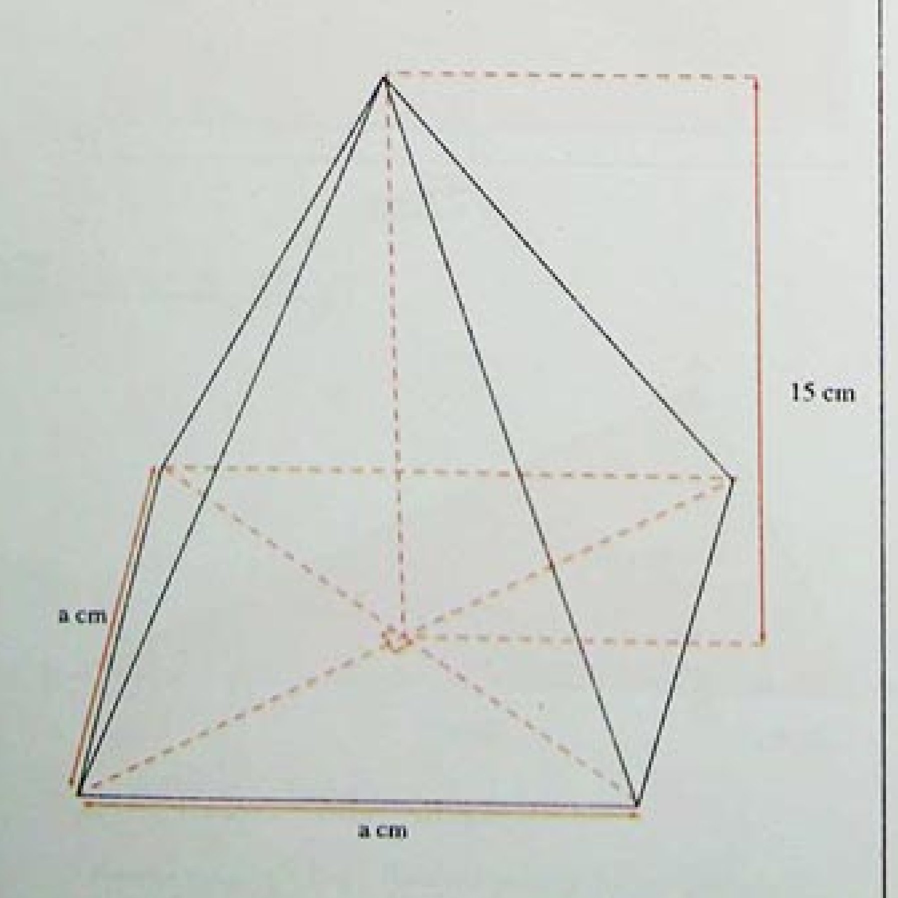
1) $x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 1 - x$;
2) $x - 1 = \sqrt{2} - x\sqrt{2}$.

32 إليك الشكلين الآتيين :

الشكل (1) حجمه يساوي $588\ cm^3$



الشكل (1) حجمه يساوي $1000\ cm^3$



اوجد a في كل حالة.

مسائل

1 حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلتين التاليتين:

1) $x + 6 = 3x\sqrt{3} + 4$ ؛ 2) $2(x + \sqrt{2}) - 3 = x\sqrt{2} + 1$.

2 ABCD مستطيل بحيث $AB = 6\sqrt{2}$ ؛ $BC = \frac{AB}{2}$.

M منتصف [AB].

عين النقطة I من [DC] بحيث $IC = \sqrt{2}$.

1) احسب الطولين IB ؛ DM (أعط القيمة المضبوطة).

2) احسب مساحة شبه المنحرف MBID.

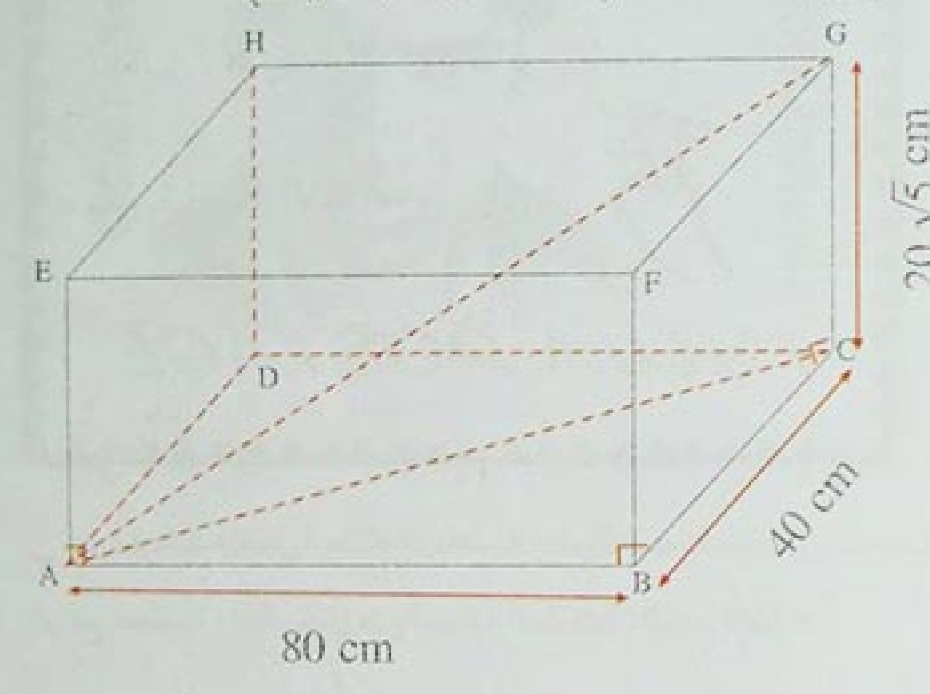
3) المستقيمان (DM) و (IB) يتقاطعان في O. احسب الطولين OI ؛ OM (أعط القيمة بالضبط).

3 سبّاك لديه أنبوب نحاسي طوله 95 cm

وصندوق شكله متوازي مستطيلات أبعاده كالتالي :

$AB = 80$ cm ؛ $BC = 40$ cm ؛ $FB = 20\sqrt{5}$ cm.

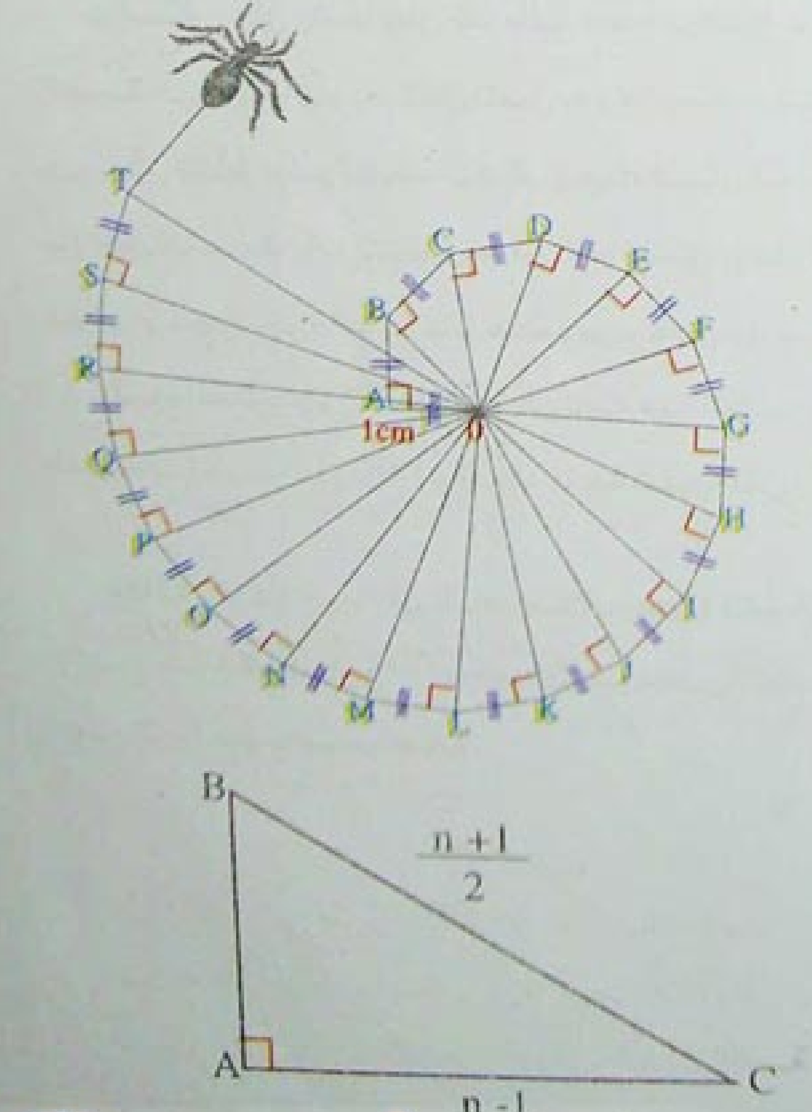
هل يستطيع هذا السبّاك وضع هذا الأنبوب في الصندوق (اشرح ذلك، علماً أن قطر وسمك الصندوق مهملين) ؟



4 عنكبوت تنسج بيتها وفق الشكل التالي :

احسب الأطوال OB ؛ OC ؛ OD ؛ OE.

- ما هو الطول OL ؟
- ارسم قطعة مستقيم طولها $\sqrt{13}$.



5 وحدة الطول هي السنتيمتر. n عدداً أكبر تماما من 1.

ABC مثلث قائم في A بحيث :

$BC = \frac{n+1}{2}$ ، $AC = \frac{n-1}{2}$

(كما هو موضح في الشكل المقابل)

1) تحقق أن $n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

2) أحسب AB من أجل $n = 2$ ، $n = 3$ ، $n = 4$ ، $n = 5$.

3) استنتج طريقة لإنشاء قطعة طولها $\sqrt{17}$.

من التاريخ

سرينيفازا رامانوجان Srinivasa Ramanujan (1887- 1920)



مولوده : ولد رامانوجان سنة 1887 في عائلة فقيرة بجنوب الهند. وقد بدأت تظهر مواهبه عندما بلغ سن السابعة. وفي عام 1902 تحصل على كتاب يضم حوالي 6000 نظرية وصيغة رياضية ويحتوي على بعض البراهين القصيرة.

عبقريته : ساعده ذلك الكتاب على إيجاد طريقة حل معادلة من الدرجة الثالثة، وحاول حل المعادلات من الدرجة الخامسة إذ لم يكن يعلم أن ذلك مستحيل بواسطة الجذور. وحصل في السنة الموالية على منحة دراسية، لكنه فقدها في السنة الموالية لأنه كان منشغلا بالرياضيات دون غيرها من المواد.

ورغم ذلك واصل أبحاثه الرياضية بطريقة عصامية دون علم بما يجري من دراسات وأبحاث في هذا الحقل عبر العالم. وظهرت في الواقع عبقرية رامانوجان في أعماله المتعلقة بالعدد اللغز π.

دراسته : كان رامانوجان قد طلب منحة دراسية غير أنه لم يفز بها رغم دعم الرياضي راماشندرا راوو Rao، أحد مؤسسي الجمعية الرياضية الهندية، الذي اتصل به رامانوجان ناشدا مساندته. يقول الأستاذ راوو حول هذه المقابلة : " دخل علي (رامانوجان) غير حالق الشعر وغير نظيف الهندام، وعيناه تُبدِيان لمعانًا. كان يتأبط دفترا والفقر باديا عليه ... فتح دفتره وأخذ في شرح البعض من اكتشافاته. وقد أدركت بسرعة أن الأمر يتعلق برجل ليس كالآخرين ... غير أن معلوماتي لم تسمح لي بمعرفة ما إذا كان كلامه صوابا أو مجرد خرافات ... سألته عما يريد فقال : أريد منحة لأتمكن من العيش ومواصلة أبحاثي ... ".

ولسوء الحظ عجز الأستاذ راوو عن تلبية هذا الطلب. والواقع أن الرياضيين الهنود حثوا أثرياء البلاد على التكفل برامانوجان ماديا فاستجاب أحدهم عام 1910 وقدمّ له منحة شهرية لكن رامانوجان لم يرض بالعيش عن طريق الإحسان.

وفاته : وبعد جهود كبيرة ومراسلات عديدة تحصل رامانوجان على منحة لمدة سنتين في ماي 1913، فدخل جامعة كمبردج وتخرج منها دكتورا عام 1916. وبعد أقل من سنتين أنتخب عضوا في أبرز هيئة علمية، وهي الجمعية الملكية اللندنية. ثم وافته المنية بعد سنتين بسبب مرض أصابه.





الرياضيات تتقدم

العــدد اللغــز π

محيط الدائرة : عندما يتعلق الأمر بحساب محيط الدائرة أو مساحتها فإنه لا مناص من استعمال عدد يرمز له الرياضيون بالرمز π. ولماذا اختاروا هذا الرمز؟ لأنه الحرف الأول من الكلمة اليونانية التي تدل على المحيط. ويبدو أن أول من استعمل هذا الرمز هو الرياضي الإنكليزي وليم جونس (1675–1749) عام 1706 . أين نجد π؟ إذا رغبت في قياس طول قطعة مستقيمة فيمكنك، بالتأكيد، الاستغناء عن π. أما إن أردت رسم طريق مستقيم على وجه الأرض فهذا يبدو صعبا بسبب استدارة كوكبنا ... وبسبب وجود π. هل من السهل حساب π؟ يكفي رسم دائرة وقياس محيطها، ثم قسمة المحيط على قطر هذه الدائرة. إن العدد الذي تجده هو π. لكن ما نجده عمليا هو، في الواقع، قيمة تقريبية لـ π إذ أنه من المستحيل أن نحسب بدقة كاملة محيط أية دائرة. ولهذا فنحن نعتبر أن العدد π يساوي (بالتقريب) 3,14 ... وإن شئت المزيد من الدقة في الحساب فبإمكانك كتابة أن π يساوي :

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288

فضول الرياضيين : ومن المهم أن نشير إلى أن خامس رقم عشري في قيمة π هو 9، وهو ما يفسّر الدقة الكبيرة التي يحصل عليها الفيزيائيون والمهندسون وعلماء الفلك حتى لو أخذوا $\pi = 3,14159$ أو $\pi = 3,1416$.

لقد تزايد فضول الرياضيين بحكم تضارب معلوماتهم فكثرت تساؤلاتهم حول العدد π : هل هو عدد ناطق أو هل هو عدد "جبري" (أي هل هو جذر لكثير حدود معاملاته أعداد صحيحة) ...

وهناك سبب آخر جعل الرياضيون ينشغلون بالعدد π : إن هذا العدد يدخل في الكثير من العلاقات الرياضية، وبالتالي فهو متواجد في الفيزياء وعلم الفلك وعلوم الهندسة وعلم النبات وعلم الاجتماع، الخ ...

وقد ركّز الرياضيون أيضا على تحديد المزيد من الأرقام العشرية لـ π ولا يزالون. والآن فاق ذلك العدد مائتي مليار رقم. والواضح أن ظهور الحاسوب قد كثّف البحث عن الخوارزميات التي تسمح بإيجاد أكبر عدد ممكن من الأرقام العشرية، واشتدّ بذلك تنافس الباحثين في هذا المجال.

لماذا هذا الانشغال : لماذا الانشغال بأمر تافه كهذا ؟ إنه اختبار لقدرة أجهزة الحاسوب، ومن ثمّ فإن العدد π يسهم بقوة – بطريقة غير مباشرة – في تقوية قدرات الحاسوب. سؤال أخير يطرحه الرياضيون ولم يجيبوا عليه بعد : هل توزيع الأرقام العشرية للعدد π يخضع لقانون معين أو أنه توزيع عشوائي ؟ ... لعل التوغل في الحسابات بفضل قوة الحاسوبات المتزايدة، سيؤدي إلى استنباط بعض القوانين التي تتحكم في هذا اللغز. ومن يدري فقد يكون هذا التوزيع غير عشوائي ابتداء من رتبة معينة. والمدهش أن الخبراء اكتشفوا في دفاتر رامانوجان علاقات تبيّن كيفية إنشاء خوارزميات دقيقة وسريعة لحساب أرقام π العشرية. ها هي قائمة الألف رقم العشري الأولى :



1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944
5923078164	0628620899	8628034825	3421170679	8214808651	3282306647
0938446095	5058223172	5359408128	4811174502	8410270193	8521105559
6446229489	5493038196	4428810975	6659334461	2847564823	3786783165
2712019091	4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436	7892590360
0113305305	4882046652	1384146951	9415116094	3305727036	5759591953
0921861173	8193261179	3105118548	0744623799	6274956735	1885752724
8912279381	8301194912	9833673362	4406566430	8602139494	6395224737
1907021798	6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872	1468440901
2249534301	4654958537	1050792279	6892589235	4201995611	2129021960
8640344181	5981362977	4771309960	5187072113	4999999837	2978049951
0597317328	1609631859	5024459455	3469083026	4252230825	3344685035
2619311881	7101000313	7838752886	5875332083	8142061717	7669147303
5982534904	2875546873	1159562863	8823537875	9375195778	1857780532
1712268066	1300192787	6611195909	2164201989		

3 الحساب الحرفي

المتطابقات الشهيرة



1 من بين العبارات الآتية، ما هي المكتوبة على شكل جداء وما هي المكتوبة على شكل مجموع. في حالة جداء اذكر العوامل، في حالة مجموع اذكر الحدود.

العبارات	مجموع أو جداء	الحدود هي أو العوامل هي
$4x + 6$		
$5(x + 3)$		
$7x - 21$		
$3x(x + 2)$		
$x^2 + 2x + 1$		
$(5x + 3)^2$		
$(2x - 1)(4x - 2)$		
$x^2 - 6x + 9$		
$(x + 2)^2 - (x + 3)(x + 2)$		

2 انشر، ثم بسط ما يلي :

$(-3x + 4)(5 - 2y)$ ؛ $8x - (3x + 2)$ ؛ $-3(2x + 4)(2x - 3)$ ؛ $-2(x + 3x - 4)$ ؛

$-\frac{2}{3}(6x - 4) - x(2x + \frac{1}{2})$ ؛ $(2x - 3)(3y + 2)$.

أنشطة

1 مربع مجموع

1 نعلم أن : $7 \times 7 = 7^2$

إذا كتبنا 7 على شكل مجموع عددين، مثلا : $4 + 3 = 7$ فتصبح الكتابة السابقة $(3 + 4)(3 + 4) = (3 + 4)^2$

نقول إننا كتبنا 7^2 على شكل مربع مجموع.

اعتمادا على المثال، اكتب إن أمكن الجداءات التالية على شكل مربع مجموع :

$(-3\sqrt{5} + 2)(3\sqrt{5} + 2)$ ؛ $(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})$ ؛ $(2x + 1)(x + 1)$ ؛ $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + 3\sqrt{5})$ ؛

$(x + 2)(2 + x)$ ؛ $(\sqrt{6} - 1)(\sqrt{6} + 1)$ ؛ $(7x + 2)(7x + 2)$.

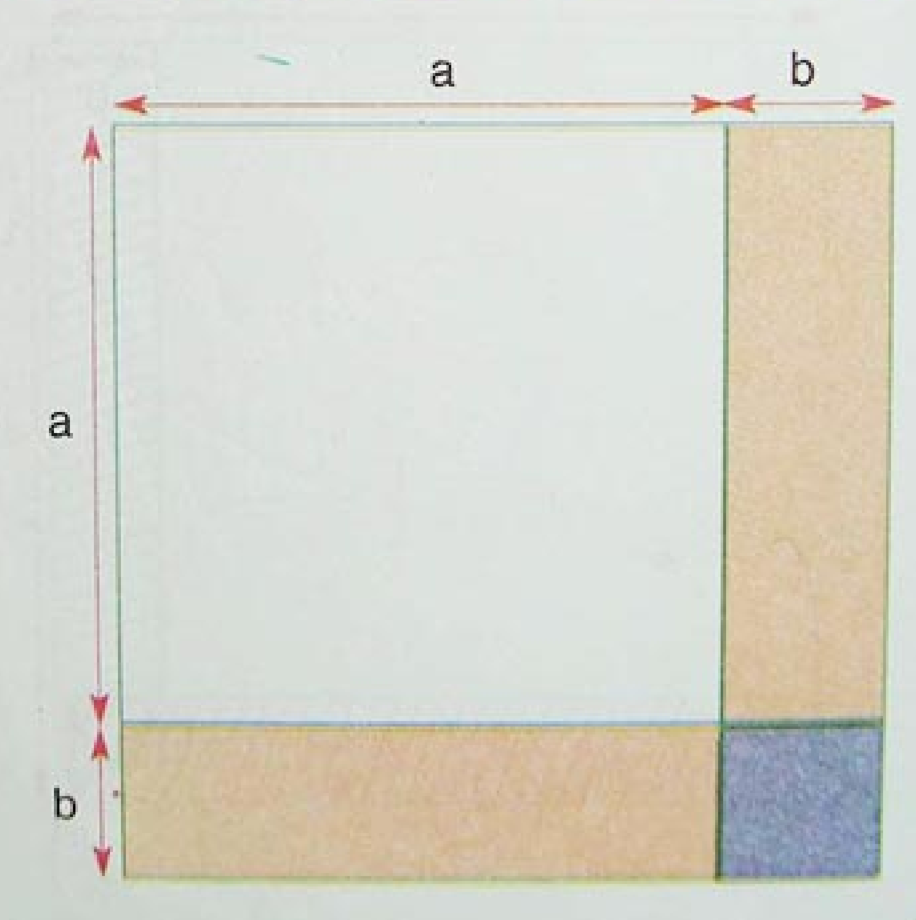
2 انشر، ثم بسط الجداءين التاليين :

$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$ ؛ $(3x + 5)^2$.

3 أكمل المساواة التالية :

$(a + b)^2 = ... + ... + ...$

4 احسب بطريقتين مختلفتين مساحة المربع الذي طول ضلعه يساوي $a + b$.



5 أكمل النص التالي :

مربع مجموع حدين يساوي .... وضعف ....

باستعمال القاعدة أعلاه، بسط العبارات التالية :

$(0{,}3x + y)^2$ ؛ $(2x + 1)^2$ ؛ $(3\sqrt{2} + 4\sqrt{5})^2$ ؛ $(\frac{x}{2} + \frac{3}{2})^2$ ؛ $(3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3})^2$.

6 احسب ذهنيا : $10{,}5^2$ ؛ 31^2 ؛ 101^2.

2 مربع فرق

1 اكتب الجداءات التالية إن أمكن على شكل مربع فرق :

$(3x-4)(4-3x)$ ؛ $(-7-y)(7-y)$ ؛ $(5x-2y)(5x-y)$ ؛ $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ ؛ $(4x-1)(4x-1)$.

2 انشر، ثم بسط :

$(6x-7)^2$ ؛ $(3\sqrt{3}-5)^2$.

3 أكمل المساواة التالية :

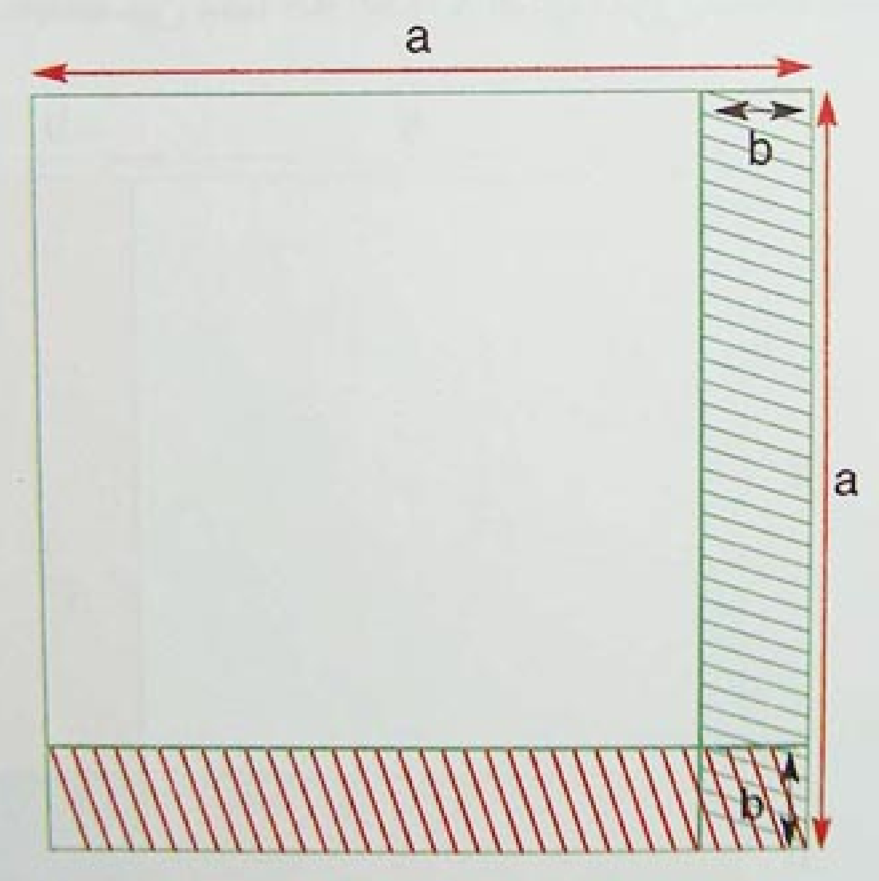
$(a-b)^2 = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots$

4 إليك الشكل الموالي :

عبر بدلالة a و b عن طول ومساحة المربع غير الملون.

عبر بدلالة a و b عن مساحة الجزء الملون بالأخضر ثم مساحة الجزء الملون بالأحمر.

تحقق من العلاقة : $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.



5 أكمل النص التالي :

مربع فرق حدّين يساوي فرق مجموع .... وضعف ....

باستعمال القاعدة أعلاه، بسط الجداءين التاليين :

$(2\sqrt{3}-4)^2$ ؛ $(2x-4)^2$.

6 احسب ذهنيا :

45^2 ؛ 998^2 ؛ 99^2.



3 جداء مجموع حدّين وفرقهما

1 من بين الجداءات التالية، عين تلك التي تمثل جداء مجموع حدّين وفرقهما :

$(-\sqrt{6}+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}+\sqrt{6})$ ؛ $(5y-4x)(5y+4)$ ؛ $(1{,}2x+0{,}2)(1{,}2x-0{,}2)$ ؛ $(3\sqrt{2}-5)(3\sqrt{2}+5)$.

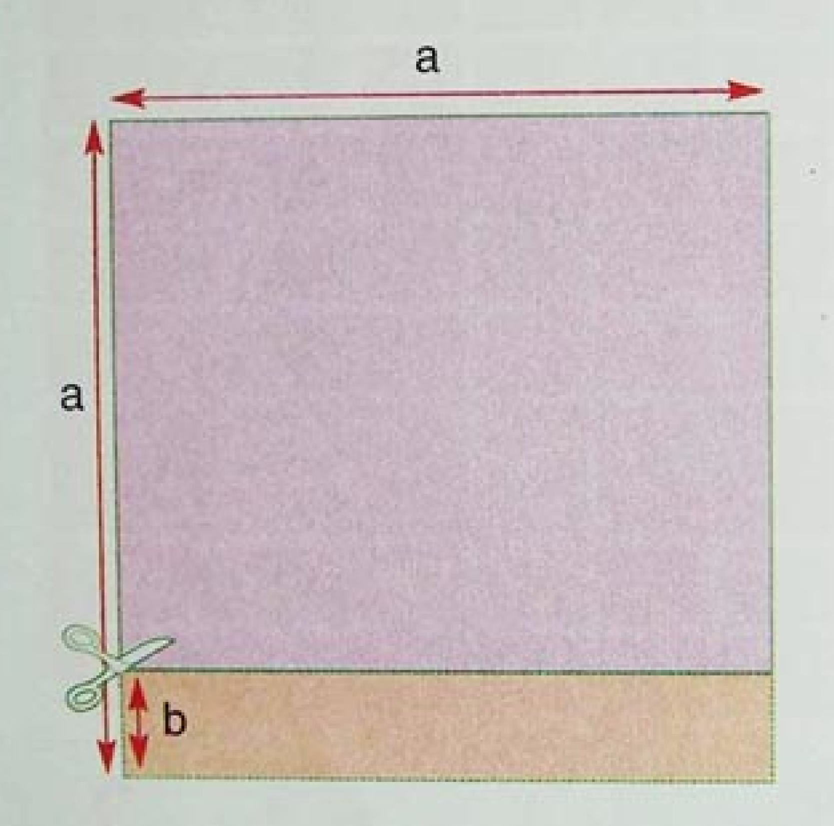
2 انشر، ثم بسط :

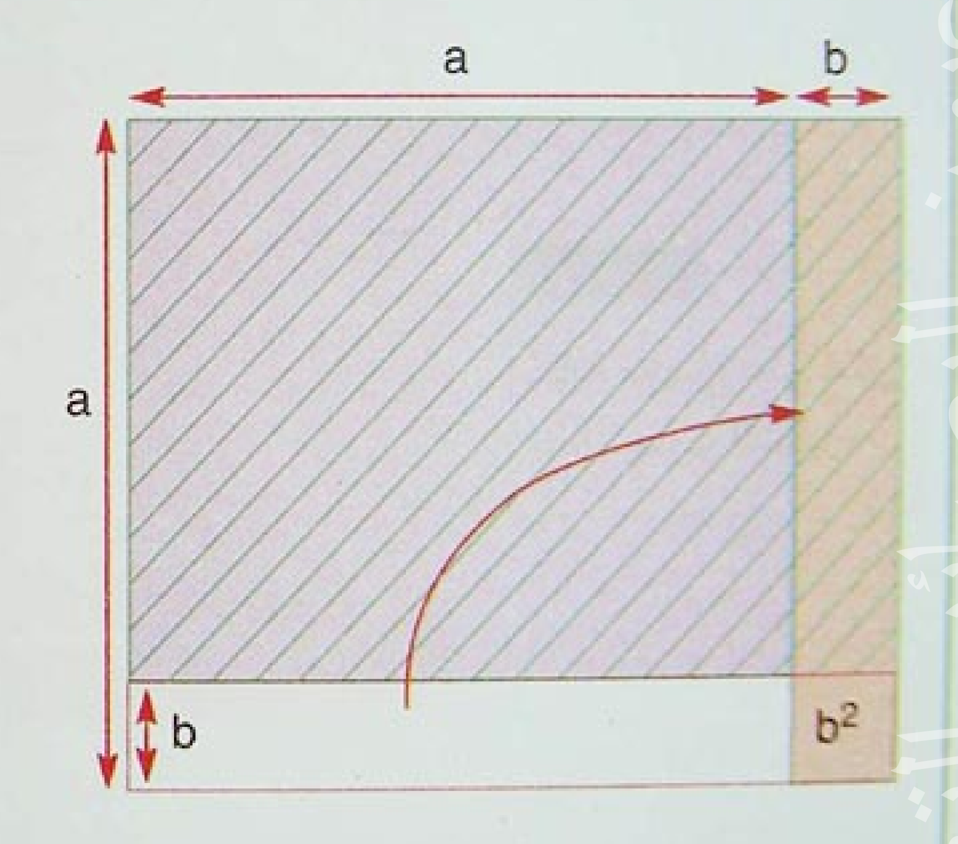
$(3x-1)(3x+1)$ ؛ $(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)$.

3 أكمل المساواة التالية :

$(a-b)(a+b) = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots$.

4 إليك الشكلين :





عبر بدلالة a و b عن بعدي الشكل المظلل ومساحته.

تحقق من العلاقة :

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

5 أكمل النص التالي :

جداء مجموع حدّين وفرقهما يساوي فرق ....

اعتمادا على القاعدة أعلاه، بسط الجداءين :

$(2x+4)(2x-4)$ ؛ $(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3})$.

6 احسب ذهنيا :

101×99 ؛ 1002×998.

أنـشـطـة

التحليل



استعمال الخاصة التوزيعية

تذكرة

الخاصة التوزيعية

مهما تكن الأعداد الحقيقية a و b و c فإن $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.

اكمل الجدول التالي باستعمال الخاصة السابقة :

العبارات	a	b	c	c (a + b) أو c (a – b)
$7x - 7y$				7 (x – y)
$6x + 9$				3 x 2x + 3 x 3 = 3(2x+3)
$4x^2 - 5x$				
$12x^2 + 18x$				
$3x^2 - x$				
$\frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{4}x$				
$x\sqrt{2} - 2x$				
$3x^2 - x\sqrt{3}$				

ملاحظة

كتابة مجموع على شكل جداء يسمى التحليل.

2 حلّ العبارات الجبرية الآتية :

العبارة الجبرية	a	b	c	c (a + b) أو c (a – b)
$(x + 1)(x + 2) + (x + 1)(x + 3)$	$(x + 2)$	$(x + 3)$	$(x + 1)$	$(x + 1)[(x + 2) + (x + 3)]$ $= (x + 1)(x + 2 + x + 3)$ $= (x + 1)(2x + 5)$
$(6x - 5)(2x + 1) - (6x - 5)(x + 3)$				
$(x + 2)^2 + (x + 2)(x - 5)$				
$(x + 7)(2x - 3) - (x + 7)^2$				
$(x - 1) - (x - 1)^2$				
$(2x + 1)(x - 4) + (2x + 1)$				
$x(5x - 2) - 3(5x - 2)$				

أنشطة

3 استعمال المتطابقات الشهيرة

1 باستخدام المتطابقتين الشهيرتين : $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ أو $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.

حلّل العبارات الجبرية إن أمكن في الجدول الموالي :

العبارة الجبرية على شكل مجموع	a^2	b^2	a	b	كتابة العبارة على شكل a^2+b^2-2ab أو a^2+b^2+2ab إن أمكن	العبارة المحللة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$
$x^2 + 2x + 1$						
$9x^2 + 30x + 25$	$9x^2$	25	$3x$	5	$(3x)^2 + (5)^2 + 2 \times 3x \times 5$	$(3x + 5)^2$
$25x^2 - 30x + 9$						
$4 + 49x^2 + 28x$						
$4 + 49x^2 - 30x$						
$x^2 + x + \frac{1}{4}$						
$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$						
$x^2 + 2x\sqrt{5} + 5$						

2 باستخدام المتطابقة الشهيرة : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

حلّل العبارات الجبرية إن أمكن في الجدول التالي :

العبارة الجبرية على شكل مجموع	a^2	b^2	a	b	كتابة العبارة على شكل $a^2 - b^2$ إن أمكن	العبارة المحللة $(a-b)(a+b)$
$4x^2 - 25$	$4x^2$	25	$2x$	5	$(2x)^2 - (5)^2$	$(2x - 5)(2x + 5)$
$x^2 - 49$						
$16x^2 - 9$						
$(x - 1)^2 - 36$						
$x^2 + 4$						
$25 - (2x + 3)^2$						
$(2x + 1)^2 - (x - 3)^2$						
$4(x - 1)^2 - 9(3x - 2)^2$						
$x^2 - 3$						
$2x^2 - 1$						
$(2x + 3)^2 + (5x + 1)^2$						

4 حلّ العبارات الجبرية التالية :

- $x^2 - 5x$.
- $9x^2 - 4$.
- $(2x-3)^2 - (4x+1)^2$.
- $(x-3)^2 - (x-3)(4x-7)$.
- $-x^2 + 16$.
- $50 - 2(4x+5)^2$.
- $25x^2 - 10x\sqrt{3} + 3$.
- $1{,}44\,x^2 - 0{,}01$.
- $25\,x^2 + 10x + 1$.
- $2 - 4x$.
- $x - 9x^2$.
- $(2x-3)(3x-1)^2 + 4(2x-3)$.
- $x^2 - 4x + 4$.
- $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$.

5 بين صحة المساويات الآتية :

- $(x+3)^2 - 3x + 9 = x^2 + 3x + 18$.
- $(2x-1)(3x+2) - (2x-1)(5-x) = (2x-1)(4x-3)$.
- $(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{49}{16} = (x - \frac{3}{2})(x+2)$.

6 احسب ذهنيا :



- $(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)$ ؛ $(4\sqrt{2}+5)(4\sqrt{2}-5)$ ؛ $(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})$.
- $101^2 - 99^2$ ؛ $109^2 - 2 \times 109 \times 9 + 81$ ؛ $28 \times 25 + 28 \times 75$.
- $1{,}002 \times 0{,}998$ ؛ $594^2 + 2 \times 594 \times 6 + 6^2$.



المتطابقات الشهيرة

مهما يكن العددان a و b، تسمى المساويات الآتية :

1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

2) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

المتطابقات الشهيرة.

مثال : انشر العبارات الآتية: $(2+\sqrt{3})^2$ ؛ $(1-2x)^2$ ؛ $(x\sqrt{3}+\sqrt{2})(x\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

- $(2+\sqrt{3})^2 = (2)^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}$
  $= 4 + 3 + 4\sqrt{3}$
  $= 7 + 4\sqrt{3}$
- $(1-2x)^2 = (1)^2 + (2x)^2 - (2) \times (1) \times (2x)$
  $= 1^2 + 4x^2 - 4x$
  $= 1 + 4x^2 - 4x$
- $(x\sqrt{3}+\sqrt{2})(x\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (x\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$
  $= 3x^2 - 2$

التحليل

تحليل عبارة جبرية هو كتابتها على شكل جداء.

لتحليل عبارة جبرية، نستعمل الخاصة التوزيعية (البحث عن العامل المشترك) أو المتطابقات الشهيرة.

مهما تكن الأعداد الحقيقية a، b، c، d فإن:

الخاصة التوزيعية:
- $ab + ac = a(b+c)$.
- $a(c+d) + b(c+d) = (c+d)(a+b)$.

المتطابقات الشهيرة:
- $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$.
- $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$.
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

مثال : حلّل العبارات التالية:

$A = 4+2x$ ؛ $B = 4x^2 - 3x$ ؛ $C = 9x^2 - 12x$ ؛ $E = (2x+1)(5-2x) - (3-5x)(1+2x)$ ؛ $G = (6-4x)(x+5) - (3-2x)(x-8)$ ؛ $M = x^2 - 6x + 9$ ؛ $N = 4x^2 - 1$.

- $C = 9x^2 - 12x = 3x \times 3x - 3x \times 4 = 3x(3x-4).$
- $B = 4x^2 - 3x = 4x \times x - 3x = x(4x-3).$
- $A = 4 + 2x = 2 \times 2 + 2x = 2(2+x).$

نعلم أن : $2x + 1 = 1 + 2x$.

$$E = (2x+1)(5-2x) - (3-5x)(1+2x)$$
$$= (2x+1)[(5-2x) - (3-5x)]$$
$$= (2x+1)(5-2x-3+5x)$$
$$= (2x+1)(3x+2).$$

العامل المشترك غير بارز في العبارة G.
لاحظ أن $6 - 4x = 2(3-2x)$.

إذن

$$G = (6-4x)(x+5) - (3-2x)(x-8)$$
$$= 2(3-2x)(x+5) - (3-2x)(x-8)$$
$$= (3-2x)[2(x+5) - (x-8)]$$
$$= (3-2x)(2x+10-x+8)$$
$$= (3-2x)(x+18).$$

العبارة M من الشكل $a^2 + b^2 - 2ab$،
نكتب M على الشكل $(a-b)^2$.

$$M = x^2 - 6x + 9$$
$$= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$$
$$= (x-3)^2.$$

العبارة N من الشكل $a^2 - b^2$.
نكتب N على الشكل $(a+b)(a-b)$.

$$N = 4x^2 - 1$$
$$= (2x)^2 - (1)^2$$
$$= (2x-1)(2x+1).$$

طرائق وتمارين محلولة

تحليل عبارة جبرية

لتحليل عبارة جبرية نتبع إحدى الطريقتين:

أ) استعمال الخاصة التوزيعية (**البحث عن العامل المشترك**).

ب) استخدام المتطابقات الشهيرة.



1- ما هو عدد الحدود ؟

2- هل يوجد عامل مشترك بارز في كل حد ؟

لا

نعم

نستعمل الخاصة

$ac + ab = a(c + b)$

أو

$ac - ab = a(c - b)$

نقوم بتحليل كل حدّ إن أمكن بواسطة خاصية التوزيع أو المتطابقات الشهيرة.

عامل مشترك بارز

نعم

لا

نفكر في المتطابقات الشهيرة

طرائق وتمارين محلولة

تمرين

حلّل العبارات الجبرية التالية:

$A = (2x+3)^2 + (x-2)(2x+3)$

$B = (x+1)(3x-2) + (x^2+x)$

$C = (1-2x^2) - (2+3x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})$

الحل

A مجموع جبري، فيه حدّان هما $(2x+3)^2$ و $(x-2)(2x+3)$،
وكل حدّ عبارة عن جداء عاملين هما $(2x+3)(2x+3)$ و $(x-2)(2x+3)$.
العامل المشترك هو $(2x+3)$، نكتب

$$\begin{aligned} \bullet\ A &= (2x+3)^2 + (x-2)(2x+3) \\ &= (2x+3)[(2x+3)+(x-2)] \\ &= (2x+3)(2x+3+x-2) \\ &= (2x+3)(3x+1). \end{aligned}$$

المجموع B فيه حدّان هما $(x+1)(3x-2)$ و (x^2+x).
العامل المشترك غير بارز في هذا المجموع.
لاحظ : $x^2 + x = x(x+1)$ (خاصية التوزيع).
ومنه :
العامل المشترك هو $(x+1)$، نكتب

$$\begin{aligned} \bullet\ B &= (x+1)(3x-2) + (x^2+x) \\ &= (x+1)(3x-2) + x(x+1) \\ &= (x+1)[(3x-2)+x] \\ &= (x+1)(3x-2+x) \\ &= (x+1)(4x-2). \end{aligned}$$

الفرق C فيه حدّان هما $(1-2x^2)$ و $(2+3x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})$.
العامل المشترك غير بارز في هذا الفرق.
لاحظ أن : $1-2x^2 = (1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})$ (المتطابقات الشهيرة).
ومنه :
العامل المشترك هو $(1+x\sqrt{2})$، نكتب

$$\begin{aligned} \bullet\ C &= (1-2x^2) - (2+3x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2}) \\ &= (1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2}) - (2+3x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2}) \\ &= (1+x\sqrt{2})[(1-x\sqrt{2})-(2+3x\sqrt{2})] \\ &= (1+x\sqrt{2})(1-x\sqrt{2}-2-3x\sqrt{2}) \\ &= (1+x\sqrt{2})(-1-4x\sqrt{2}). \end{aligned}$$



طرائق وتمارين محلولة

طريقة ب استخدام المتطابقات الشهيرة.

تمرين حلّل العبارات A و B و C و D إن أمكن :

$A = 9x^2 + 12x + 4$ ؛ $B = x^2 - x + \frac{1}{4}$ ؛ $C = y^2 - 81$ ؛ $D = x^2 + 25$ ؛

$E = 16 + 25x^2 + 20x$ ؛ $M = (x + 6)^2 - (2x + 1)^2$.

الحل

لتحليل العبارة A نفكر في إستعمال المتطابقة الشهيرة من الشكل $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.

فنضع $a = 3x$ و $b = 2$.

نتحقق أن $2ab = 12x$.

أي $2(3x)(2) = 12x$.

فتحليل A هو من الشكل $(a + b)^2$.

$$A = 9x^2 + 2x + 4$$
$$= (3x)^2 + (2)^2 + 2(3x)(2)$$
$$= (3x + 2)^2$$

نفكر في المتطابقة الشهيرة من الشكل $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$.

فنضع $a = x$ و $b = \frac{1}{2}$.

نتحقق أن $2ab = x$.

نحسب : $2ab = 2(x)\frac{1}{2}$

$= \frac{2x}{2}$

$= x$

العبارة B تحليلها $(a - b)^2$.

$$B = x^2 - x + \frac{1}{4}$$
$$= x^2 + (\frac{1}{2})^2 - 2(x)(\frac{1}{2})$$
$$= (x - \frac{1}{2})^2$$

نفكر في المتطابقة الشهيرة من الشكل $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

فنضع $a = y$ و $b = 9$.

العبارة C تحليلها من الشكل $(a - b)(a + b)$.

$$C = y^2 - 81$$
$$= y^2 - 9^2$$
$$= (y - 9)(y + 9)$$

D من الشكل $a^2 + b^2$ ولا يمكن تحليلها.

$$D = x^2 + 25$$
$$= (x)^2 + 5^2$$

نفكر في المتطابقة الشهيرة من الشكل $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

فنضع $a = 4$ و $b = 5x$.

نتحقق أن $2ab = 20x$.

نحسب: $2ab = 2(5x)(4)$

$= 40x$

لاحظ أن $2ab \neq 20x$.

$$E = 16 + 25x^2 + 20x$$

E ليست من الشكل $a^2 + b^2 + 2ab$.

ومنه E لا يمكن تحليلها بالشكل $(a + b)^2$.

طرائق وتمارين محلولة

العبارة M من الشكل $a^2 - b^2$.
فنضع $a = x + 6$ و $b = 2x + 1$.
وتحليلها يكون من الشكل $(a - b)\ (a + b)$.

$$M = (x + 6)^2 - (2x + 1)^2$$
$$= [(x + 6)-(2x + 1)]\ [(x + 6)+(2x + 1)]$$
$$= (x + 6 - 2x - 1)\ (x + 6 + 2x + 1)$$
$$= (-x + 5)\ (3x + 7)$$

النشر

طريقة

استخدام الخاصة التوزيعية أو المتطابقات الشهيرة.

تمرين

انشر، ثم بسط العبارات التالية :

$A = (x - 3)^2$ ؛ $B = (3x + 2)^2$ ؛ $C = (10 - 3x)(10 + 3x)$ ؛ $D = 7x\ (x + 4) - (x - 3)\ (x - 2)$.

الحل

العبارة A من الشكل $(a - b)^2$.
فنضع $a = x$ و $b = 3$.
نعلم أن $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab$.

$$A = (x - 3)^2$$
$$= x^2 + 3^2 - 2\ (x)\ (3)$$
$$= x^2 + 9 - 6x$$

العبارة B من الشكل $(a + b)^2$.
فنضع $a = 3x$ و $b = 2$.
ونعلم أن $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\ ab$.
• $(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.

$$B = (3x + 2)^2$$
$$= (3x)^2 + (2)^2 + 2 \times 3x \times 2$$
$$= 9x^2 + 4 + 12x$$

العبارة C من الشكل $(a + b)\ (a - b)$.
فنضع $a = 10$ و $b = 3x$.
نعلم أن $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$.

$$C = (10 - 3x)\ (10 + 3x)$$
$$= (10)^2 - (3x)^2$$
$$= 100 - 9x^2$$

• نتعرف على الجداءات الموجودة في العبارة.
• ننشر الجداءات (باستخدام الخاصة التوزيعية).
• إذا كان الجداء مسبوقا بالإشارة (–) من الأحسن وضع الأقواس.
• نحذف الأقواس بمراعاة قاعدة الأشارات.
• نبسط.

$$D = 7x\ (x + 4) - (x - 3)\ (x - 2)$$
$$= 7x^2 + 28x - (x^2 - 2x - 3x + 6)$$
$$= 7x^2 + 28x - x^2 + 2x + 3x - 6$$
$$= 6x^2 + 33x - 6$$



تمارين للتطبيق المباشر

النشر

1 انشر، ثم بسط العبارات التالية:

$A = (4x-3)^2$ ؛ $B = (2x+1)^2$ ؛

$C = (7a-4b)^2$ ؛ $D = (5x-2)(5x+2)$ ؛

$E = (\frac{3}{4}x-2y)(\frac{3}{4}x+2y)$ ؛

$F = (2x-5)(2x+5)+(2x+7)^2$ ؛

$G = (2x+3)(x-3)+(x-7)(2x+3)$.

2 احسب ذهنيا:

أ) 24×1002 ؛ 1010^2 ؛ $2,009^2$.

ب) 76×98 ؛ 92^2 ؛ 990^2.

جـ) 105×95 ؛ 1008×992.

3 انشر، ثم بسط الجداءات الآتية:

$(x+\frac{1}{2})^2$ ؛ $(x-\frac{8}{5})^2$ ؛ $(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})^2$ ؛ $(x-\frac{y}{4})(x+\frac{y}{4})$.

4 انشر، ثم بسط ما يلي:

$(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2$ ؛ $(1-\sqrt{3})^2$ ؛

$(3\sqrt{7}+4\sqrt{2})^2$ ؛ $(5+2\sqrt{6})^2$ ؛

$(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ؛

$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.

5 بسط العبارات الآتية:

$A = \frac{x-1}{2} - \frac{3x+4}{3}$.

$B = \frac{3x+2}{5} - \frac{x-4}{5}$.

$C = \frac{x}{3} - \frac{3x-1}{2} + \frac{x+3}{4}$.

$D = \frac{x+2}{5} - 0,4x - 2(1,5x-0,7)$.

6 بين أن: $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ عدد ناطق.

اجعل مقام النسبة $\frac{5}{\sqrt{2}-1}$ ناطقا.

7 A عبارة جبرية بحيث:

$A = (2x-3)(x-2)-(x-3)^2$

انشر، ثم بسط العبارة A.

احسب قيمة A من أجل:

$x = \sqrt{2}$ ؛ $x = \sqrt{3}-2$ ؛ $x = \sqrt{5}+3$.

8 أكمل المساويات التالية:

$(a+...)^2 = a^2 + ... + 25$

$(... - \frac{1}{2})^2 = b^2 - b + ...$

$(... + 7)(y-7) = y^2 - ...$

9 A، B، C عبارات جبرية:

$A = 5x-3$ ؛ $B = 8x+1$ ؛ $C = 5x+3$.

انشر، ثم بسط العبارات:

A^2 ؛ B^2 ؛ $A \times C$ ؛ $-A^2$ ؛ $3A^2 - 2A^2$.

10 A و B عددان حيث:

$A = \sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ؛ $B = \sqrt{2}+3$.

احسب A^2 و B^2 ثم قارن A و B.

نفس السؤال

$C = \sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ؛ $D = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

11 تحقق أن العبارتين A و B متساويتان في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) $A = 6(3+2x)-34$ ؛ $B = 3(4x-6)+2$.

ب) $A = 25x^2-4$ ؛ $B = (5x-2)(5x+2)$.

جـ) $A = 25x^2+4-20x$ ؛ $B = (5x-2)(5x-2)$.

د) $A = (5x-4)(16x+12)$ ؛ $B = (8x+6)(10x-8)$.

12 انشر، ثم بسط العبارات:

1) $A = 2(3x-4)^2$ ؛ $B = -10(2x-9)(2x+9)$.

2) $C = -(x+7)^2$ ؛ $D = (x+3)^2+(2x-7)^2$.

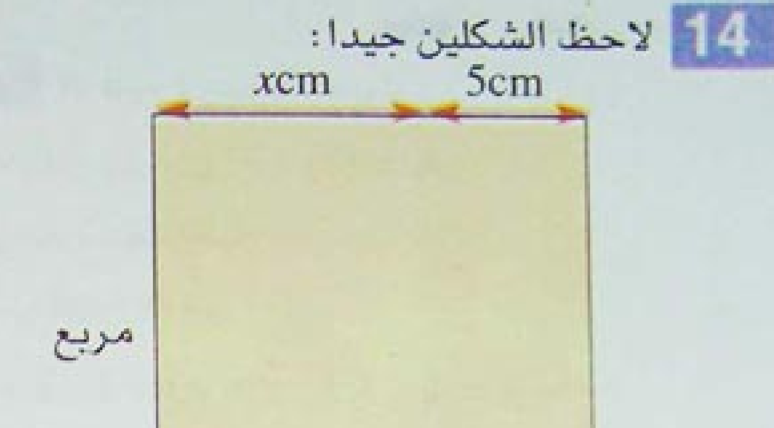
3) $E = 3(4x-5)+8(3+2x)$.

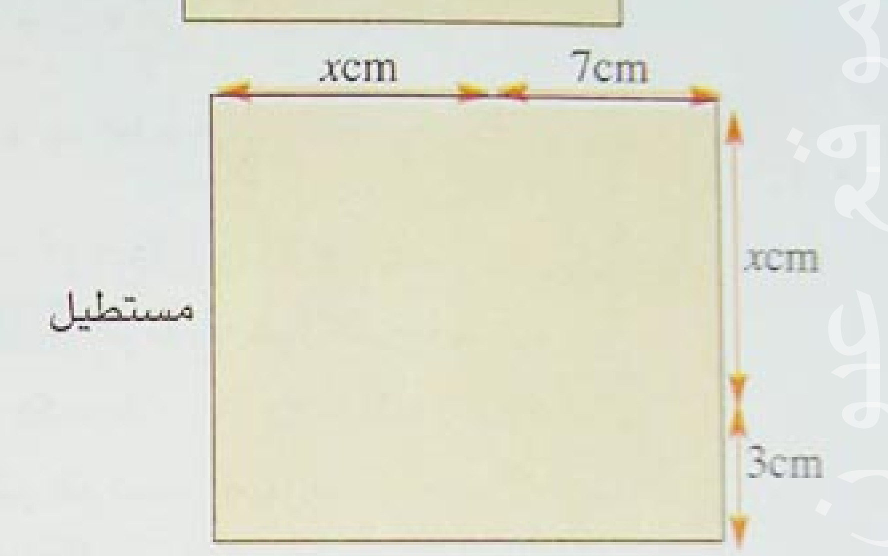
13 بين أن:

$\sqrt{10-2\sqrt{21}} \times \sqrt{10+2\sqrt{21}}$ هو مربع لعدد طبيعي يطلب تعيينه.



14 لاحظ الشكلين جيدا:





1) بين أن لهذين الشكلين نفس المحيط.
2) احسب الفرق بين مساحتي المربع والمستطيل.

15 أكمل المساويات الآتية:

$(x + ...) = x^2 + 2 \times .... \times ..... + 3^2 = ...$.
$(x - ...)^2 = x^2 - 2 \times ... \times ... + (...)^2 = x^2 - 14x + 49$.
$(4x - ...)^2 = 16x^2 - 2x(...) \times ... + 5^2 = 16x^2 - ... x + ...$.
$(x + ...)(... - ...) = x^2 - (...)^2 = x^2 - 49$.
$(x + ...)(... - 3) = ... - 9$.

16 انشر، ثم بسط:

1) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)(2x - 1)$.
2) $(2x + \frac{1}{2}) \times 2 + (x - \frac{1}{3})^2$.
3) $(x + 6)^2 - 2(2x - 1)$.
4) $(3x + 4)(4 - 3x) + (2x + 1)(x - 2)$.
5) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 + (3x + 1)(3x - 1)$.
6) $(x - 3)^2 - 3x(2x - 1)$.
7) $(3x + \frac{1}{2})^2 - (x - 2)(2x - 1)$.
8) $(5x + 2)^2 + (5x + 2)(x - 1)$.
9) $(5 - 2x)(2x + 1) + (10 - 4x)(x - 3)$.
10) $(x - 1)(2x + 3) - (x - \frac{1}{2})^2$.

17 انقل، ثم أكمل الجدول:

$-\frac{x}{3}$	$-2x$	$\frac{x}{2}$	$3x$	a
$\frac{x}{3}$	0,5	2	1	b
				a^2
				b^2
				2ab
				$(a + b)^2$
				$(a - b)^2$
				$(a + b)(a - b)$

18 انشر وبسط باستخدام المتطابقات الشهيرة :

$(3x - 1)^2$ ؛ $(x - 4)(x + 4)$ ؛ $(\frac{x}{3} + 5)^2$ ؛ $(\frac{x}{2} - 2)^2$ ؛
$(\frac{-3}{2} - \frac{x}{3})^2$ ؛ $(-2x + 0,5)^2$ ؛ $(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5})^2$ ؛ $(\frac{4}{5} + 2x)$ ؛
$(\frac{4}{5} - 2x)$ ؛ $(2x - \frac{3}{4})^2$ ؛ $(2x - \frac{1}{3})(2x + \frac{1}{3})$ ؛
$(\frac{-3}{2} - \frac{x}{3})^2$ ؛ $(-3x - \frac{1}{3})^2$.

التحليل

19 حلّل العبارات الجبرية:

أ) $6x^2 + 10x$ ؛ $4x + x^2$ ؛ $2x + 2y$.
ب) $3ab + 5b + 2b^2$ ؛ $3b^2 - 2ab$ ؛ $5a^2 + 3a$.
جـ) $5x^3 + 35x^2$ ؛ $6x^2 + 6x$ ؛ $2x^2 + x$.
د) $\frac{3}{2}x^2y - \frac{6}{7}xy^2$ ؛ $\frac{24}{5}x^2 - \frac{36x}{5}$.

تمارين للتطبيق المباشر

20 حلل العبارات الآتية :

1) $(3x+1)(3x+5)-(x-2)(3x+1)$.
2) $(5x-4)^2-(5x-4)(3x+7)$.
3) $(8x-5)(6x+3)+(8x-5)$.
4) $(x+5)+(5x-4)(x+5)$.
5) $5(x+1)^2-20$ ؛ $50-2x^2$.
6) $(4x+7)(5x+2)+(10x+4)(x+5)$.
7) $(x-1)^2+(3x-3)(2x+1)$.
8) $\frac{25}{4}x^2-x+\frac{1}{25}$ ؛ $x^2-x+\frac{1}{4}$.
9) $2+(3x+1)^2+6x$ ؛ $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}$ ؛ $3x^2-\frac{3}{4}$.

21 أتمم المساويات الآتية :

- $x^2+2\times 5x+25=(...+...)^2$.
- $25x^2+80x+64=(...)^2+2\times ...\times ...+(...)^2$
  $=(...+...)^2$
- $25x^2-80x+64=(...)^2-2\times ...\times ...+(...)^2$
  $=(...-...)^2$
- $9x^2-4=(...)^2-(...)^2=(...\ -...)(...+....)$.

22 باستعمال المتطابقات الشهيرة، اكتب على شكل جداء، العبارات الآتية:

أ) $4x^2+\frac{25}{81}-\frac{20}{9}x$ ؛ $9x^2+12x+4$.

ب) $100x^2+80x+16$ ؛ $25+4x^2-20x$.

جـ) $16x^2-40xy+25y^2$ ؛ $\frac{x^2}{4}+\frac{16}{9}-\frac{4}{3}x$.

د) $\frac{25}{49}x^2+\frac{9}{4}y^2+\frac{15}{7}xy$ ؛ $1-16x+64x^2$.

23 نفس سؤال التمرين السابق :

1) $25-4x^2$ ؛ $4x^2-1$ ؛ x^2-9.
2) x^2-y^2 ؛ $\frac{1}{9}-4y^2$ ؛ $\frac{x^2}{4}-4$.
3) $2a^2-5$ ؛ a^2-3 ؛ $\frac{4}{9}a^2-\frac{9}{25}$.
4) $3b^2-49$ ؛ $1-x^2$ ؛ $2x^2-8$.
5) $(4x-1)^2-(3x+5)^2$ ؛ $(x-1)^2-(2x+3)^2$.
6) $(x+5)^2-1$ ؛ $9-(x-4)^2$.
7) $9(x+1)^2-4(x-2)^2$.
8) $x^2-(5x-1)^2$ ؛ $(3-2x)^2-4$.

24 حلل العبارات الجبرية:

1) $(2x-3)(x+1)-5(6x-9)$.
2) $(16x^2-1)-(4x-1)(x-3)$.
3) $12x-60x^2+75x^2$.
4) $(5x-4)(2x+3)+(4x^2-9)$.

25 أتمم المساويات :

- $a=(5x+2)(...)+(...)(6x+4)$
  $=(5x+2)[(4x-3)+(...)]$
  $=(5x+2)(...)$
- $b=(4x+7)(...)-(3x-2)(5x+3)$
  $=(...)[(...)-(5x+3)]$
  $=(3x-2)(...)$
- $c=(5x-4)^2-(...)$
  $=[(...)+(2x+3)][(...)-(2x+3)]$
  $=(7x-1)(...)$
- $d=4x^2+...+...=(...+9)^2$.
- $e=...+1-...=(x-...)^2$.
- $f=...-x+\frac{x^2}{9}=(...-...)^2$.
- $g=...-\frac{8}{25}+...=(...-\frac{1}{5})$.

26 احسب ذهنيا ما يلي :

أ) 105^2-95^2 ؛ 102^2-98^2.

ب) $795^2+2\times 795\times 5+25$.

جـ) $1012^2-2\times 1012\times 12+144$.

د) $4{,}5^2+2\times 4{,}5\times 5{,}5+5{,}5^2$.

و) 427^2-327^2 ؛ 1095^2-95^2.

27 لدينا العبارة E بحيث :

$E=(a+b)^2-(a-b)^2$.

حلل هذه العبارة.

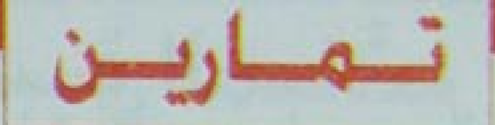
احسب E علما أن $ab=6$.

28 بين أن :

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

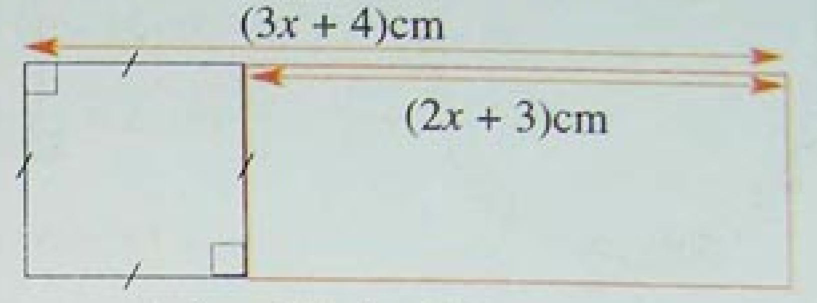
احسب a^2+b^2 علما أن $ab=40$ ؛ $a+b=70$.





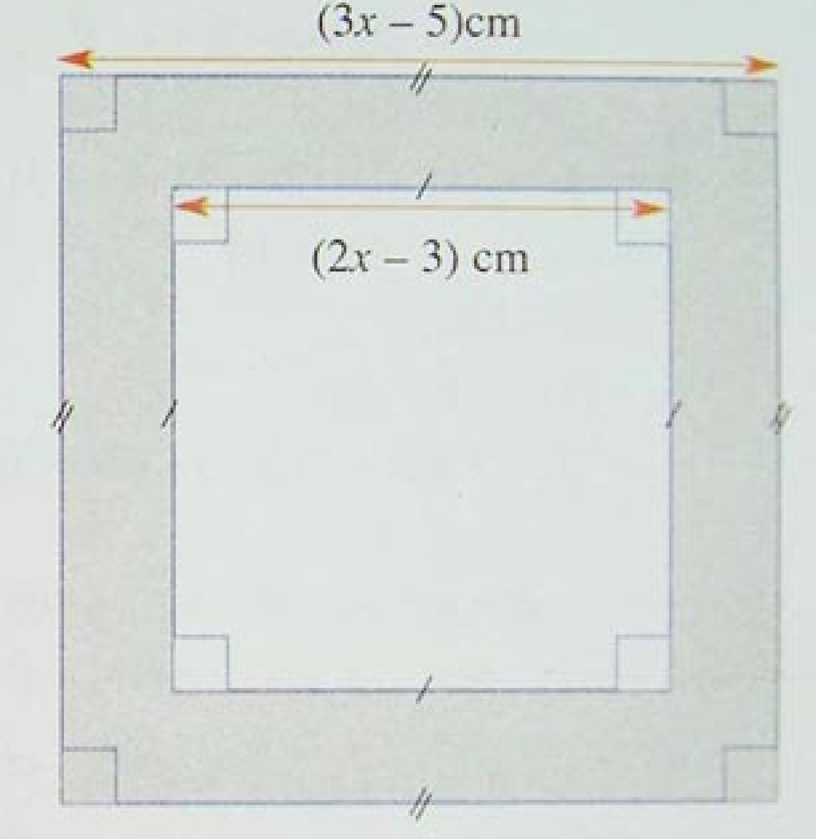
تمارين

1 حقلان متجاوران أحدهما على شكل مستطيل والآخر شكله مربع (كما هو مبين في الشكل الموالي).



ما هي العبارة المبسطة لمساحة كل حقل ؟

2 إليك الشكل التالي :



أعط عبارة المساحة المظلّلة على شكل جداء.

3 إليك العبارة :

$F = (4x-3)^2 - (x+3)(3-9x)$.

1) انشر وبسط :

$(4x-3)^2$.

2) بين أن:

$F = (5x)^2$.

3) اوجد قيم x لمّا :

$F = 125$.

4 لتكن العبارة E بحيث :

$E = (a+1)^2 - (a-1)^2$.

1) انشر وبسط هذه العبارة.

2) نضع $E = 101^2 - 99^2$.

دون استعمال الآلة الحاسبة واعتمادا على السؤال (1)، استنتج قيمة E.

5 مستطيل بعداه a و b، محيطه 28cm ومساحته $48cm^2$.

1) احسب $(a+b)^2$.

2) بين أن $a^2 + b^2 = 100$.

3) استنتج طول قطر هذا المستطيل.

6

1) انشر وبسط العبارة A :

$A = (x-2)^2 - (x-1)(x-4)$

2) اعتمادا على السؤال (1)، احسب :

$9998^2 - 9999 \times 9996$

7 1) بين صحة المساواة الآتية :

$(3x+1)(5x-3) = 15x^2 - 4x - 3$.

2) حلل العبارة B.

$B = (15x^2 - 4x - 3) - (-x+1)(3x+1)$.

3) انشر، ثم بسط هذه العبارة.

8 A، B، C ثلاث عبارات جبرية :

$C = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ ؛ $B = \frac{3x}{4} - 2$ ؛ $A = \frac{1}{2}x + 3$.

بسط العبارات الآتية :

$(A+B)^2$ ؛ $(A+B)(A-B)$ ؛ $(B-C)^2$.

9 اكتب العبارتين E و G على شكل جداء عاملين.

$E = (9x^2 - 30x + 25) - (4x^2 + 28x + 49)$:

$G = (2x+6)(4x-1) - 6x^2 + 54$.

10 A و B عبارتان حيث $B = x + 2$ ؛ $A = 3x - 1$.

1) بسطC و D حيث $C = A - 2B$ ؛ $D = 2A - 3B$.

2) انشر وبسط E حيث $E = BA - B^2$.

3) حلل العبارة F حيث $F = C^2 - D^2$.

مسائل

1

عبر بدلالة a و b عن مساحة الجزء غير المظلل.

2 هيأت البلدية قطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها $8x$ m وعرضها $(7x + 5)$ m، لإنشاء 4 عمارات ومساحة خضراء.

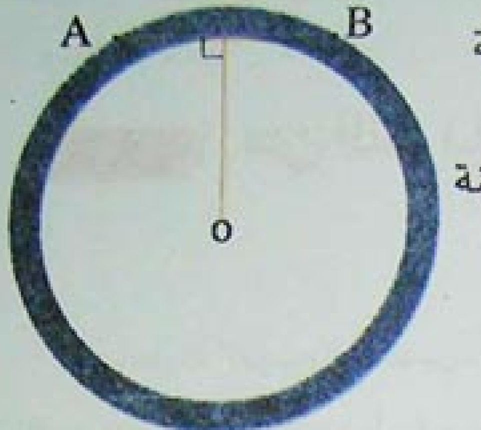
1) أعط عبارة المساحة الخضراء S بدلالة x علماً أن بعدا قاعدة العمارة هما $(x + 5)$ و x.
2) انشر العبارة S.
3) حلّل العبارة S.
4) احسب S إذا كان $x = 25$.

3

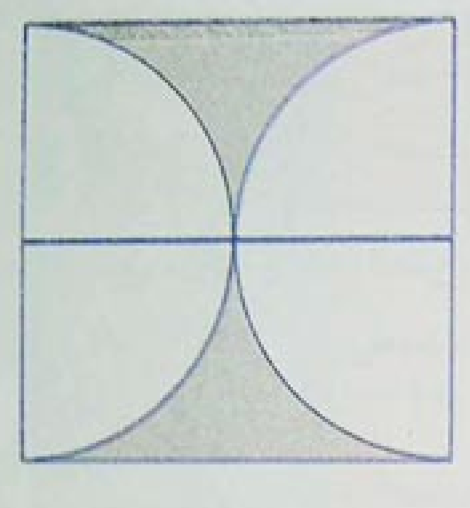
سلم يتكون من 5 درجات لها نفس الارتفاع 20 cm ونفس العرض 40 cm . احسب مساحة الجزء الظاهر في الرسم باستعمال أقل عدد ممكن من العمليات.

4

1) عبر بدلالة r و R عن مساحة الجزء الملوّن A (الذي نسميه حلقة).
2) حلل العبارة A.
3) احسب قيمة A لما : $R = 8{,}5$ cm و $r = 5{,}5$ cm. (باستعمال العبارة المحللة).
4) احسب مساحة الحلقة إذا كان $AB = 10$ cm.
5) عبر عن مساحة الحلقة بدلالة AB في الحالة العامة.



5



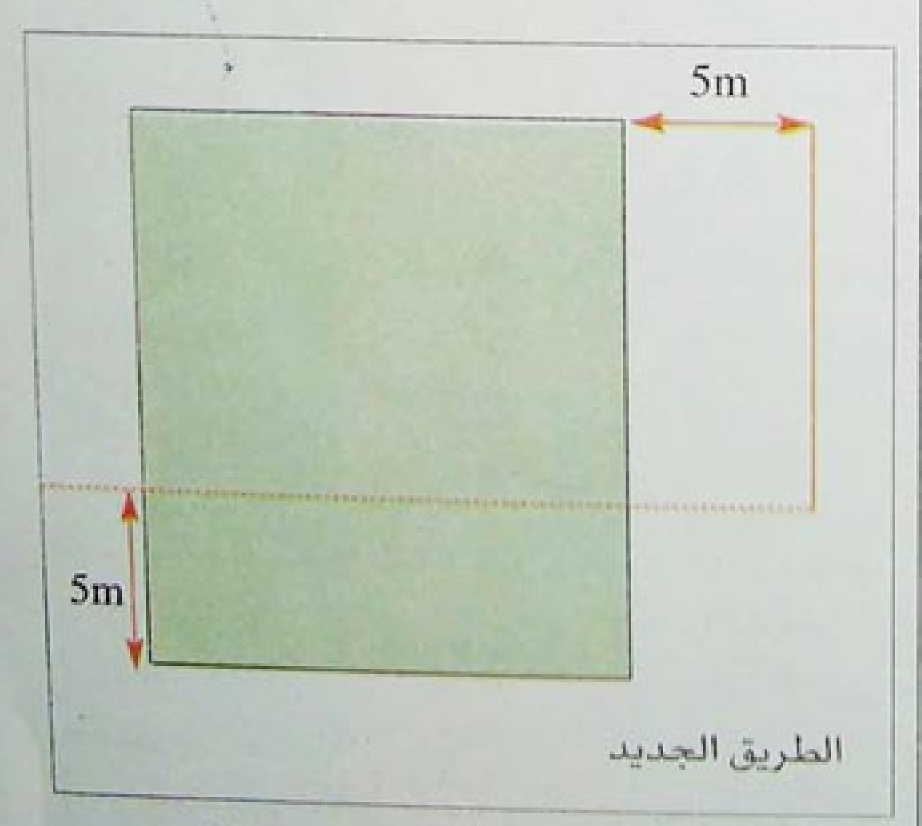
لحساب مساحة الجزء المظلل، نستعمل العلاقة $A = 4a^2 - \pi a^2$.

1) ماذا يمثل العدد a ؟
2) حلل العبارة A.
3) احسب المساحة A علما أن $a = 5$ cm.

6

أرادت البلدية شق طريق على حساب قطعة أرض مربعة الشكل يملكها محمد، وقد اقترحت عليه تغيير أطوال على الشكل التالي :

يتم اقتطاع 5 أمتار من أحد الأضلاع، وتعويضها بـ 5 أمتار في طول ضلع المجاور (كما هو مبين في الشكل أدناه).



- هل سيقبل محمد بهذا الإقتراح ؟ ولماذا ؟

من التاريخ

رواد في الجبر

أدى علماء العرب والمسلمين دورا رئيسيا في بعث علم الجبر (الحساب الحرفي) ومواصلة البحث في علم الحساب والهندسة من القرن التاسع حتى القرن السابع عشر الميلادي. وهذه قائمة ببعض الأسماء التي لمعت في الجبر والحساب متبوعة بتاريخ الوفاة (بالتقويم الهجري ثم الميلادي) :

الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في الجبر والحساب	الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في الجبر والحساب	الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في الجبر والحساب
سنان بن الفتح (210 - 825)	الجمع والتفريق؛ حساب الوصايا	الحكيم العدلي (315 - 927)	كتاب في الجبر والمقابلة	السموأل المغربي (570 - 1175)	الباهر في الجبر
الخوارزمي (232- 846)	الجبر والمقابلة	الموصلي العمراني (344- 955)	شرح كتاب الجبر والمقابلة لأبي كامل	ابن الياسمين (601-1204)	تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار
سند بن علي أبو الطيب (250- 864)	الجمع والتفريق؛ الحساب الهندي	كوشيار الجيلي (350-961)	أصول حساب الهند	ابن البناء المراكشي (721- 1321)	تلخيص أعمال الحساب، كتاب الجبر والمقابلة
الكندي (252- 866)	الأرثماطيقي: رسالة في الحيل العددية	البوزجاني (388- 998)	صناعة الجبر؛ الأرثماطيقي	الكاشي، عماد الدين (745- 1344)	كتاب الحساب
أبو كامل بن أسلم (267-880)	الوصايا بالجبر والمقابلة	المجريطي (398- 1007)	تمام علم العدد	الكاشي، غياث الدين (828- 1424)	كتاب مفتاح الحساب
المهاني (271- 884)	كتاب النسبة	الإصطخري (420-1029)	الجامع في الحساب	القلصادي (891-1486)	كشف الجلباب عن علم الحساب
الدينوري (282- 895)	كتاب الجبر والمقابلة	أبو منصور البغدادي (429-1037)	التكملة في الحساب	سبط المارديني (907-1501)	تحفة الألباب في علم الحساب
ثابت بن قرة (288-900)	الأعداد المتحابة	ابن الهيثم (430- 1039)	الجامع في أصول الحساب؛ حساب المعاملات	ابن غازي المكناسي (919-1513)	منية الحسّاب في علم الحساب
أبو برزة الجيلي (298- 911)	كتاب المعاملات	البيروني (440-1048)	كيفية رسوم الهند في تعلم الحساب	ابن حمزة الجزائري (950-1543)	تحفة الأعداد لذوي الرشد والسداد
أحمد بن محمد الحاسب (315- 927)	كتاب الجمع والتفريق	عمر الخيام (515-1121)	الجبر والمقابلة	بهاء الدين العاملي (1031- 1622)	خلاصة الحساب؛ جبر الحساب

الرياضيات تتقدم

دنيا الأعداد

الأعداد : انشغل الرياضيون منذ قديم الزمان بالأعداد وطوّروا مفهومها، ووسّعوا مجموعاتها فانتقلوا من الأعداد الطبيعية إلى الأعداد الصحيحة، ثم إلى الأعداد الناطقة؛ تليها مجموعات أخرى سوف تتعرف عليها خلال دراستك الثانوية.

إن ما نجهله اليوم بخصوص هذه الأعداد يفوق ما نعلمه عنها. ولا زال المختصون في "نظرية الأعداد" (وهي أحد اختصاصات الرياضيات) يكدّون لمعرفة المزيد من عجائب هذه الكائنات. والواقع أن معالجة هذه الأعداد تتعمق يوما بعد يوم، وتستخدم أحدث الأجهزة للغوص في متاهاتها.

الأعداد فئات : وقد بحث الرياضيون مثلا في العديد من أشكال الأعداد الأولية، وتمّ الاهتمام بالأعداد التي يدخل فيها جداء الأعداد الطبيعية المتوالية أو جداء الأعداد الأولية المتوالية. وربط بعضهم أعدادا أولية فيما بينها. وتساءل البعض عن الفروق بين الأعداد الأولية. وعرّف البعض الآخر أنواعا كثيرة من الأعداد الأولية، مثل الأعداد التوائم ... حيث نقول عن عددين أوليين إنهما توأمان إذا كان الفرق بينهما يساوي 2 (مثل 3 و 5 ؛ 17 و 19، الخ...). هناك مخمّنة (أي "نظرية" لم تثبت بعد) تنص على أن عدد الأعداد التوائم غير منته.

وليس هذا فحسب بل تناول الرياضيون أنماطا أخرى من الأعداد الأولية، مثل تلك التي لا تظهر فيها سوى الوحدة 1، وبحثوا في ميزاتها. وخاضوا في الأعداد الأولية المتناظرة مثل 212، 3223 (أي الأعداد التي تقرأها من اليمين إلى اليسار أو من اليسار إلى اليمين فتجد نفس العدد). فعلى سبيل المثال حدد كارلوس ريفيرا - الذي كان يعمل في صناعة الخزف بالمكسيك - عام 1998 عدد الأعداد الأولية المتناظرة التي لها 17 رقما. ولا زال البحث جاريا عن المزيد من المعلومات في هذا الموضوع.

الأعداد التامة والمتحابة : ولا يمكننا في هذه العجالة الإشارة إلى كل فئات الأعداد التي شدت اهتمام الرياضيين. دعنا نختم بالإشارة إلى فئتين من تلك الفئات لا زالتا محل بحث إلى اليوم : فئة الأعداد التامة (المساوية لمجموع قواسمها) كالأعداد 1، 6، 28 و 496. وهناك فئة الأعداد المتحابة (نقول عن عددين إنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم المختلفة لأي منهما يساوى العدد الآخر) مثل العددين 220 و 284 (تأكد من ذلك). نلاحظ أن الرياضيين لا يزالون حتى الآن يكتشفون الأعداد المتحابة التي يبلغ عدد أرقامها آلاف الأرقام.

6
28
496
8128
33550336
8589869056
137438691328
2305843008139952128

الأعداد التامة الثمانية الأولى



4 المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد



تمهيد

1

حل المعادلات الآتية :

$x + 6 = -2$ ؛ $\frac{x}{2} - 4 = 9$ ؛ $3x + 4 = 2x - 13$.

2

حل المعادلات الآتية :

$5(x-1) - (2x-1) = 3 - x$ ؛ $0,1x + 0,13 = -0,15$ ؛ $(2x - \frac{1}{2}) + (4x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$.

3

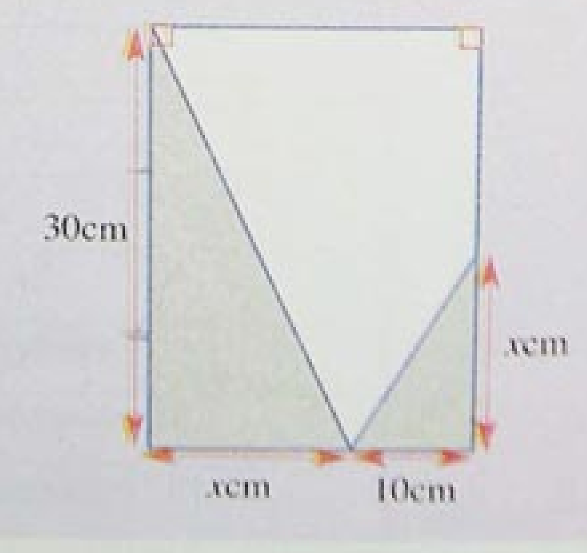
ثلاثة أعداد طبيعية متتالية، إذا أنقصنا من الأول 3 وأضفنا إلى الثاني 6 وأخذنا خمس الثالث يكون عندئذ المجموع 77، عين الأعداد الثلاثة.

4

عمر الأب 30 سنة وعمر الابن 10 سنوات، بعد كم سنة يصبح عمر الأب ضعف عمر الابن (نرمز لعدد السنوات بالحرف x) ؟

5

احسب العدد x بحيث تكون مساحة الجزء المظلل تساوي نصف مساحة المستطيل.

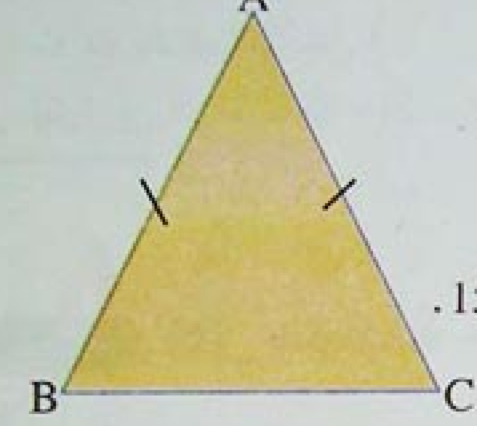


أنشطة



تريض مسألة

محمد وزكريا وصهيب ثلاثة إخوة، مجموع أعمارهم 60 سنة. ما هو عمر كل واحد منهم، إذا علمت أن عمر محمد هو 3 مرات عمر زكريا، وعمر صهيب يقل بعشر سنوات عن عمر محمد؟

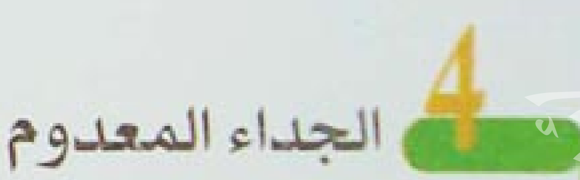




ليكن المثلث ABC المتساوي الساقين رأسه الأساسي A.
إذا ضاعفنا قاعدته BC، نتحصل على مثلث متقايس الأضلاع محيطه 15 cm.
ما هي أطوال أضلاعه؟

3

كانت درجة الحرارة ليوم الخميس 10°c، نريد معرفة درجة حرارة يوم الثلاثاء الذي يسبق هذا الخميس.
تغيير درجات الحرارة كانت كالتالي :



4

الجداء المعدوم

1 **إليك العبارة :** $E=(x-3)(x+2)$.

إذا كان $x=3$، احسب العبارة E.

إذا كان $x=-2$، احسب العبارة E.

أكمل ما يلي :

إذا كان $a=0$ **أو** $b=0$ فإن، $ab=......$.

2 اوجد قيمة العدد x الذي يحقق :

$(x+5)(x-\frac{2}{3})=0$.

أكمل ما يلي :

إذا كان $ab=0$، فإن $a=......$ **أو** $b=......$.



أنشطة

5 معادلة جداء معدوم

1 **لتكن المعادلة :** $(x+4)(x-5)=0$.

ما هو الطرف الأيسر لهذه المعادلة ؟ على أي شكل مكتوب.

ما هي درجة كل عامل ؟

ما هو طرفها الأيمن ؟

نقول إن المعادلة $(x+4)(x-5)=0$ هي معادلة جداء معدوم.



6 حل معادلة جداء معدوم

1 حل المعادلتين التاليتين :

(1) $x-\frac{2}{7}=0$ ؛

(2) $x+\frac{3}{7}=0$.

نقول إن حلّي المعادلتين (1) و (2) هما حلان للمعادلة $(x-\frac{2}{7})(x+\frac{3}{7})=0$.

2 حل المعادلتين التاليتين :

$(2x+1)(7-5x)=0$.

$(x-3)(x+1)=0$.



7 المعادلة التي تؤول إلى معادلة جداء معدوم

إليك المعادلة :

(1) $(x+1)^2-25=0$.

1- تحقق أن : $(x+1)^2-25=x^2+2x-24$.

تسمى المعادلة $x^2+2x-24=0$ معادلة من الدرجة الثانية.

2- حلل العبارة $(x+1)^2-25$.

3- حل المعادلة $(x-4)(x+6)=0$.

4- أكمل :

حل المعادلة $x^2+2x-24=0$ يؤول حلّها إلى حل المعادلة ......

5- حل المعادلتين :

1) $(2x-1)(x+5)-(2x-1)(3x-2)=0$.

2) $6x^2+7x=0$.



معـارف

1 ترييض مسألة

لفهم مسألة يجب:
- البحث عن المجهول أو المجاهيل.
- كتابة بعض جمل النص باستعمال المجهول أو المجاهيل..
- البحث عن العلاقات بين المجاهيل (إن كانت موجودة).

لحل مسألة يجب :
- اختيار المجهول المناسب.
- صياغة المسألة في شكل معادلة.
- حل المعادلة المحصل عليها.
- التحقق من صحة النتائج (معقوليتها، ملاءمتها للمعطيات).
- الاستخلاص (الإجابة عن السؤال).

مثال :

قرأت فاطمة كتابا مؤلفا من 324 صفحة، فإذا علمت أنها قرأت اليوم 7 صفحات أقل من الأمس و 15 صفحة أكثر من أمس الأول، وأنه قد بقي لها ثلاث وثمانين صفحة.
فكم صفحة قرأت هذا اليوم ؟

1) اختيار المجهول

لنرمز لعدد الصفحات التي قرأتها اليوم بالحرف x.

2) وضع المعادلة

عدد الصفحات التي قرأتها أمس هي : $x + 7$
عدد الصفحات التي قرأتها أمس الأول هي : $x - 15$
إذن فعدد الصفحات هو :

$$x + (x + 7) + (x - 15) + 83$$

ونعلم أن هذا العدد هو 324.

إذن المعادلة هي :

$$x + (x + 7) + (x - 15) + 83 = 324$$

3) حل المعادلة

$x + (x + 7) + (x - 15) + 83 = 324$ ؛

$x + x + 7 + x - 15 + 83 = 324$ ؛

أي : $3x + 75 = 324$ ؛

و بالتالي : $3x = 324 - 75$ ؛

أي : $3x = 249$ ؛

ومنه : $x = \dfrac{249}{3}$ ؛

إذن : $x = 83$.

4) التحقق من الحل

$$83 + (83 + 7) + (83 - 15) + 83 = 166 + 90 + 68$$
$$= 324$$

5) الإجابة عن السؤال

قرأت فاطمة اليوم 83 صفحة.

2 خاصية الجداء المعدوم

جداء عاملين معدوم يعني أحد هذين العاملين على الأقل معدوم.

مثال :

$5x = 0$ يعني أن $x = 0$ لأن $5 \neq 0$



3 حل معادلة جداء معدوم

لحل المعادلة من النوع $(ax + b)(cx + d) = 0$ حيث أن a و b و c و d أعداد حقيقية معلومة،
نحل المعادلتين $ax + b = 0$ و $cx + d = 0$.

مثال : لنحل المعادلة $(x - \frac{3}{4})(x + \frac{1}{5}) = 0$.

ينتج من المعادلة : $x - \frac{3}{4} = 0$ أو $x + \frac{1}{5} = 0$.

أي : $x = \frac{3}{4}$ أو $x = -\frac{1}{5}$.

إذن للمعادلة حلان هما : $\frac{3}{4}$ و $-\frac{1}{5}$.



4 حل معادلة يؤول حلّها إلى حل معادلة جداء معدوم

لحل معادلة ليست من الدرجة الأولى نتبع الخطوات التالية :
- نجعل طرفها الأيمن صفرا.
- نقوم بتحليل الطرف الأيسر لهذه المعادلة. نتحصل عندئذ على معادلة جداء معدوم من الدرجة الأولى.
- نحلّ هذه المعادلة الأخيرة.
- نستنتج حلول المعادلة الأولى.

مثال : حل المعادلتين التاليتين : **1)** $(2x + 3)(x - 2) = (5x + 1)(2x + 3)$: **2)** $(x - 1)(3 - x) + (x^2 + 4) = 0$.

حل المعادلة $(2x + 3)(x - 2) = (5x + 1)(2x + 3)$.

نجعل طرفها الأيمن صفرا.

$(2x + 3)(x - 2) - (5x + 1)(2x + 3) = 0$.

نحلل الطرف الأيسر :

$(2x + 3)[(x - 2) - (5x + 1)] = 0$.

$(2x + 3)(-4x - 3) = 0$.

نتحصل على معادلة جداء معدوم.

نحل المعادلة $(2x + 3)(-4x - 3) = 0$

ينتج من المعادلة : $2x + 3 = 0$ أو $-4x - 3 = 0$.

أي : $x = \frac{-3}{2}$ أو $x = \frac{-3}{4}$

إذن للمعادلة حلان هما : $-\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{4}$.

حل المعادلة $(x - 1)(3 - x) + (x^2 + 4) = 0$.

لا يمكن تحليل الطرف الأيسر لهذه المعادلة.

نقوم بتبسيط طرفها الأيسر.

$3x - 3 - x^2 + x + x^2 + 4 = 0$.

$4x + 1 = 0$.

لاحظ أن :

المعادلة من الدرجة الأولى.

و منه $x = -\frac{1}{4}$.

إذن للمعادلة حلّ هو : $-\frac{1}{4}$.

طرائق وتمارين محلولة

ترييض مسالة وحل معادلتها

طريقة

1) اختيار المجهول.
2) وضع المعادلة.
3) حل المعادلة.
4) التحقق من الحل.
5) الإجابة عن السؤال.

تمرين

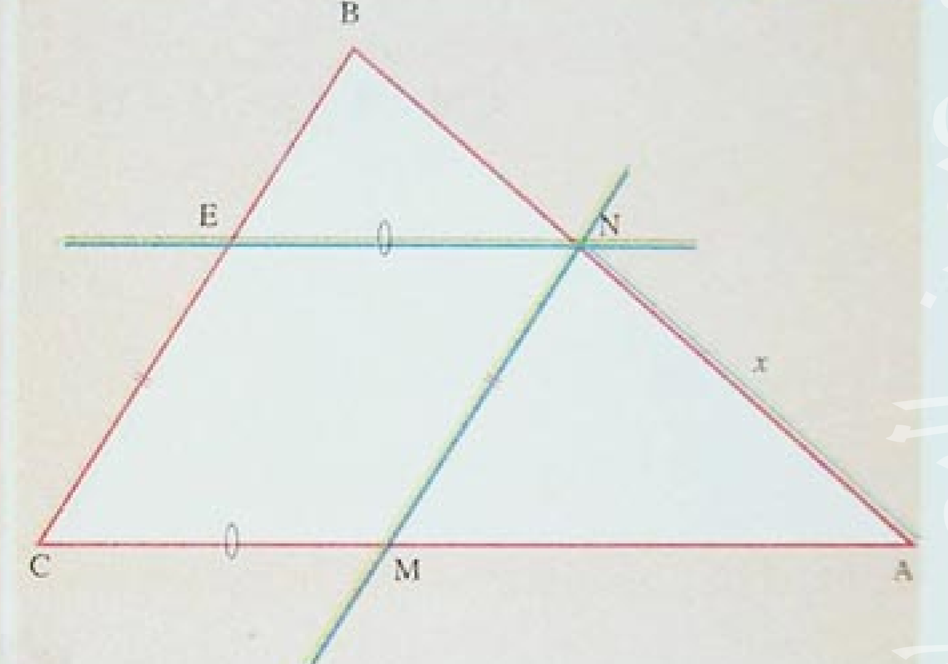
ABC مثلث حيث : $AB = 9\ cm$، $AC = 12\ cm$، $BC = 6\ cm$.

N نقطة من [AB]. المستقيم الذي يشمل N ويوازي (BC)، يقطع (AC) في M.

والمستقيم الذي يشمل N ويوازي (AC)، يقطع (BC) في E.

احسب AN بحيث يكون محيط متوازي الأضلاع NMCE يساوي 20 cm.

الشكل



الحل

1) المجهول هو AN نرمز له بـ x.

نعلم أن :
محيط المتوازي الأضلاع ECMN يساوي 20 cm.

يعني :
$NE + EC + CM + MN = 20$،

أي : $2\ NM + 2\ CM = 20$،

ومنه : $NM + CM = 10$. (1)

نكتب : NM بدلالة x و CM بدلالة x.

• في المثلث ABC

$N \in [AB]$ و $M \in [AC]$ و (BC) // (MN). نطبق خاصية طالس : $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{AB}$، **أي** $\frac{MN}{6} = \frac{AM}{12} = \frac{x}{9}$.

لدينا : $\frac{MN}{6} = \frac{x}{9}$ **ومنه** $MN = \frac{6}{9}x$، **أي** $MN = \frac{2}{3}x$.

$\frac{AM}{12} = \frac{x}{9}$ **ومنه** $AM = \frac{12}{9}x$، **أي :**

$AM = \frac{4}{3}x$ (1).

نعلم أن : $AM = AC - CM$، **أي :**

$AM = 12 - CM$ (2).

بمراعاة (1) و (2) **نجد :** $12 - CM = \frac{4}{3}x$ **ومنه** $CM = 12 - \frac{4}{3}x$.

2) وضع المعادلة

بالرجوع إلى المعادلة (1) نحصل على المعادلة : $\frac{2}{3}x + 12 - \frac{4}{3}x = 10$.

3) حل المعادلة $\frac{2}{3}x + 12 - \frac{4}{3}x = 10$. نكتب هذه المعادلة على الشكل $\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x = 12 - 10$،

و منه : $\frac{2}{3}x = 2$.

أي : $x = \frac{6}{2}$،

إذن : $x = 3$.

4) التحقق من صحة النتيجة

لنتحقق أن محيط المتوازي الأضلاع NMCE يساوي 20.

• $MN = \frac{2}{3}x$، **أي** $MN = \frac{2}{3} \times 3$، **و منه** $MN = 2$.

• $CM = 12 - \frac{4}{3}x$، **أي** $CM = 12 - \frac{4}{3} \times 3$، **و منه** $CM = 12 - 4$ **إذن** $CM = 8$.

نحسب $2MN + 2\,CM$.

$$\begin{aligned} 2MN + 2\,CM &= 2 \times 2 + 2 \times 8 \\ &= 4 + 16 \\ &= 20 \end{aligned}$$

5) الجواب $AN = 3\text{ cm}$.

معادلة يؤول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الأولى

طريقة

1) ننقل كل الحدود إلى الطرف الأيسر.

2) نكتب الطرف الأيسر على شكل جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) نستغل خاصية الجداء المعدوم.

تمرين

حل المعادلتين :

1) $(3x - 5)(2x - 1) = -3(2x - 1)$.

2) $x^2 - 2x + 1 = 5$.

الحل

1 $(3x - 5)(2x - 1) = -3(2x - 1)$.

تكتب هذه المعادلة على الشكل :

$(3x - 5)(2x - 1) + 3(2x - 1) = 0$،

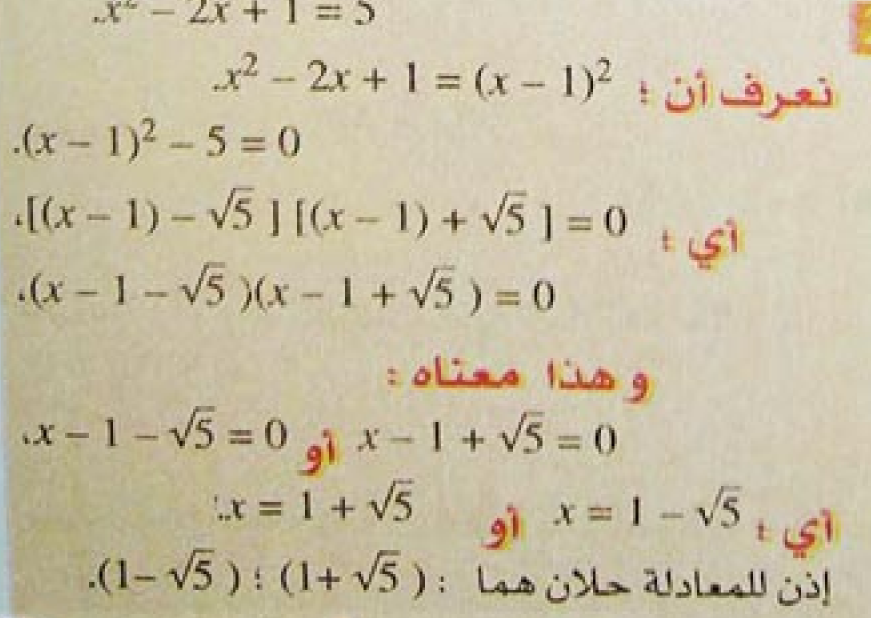
و منه $(2x - 1)(3x - 2) = 0$،

و هذا معناه :

$2x - 1 = 0$ **أو** $3x - 2 = 0$.

أي : $x = \frac{1}{2}$ **أو** $x = \frac{2}{3}$.

إذن للمعادلة حلان هما : $\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{2}{3}$.



2 $x^2 - 2x + 1 = 5$.

نعرف أن : $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

$(x - 1)^2 - 5 = 0$.

أي : $[(x - 1) - \sqrt{5}][(x - 1) + \sqrt{5}] = 0$،

$(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5}) = 0$.

و هذا معناه :

$x - 1 + \sqrt{5} = 0$ **أو** $x - 1 - \sqrt{5} = 0$.

أي : $x = 1 - \sqrt{5}$ **أو** $x = 1 + \sqrt{5}$:

إذن للمعادلة حلان هما : $(1 + \sqrt{5})$ ؛ $(1 - \sqrt{5})$.

تمارين للتطبيق المباشر

المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1 من بين الأعداد 3 : 8− : 7 : 9− : 5 : 0 : 12− ،
ما هو العدد الذي يمثل حلّ المعادلة $2x + 5 = x - 3$ ؟

2 بين أن المعادلات التالية لها نفس الحل :

أ) $6x = -\frac{3}{2}$ ؛ ب) $2 + x = \frac{7}{4}$ ؛

جـ) $-3 + x = -\frac{13}{4}$ ؛ د) $\frac{-12}{5}x = \frac{6}{10}$.

3 حل المعادلات :

أ) $4x = 0$ ؛ $\frac{x}{5} = \frac{3}{15}$ ؛ $x + \frac{2}{3} = -\frac{7}{8}$.

ب) $3(5x - 1) = 30 - 5x$.

جـ) $-4(x - 2) = -3(x - 2)$.

د) $\frac{5x}{6} - 1 + \frac{x}{4} = x - \frac{1}{2}$.

هـ) $\frac{2x - 1}{5} - 3(\frac{x + 1}{10}) = \frac{1 - x}{5}$.

4 اوجد العدد b الذي يجعل حلّ المعادلة :
$b + x = 2x + 1$ مساويا لـ 1.

5 حل المعادلة :
$2(x + 1) - 3(x - 2) = -2(x - 2)$.

6 حل المعادلات :

1) $\frac{2x + 3}{2} = \frac{3x - 5}{3}$.

2) $\frac{x + 1}{2} + \frac{x - 2}{4} = \frac{5x}{6} + 2$.

3) $3x + 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}x + 6$.

4) $2(x + \sqrt{2}) - 3 = x\sqrt{2} + 1$.

7 اوجد خمسة أعداد طبيعية متتالية بحيث يكون مجموعها يساوي 75.

8 اوجد عددين طبيعيين بحيث يكون أحدهما ضعف الآخر ومجموعهما 12.

9 مستطيل عرضه هو $\frac{2}{3}$ طوله ومحيطه 240.
اوجد طول وعرض المستطيل.

10 STR مثلث حيث :
قيس الزاوية $\hat{S}$ هو ضعف قيس الزاوية $\hat{T}$.
وقيس الزاوية $\hat{R}$ يزيد بمقدار $5°$ عن ضعف قيس الزاوية $\hat{S}$.
• اوجد قيس كل من زوايا المثلث STR.

المعادلة التي تؤول إلى معادلة من الدرجة الأولى

11 حل المعادلات الآتية :

أ) $(9 - x)(4x - 1) = 0$.

ب) $2(x - 3) = 0$.

جـ) $x(x + 1) = 0$.

د) $3x(x - 5) = 0$.

12 حل المعادلات :

1) $(5 - 3x)(x - 7) = 0$.

2) $(x - 1)(x - \sqrt{2}) = 0$.

3) $(\frac{x}{2} - 3)(x + 1) = 0$.

13 1- حلّل العبارات التالية :

• $x^2 + 8x + 16$.

• $4x^2 - 1$.

• $3x^2 - \frac{2}{5}x$.

• $x^2 - 5x$.

2- حل المعادلات :

• $x^2 + 8x + 16 = 0$.

• $4x^2 - 1 = 0$.

• $3x^2 - \frac{2}{5}x = 0$.

• $x^2 - 5x = 0$.

14 اوجد عددا طبيعيا بحيث يكون مربعه مساويا لضعفه.

15 1- انشر وبسط العبارتين التاليتين :

1) $(4x - 3)(7x + 1)$. 2) $(x - 1)(4x - 3)$.

2- حل المعادلتين:

• $28x^2 - 17x - 3 = 0$.

• $4x^2 = 7x - 3$.



تمـــاريــن

1 مربعان طول ضلع أحدهما 5 أمثال طول ضلع الآخر ومجموع مساحتهما $2106\ m^2$.

اوجد طول ضلع كل من المربعين.

2 بين أن :

$48x^2 - 28x + 4 = (7x-2)^2 - x^2$.

A و B عبارتان جبريتان حيث :

$A = 48x^2 - 28x + 4$.

$B = (6x-2)^2 - (4x-7)(6x-2)$.

• حلّل العبارتين A و B.

• حل المعادلات :

$A = 0$ ؛ $B = 0$ ؛ $A = B$.

3 A عبارة جبرية حيث :

$A = 4x^2 + 12x + 9$.

• احسب قيمة A من أجل : $x = \frac{3}{2}$ ؛ $x = 0$ ؛ $x = -\frac{3}{2}$.

• حل المعادلة $A = 0$.

4 حل المعادلات :

1) $\frac{3x+3}{8} + \frac{3x-2}{2} = x - \frac{5}{8}$.

2) $x - \frac{x-1}{2} = 2 - \frac{x+1}{3}$.

3) $2x^2 + 10x = 0$.

4) $10x^2 - 2x = 0$.

5) $7x^2 = -12x$.

5 B عبارة جبرية حيث :

$B = (5x-2)(2x-7) - (25x^2 - 4)$.

1) بين أن :

$B = -15x^2 - 39x + 18$.

2) احسب قيمة B من أجل :

$x = \frac{2}{5}$ ؛ $x = \frac{-5}{3}$.

3) حلل $25x^2 - 4$، ثم حلل العبارة B.

4) استنتج حلول المعادلة $B = 0$.

6 مستطيل طوله $(2x-8)$ وعرضه $(x-3)$.

اوجد قيم x التي تجعل مساحة هذا المستطيل معدومة.

7 • حلل العبارتين A و B حيث :

$A = 3x - 6$ ؛ $B = x^2 - 9$.

• اوجد حلول المعادلتين:

$(x^2 - 9) + (2x-1)(x-3) = 0$ ؛

$(x^2 - 4) - (3x - 6) = 0$.

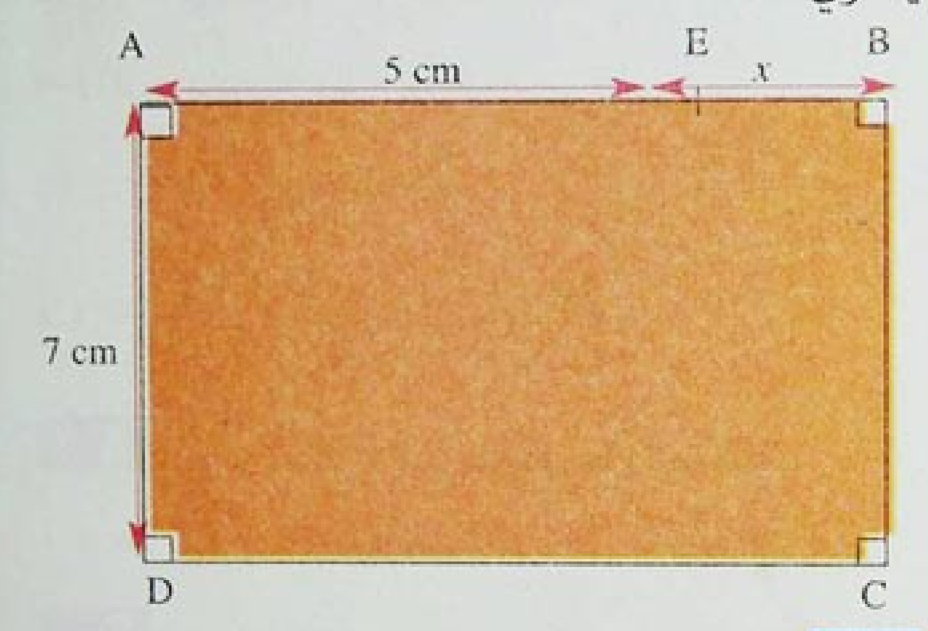
8 اوجد حلول المعادلات:

1) $x^2 = 17$ ؛ $x^2 - 3 = 1$.

2) $(x-9)(x+1) + 8x = 0$ ؛ $2x^2 + 1 = x^2 + 8$.

9 • عبر عن مساحة المستطيل ABCD بدلالة x.

• اوجد قيمة x حتى يكون محيط المستطيل ABCD يساوي 32.



10 انشر الجداء $(3x-1)(2x+5)$.

لتكن العبارة الجبرية C حيث :

$C = (3x-1)(x+5) - (6x^2 + 13x - 5)$.

حل المعادلة $C = 0$.

11 أصحيح أم خاطئ ؟ :

ضع العلامة X في الخانة المناسبة.

1 - حلا المعادلة $4x(4-3x) = 0$ هي :

أ)☐ 4 و $\frac{4}{3}$ ، ب)☐ $\frac{4}{3}$ و 0 ، ج)☐ 4- و $\frac{4}{3}$.

2 - حلا المعادلة $(4x+5)+(3x-4) = 0$ هي :

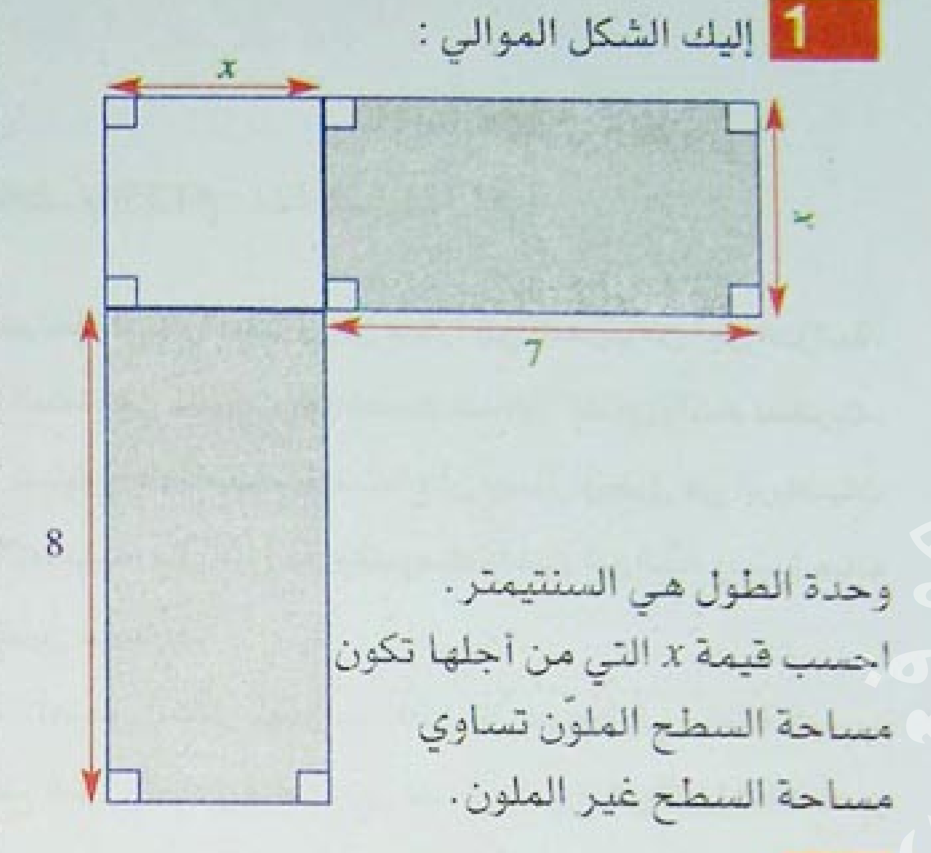
أ)☐ $\frac{4}{3}$ و $\frac{5}{4}$ ، ب)☐ $\frac{-1}{7}$ ، ج)☐ 8-.

3 - حلا المعادلة $x^2 = 36$ هي :

أ)☐ 6 ، ب)☐ 6- ، ج)☐ ليس لها حلاً حقيقيا.

مســـائل

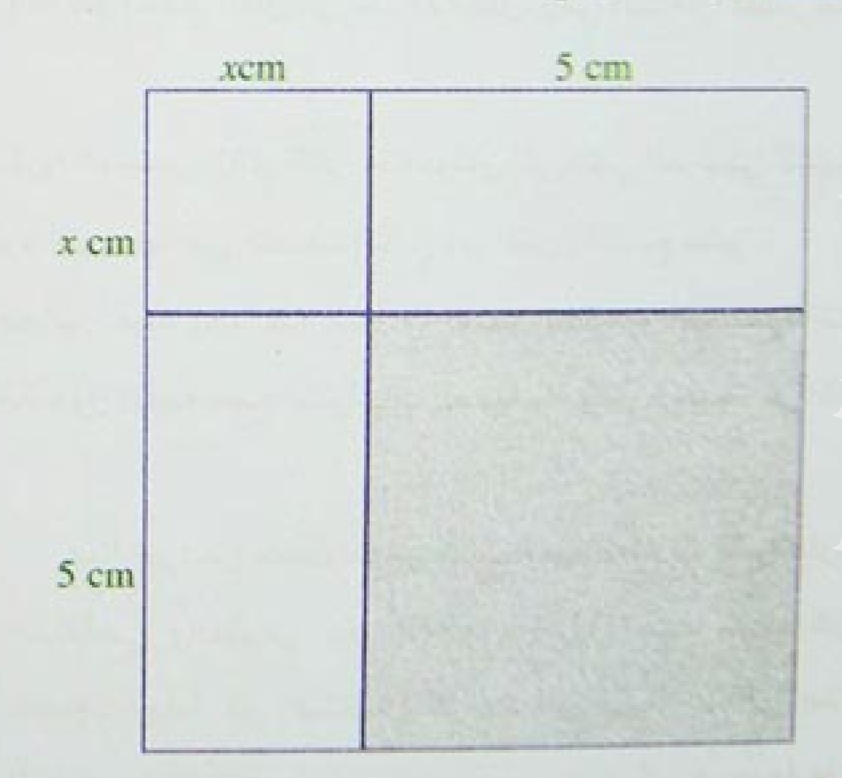
1 إليك الشكل الموالي :



وحدة الطول هي السنتيمتر.
احسب قيمة x التي من أجلها تكون مساحة السطح الملوّن تساوي مساحة السطح غير الملون.

2 احسب محيط مربع، إذا أضفنا لأحد أضلاعه 5m وأنقصنا لأحد أضلاعه 3m، نتحصل على مستطيل له نفس مساحة المربع.

3 إليك الموالي :



1) عبر بطريقتين مختلفتين عن مساحة الجزء غير الملون.

2) احسب قيمة x، إذا علمت أن مساحة الجزء غير الملوّن يساوي $39\ cm^2$.

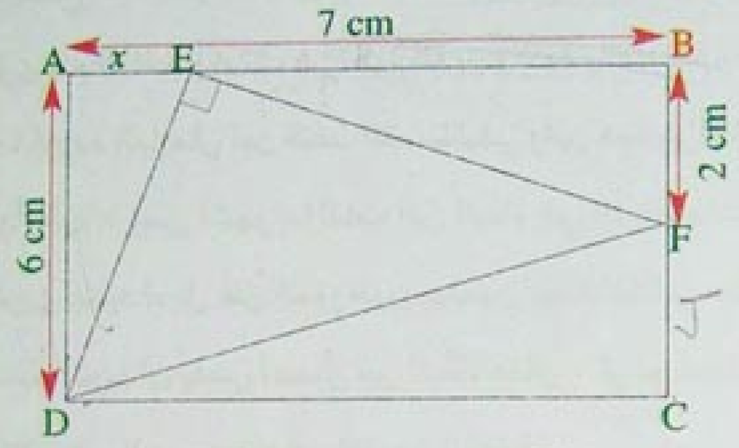
4 ممّر مستطيل الشكل طول محيطه $38\ m$، إذا نقص من طوله 4 m وزاد عرضه 1m، نقصت مساحته $10m^2$.

ما هو طول وعرض الممر ؟

5 صفيحة مربعة الشكل تعرضت للحرارة. فتمددت طولاً بمقدار 2 وعرضًا بمقدار 1,5، ونتيجة لذلك زادت مساحتها بمقدار 34,5 (وحدة الطول هي السنتيمتر).

أوجد بعدي الصفيحة قبل هذا التغيير وبعده.

6 ABCD مستطيل طوله 7 cm وعرضه 6 cm.



E نقطة من [AB] بحيث $AE = x\ cm$.

1) انشر وبسط العبارة $2(x - 4)(x - 3)$.

2) ما هي قيم x التي من أجلها يكون المثلث EFD قائمًا في E.

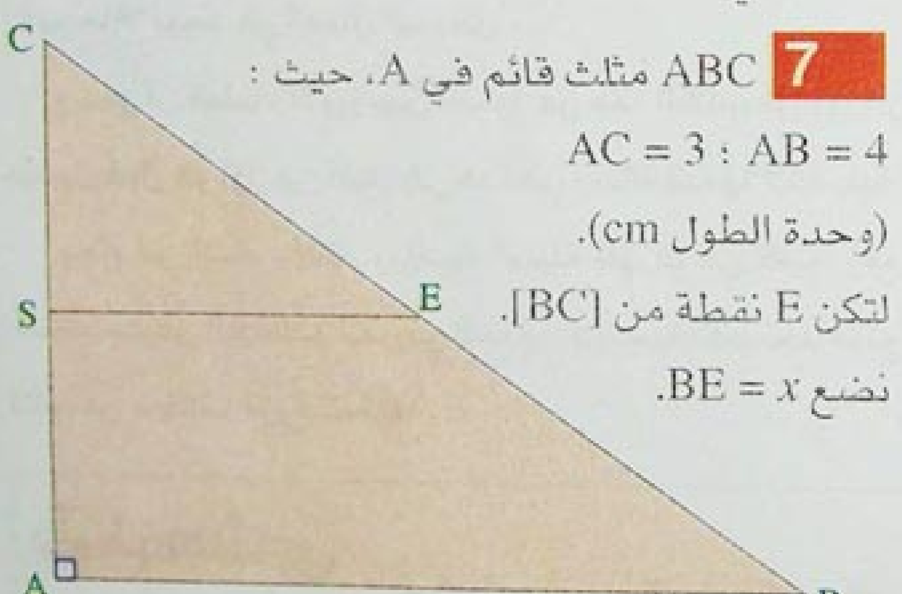
7 ABC مثلث قائم في A، حيث :

$AC = 3$ ؛ $AB = 4$

(وحدة الطول cm).

لتكن E نقطة من [BC].

نضع $BE = x$.



المستقيم الذي يشمل E ويوازي (AB)، يقطع (AC) في S.

- عبّر عن الطول CE بدلالة x.
- بيّن أنّ :

$SE = 4 - 0{,}8x$.

$SC = 3 - 0{,}6x$.

- احسب قيمة x، إذا كان محيط شبه المنحرف SEBA يساوي 9.



من التاريخ

ابن البنّاء المراكشي (654هـ/1256م-721هـ/1321م)

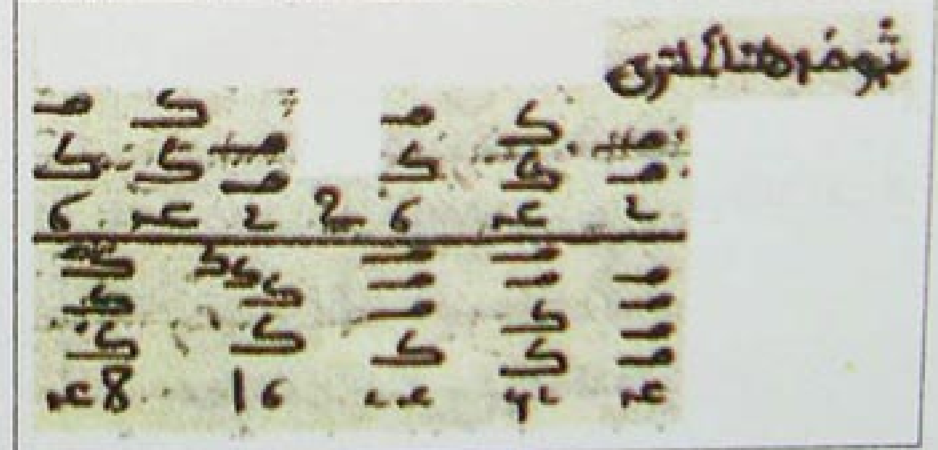
حياته : ولد ابن البنّاء بمراكش، وهناك من يقول أن أصله من غرناطة أو سرقسطه ورحل مبكرا إلى المغرب من أجل الدراسة. وعرف بابن البنّاء لأن أباه كان بنّاء. وقد وُصِف بأنه "كان شيخ شيوخ العلماء في عصره". كما تحدث عنه ابن خلدون وأشاد بعبقريته. وذكرت جميع المصادر أنه كان مثلا للعالم المتواضع النزيه الذي لا تستهويه المناصب. واستطاع أن يصول ويجول في الرياضيات والمنطق وعلم الفلك، وكذلك في علوم الدين واللغة والفلسفة والعلوم التطبيقية، مثل الزراعة. وقد وصلت أخبار ابن البنّاء وسيرة حياته بفضل ما أورده العالمان ابن قنفذ القسنطيني وابن هيدور التادلي اللذين عاصراه.

من آثاره : ومن أشهر مؤلفات ابن البنّاء في الرياضيات كتاب "تلخيص أعمال الحساب" الذي ظلّ مرجعا في منطقة المغرب خلال قرون عديدة، بل ظلّ المؤرخون يهتمون بهذا الكتاب حتى مطلع القرن الحادي والعشرين. لقد قيّم مؤرخ الرياضيات المعاصر أحمد سليم سعيدان بعض أعمال ابن البنّاء فقال : "لو لم نعرف كتابي الكرجي والسموأل لقلنا إن كتاب الجبر والمقابلة لابن البنّاء هو أحسن كتاب في الجبر وضع في القرون الوسطى".

وهناك كتاب آخر لابن البنّاء حظي باهتمام خاص، وهو كتاب "رفع الحجاب عن علم أعمال الحساب". قال عنه ابن خلدون: "... وهو مستغلق على المبتدئ بما فيه من البراهين الوثيقة المباني، وهو كتاب جدير بذلك. وإنما جاءه الاستغلاق من طريق البرهان ببيان علوم التعاليم، لأن مسائلها وأعمالها واضحة كلها، وإذا قصد شرحها، إنما هو إعطاء العلل في تلك الأعمال، وفي ذلك من العسر على الفهم ما لا يوجد في أعمال المسائل".

ويذكر أن العلماء الأوروبيين أخذوا عن هذا الكتاب من دون أن يذكروا المصدر الذي نقلوا منه. وكان الرياضي الفرنسي الشهير ميشيل شال هو أول من أشار إلى هذا في رسالة قدمها لأكاديمية العلوم الفرنسية في النصف الثاني من القرن التاسع عشر.

وجاء ابن البنّاء بأفكار رياضية أصيلة ظهرت في كتابه "رفع الحجاب" حيث نجد فيه مثلا ما يسمى بالكسور المستمرة التي استخدمت في الحساب التقريبي للجذور التربيعية. كما نجد نتائج هامة حول كيفية جمع المتواليات الحسابية. وقد ترك حوالي 100 كتاب في مختلف فروع المعرفة.



هذا جزء من مخطوط من كتاب "بغية الطلاب" لابن غازي المكناسي (المتوفى عام 919هـ/1513م) يثبت كيف كان علماؤنا روادا في استعمال الرموز الرياضية ... في هذا المقطع من المخطوط يحسب ابن غازي جداء كثيري حدود من درجة عالية بكل ارتياح.



استراحة

الرياضيات تتقدم

بعض فروع الرياضيات

يقوم الرياضيون بتصنيف الرياضيات منذ قديم الزمان نظرا لتزايد تفرعاتها يوما بعد يوم. وصارت الآن إعادة التصنيف وإثراءاته تتم مرة كل عشر سنوات. وهكذا أصبحت الرياضيات مصنفة إلى مئات ومئات الفروع. إليك بعضها علما أن كل فرع من هذه الفروع ينقسم إلى العديد من التفرعات الأخرى. نورد هذا ليطلع التلميذ على بعض المصطلحات والتسميات التي لا شك سوف تصادفه، وليدرك أن الرياضيات خصوصا، والعلم عموما، بحر لا حدود له.

1. التاريخ والسير الذاتية
2. المنطق الرياضي وأسس الرياضيات
3. نظرية المجموعات
4. التوفيقات
5. الترتيب والشبكات والبنى الجبرية المرتبة
6. الأنظمة الجبرية العامة
7. نظرية الأعداد
8. نظرية الحقول وكثيرات الحدود
9. الحلقات التبديلية والجبور
10. الهندسة الجبرية
11. الجبر الخطي والمتعدد الخطية، المصفوفات
12. الحقول التجميعية والجبور
13. الحلقات غير التجميعية
14. نظرية الفئات
15. نظرية الزمر
16. الزمر الطبولوجية
17. الدوال الحقيقية
18. القياس والمكاملة
19. الدوال ذات المتغير المركب
20. الدوال الخاصة
21. المعادلات التفاضلية العادية
22. المعادلات التفاضلية الجزئية
23. المعادلات الدالية والفروق المنتهية
24. المتتاليات والسلاسل
25. نظرية الأنظمة، التحكم
26. التقريبات والنشور
27. تحليل فوريي
28. التحليل التوافقي
29. التحويلات التكاملية
30. المعادلات التكاملية
31. التحليل الدالي
32. نظرية المؤثرات
33. حساب التغيرات والتحكم الأمثل
34. الهندسة
35. الهندسة التفاضلية
36. الطبولوجيا العامة
37. الطبولوجيا الجبرية
38. المنوعات
39. التحليل الشامل
40. الاحتمالات
41. الإحصاء
42. التحليل العددي
43. علم الحاسوب
44. الميكانيك الإحصائي وبنية المادة
45. بحوث العمليات والبرمجة الرياضية
46. نظرية الألعاب، العلوم الاجتماعية والسلوكية
47. البيولوجيا وعلوم طبيعية أخرى
48. علم الفلك والفيزياء الفلكية
49. النسبية
50. العلوم التربوية



5 المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول

تمهيد

1

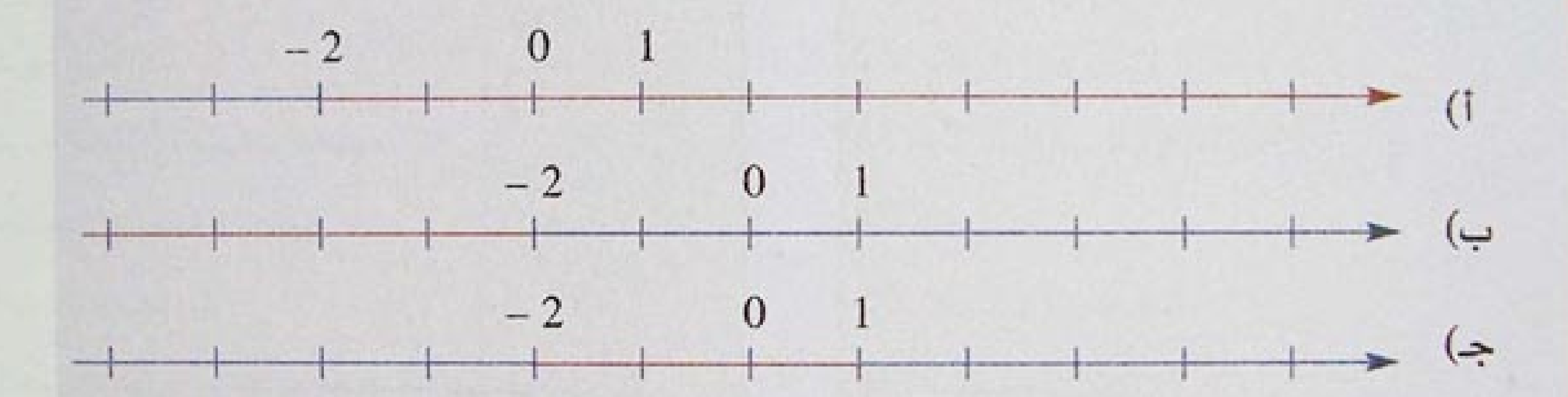
انقل، ثم أكمل المتباينات التالية :

إذا كان $a < 6$، فإن .... $a + 3$.

إذا كان $b < 12$، فإن .... $4b$، و .... $\frac{b}{3}$.

إذا كان $a < 5$، فإن .... $-3a$، و .... $\frac{a}{-2}$.

2



في كل حالة، ماذا نقول عن الأعداد الواقعة على الجزء الملوّن بالأحمر؟

3

من بين المعطيات الآتية، ما هي الصحيحة منها وما هي الخاطئة :

$4 \geq 2$ ؛ $\sqrt{2} \leq 1{,}4$ ؛ $1{,}33 \leq \frac{3}{4}$ ؛ $-2{,}9 < -2{,}09$ ؛ $3 \geq 3$ ؛ $-3 > -2$ ؛ $5 \leq 1{,}2$ ؛ $\pi > 3{,}143$.

أنشطة

1 المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول

يعمل صهيب وزكريا في شركتين مختلفتين.

يتقاض صهيب شهريا 18000 DA، و يضاف إلى هذا المبلغ 4500 DA على كل بعثة عمل يقوم بها.

يتقاض زكريا شهريا 20000 DA، و يضاف إلى هذا المبلغ 3000 DA على كل بعثة عمل يقوم بها.

1) ما هما دخلا صهيب وزكريا، إذا قام كل منهما ببعثة واحدة في الشهر ؟

2) ما دخلهما، إذا قام كل منهما ببعثتين في الشهر ؟

3) نفترض أنّ صهيب وزكريا يقومان بنفس عدد البعثات x شهريا .

عبّر بدلالة x عن الدخل الشهري لكل منهما.

4) ما هو عدد البعثات الشهرية الذي يجعل دخل صهيب الشهري أفضل من دخل زكريا ؟

أكمل ما يلي : من أجل $x > 1$. يكون : $3000x + 20000$ .... $4500x + 18000$.

تسمى الكتابة $3000x + 20000$ ...... $4500x + 18000$ متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

2 حلول متراجحة

من بين الأعداد 2، 5، 3، 2–، 0، 4+. عيّن تلك التي تحقق المتباينة : $4x - 1 \geq 3x + 2$.

- تسمى الأعداد التي تجعل المتباينة صحيحة حلول المتراجحة.

3 حل متراجحة

حل متراجحة هو ايجاد مجموعة حلولها.

حل المتراجحتين: $5x + 2 > 3x - 1$ ؛ $3x - 2 < 6x + 7$.

ملاحظة

لحل متراجحة نتبع نفس خوارزمية حل معادلة مع مراعاة الخواص المتعلقة بضرب أو قسمة طرفي المتباينة في عدد سالب.

أتمم خطوات الحل :

1

$5x + 2 > 3x - 1$:

أي : $5x$ ...... $3x > -1$ ...... 2 :

و بالتالي : .... > .... :

و منه : $x > -\frac{3}{2}$.

كل قيم x الأكبر تماما من $-\frac{3}{2}$

هي حلول المتراجحة $5x + 2 > 3x - 1$.

2

$3x - 2 < 6x + 7$:

أي : 2 ...... < 7

$3x$ ...... $6x$:

و بالتالي : .... < .... :

و منه : x .... -3 .

كل قيم x .... من 3– هي حلول المتراجحة $3x - 2 < 6x + 7$.



4 التمثيل البياني لمجموعة حلول متراجحة

تمثّل مجموعة حلول المتراجحة على مستقيم عددي.

المتراجحة	حلول المتراجحة	التمثيل البياني لحلولها (الجزء الملوّن)
$x \geq 2$	كل قيم x الأكبر من أو تساوي 2	0 2
$x > -2$	كل قيم x الأكبر تماما من -2	-2 0
$x < 3$	كل قيم x الأصغر تماما من 3	0 3

اعتمادا على الأمثلة أعلاه، حل المتراجحات الآتية،
ومثل مجموعة حلولها :

أ) $3x < 18$.

ب) $-5x \leq 25$.

جـ) $-4x + 6 \geq -20 - 2x$.

د) $3x + 2 > x - 6$.

تذكرة

a و b و c أعداد حقيقية.

إذا كان a > b و c موجبا، فإن a x c > b x c.

إذا كان a > b و c سالبا، فإن a x c < b x c.

5 حل مسألة

تزن شاحنة فارغة 3,850 t. وقد حمّلت بأكياس إسمنت، يزن كل منها 50 kg. تعبر الشاحنة جسرا حمولته القصوى 6t.

صل بسهم.

عدد الأكياس •	• $50x$
حمولة الشاحنة •	• x
الوزن الكلي للشاحنة •	• $50x + 3850$

- عبّر رياضيا عن الجملة :
وزن الشاحنة لا يتعدى 6t.
- ما هو عدد الأكياس التي يمكن نقلها ؟



معارف

1 متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

كل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول x تؤول إلى متراجحة من الشكل $ax < b$ أو $ax > b$ أو $ax \leq b$ أو $ax \geq b$.

مثال :

(1) المتراجحة $7x + 2 > x + 5$.
تعني $7x - x > -2 + 5$.
أي $6x > 3$.

(2) المتراجحة $3x + 2 \leq 7x - 4$.
تعني $3x - 7x \leq -2 - 4$.
أي $-4x \leq -6$.

2 حل متراجحة

حل متراجحة هو ايجاد كل القيم الممكنة للمجهول حتى تكون المتباينة صحيحة. هذه القيم هي حلول المتراجحة.

مثال : لحل المتراجحة $3(x - 1) < 5x + 4$.
نلاحظ أنّها تعني $3x - 3 < 5x + 4$.
أي $3x - 5x < 3 + 4$.
و هذا يكافئ $-2x < 7$.
ومنه $x > -\frac{7}{2}$.

- كل قيم x الأكبر من $-\frac{7}{2}$ هي حلول المتراجحة $3(x - 1) < 5x + 4$.
- العدد -2 حل للمتراجحة لأن المتباينة $\underbrace{3(-2 - 1)}_{-15} < \underbrace{5(-2) + 4}_{-6}$ صحيحة.
- العدد $-\frac{7}{2}$ ليس حلا للمتراجحة لأن المتباينة $\underbrace{3\left(\left(\frac{-7}{2}\right) - 1\right)}_{-13.5} < \underbrace{5\left(\frac{-7}{2}\right) + 4}_{-13.5}$ ليست صحيحة.

3 تمثيل حلول متراجحة بيانيا

تُمثّل مجموعة حلول المتراجحة على مستقيم عددي.

حلول المتراجحة $x > a$ تمثل بيانيا.

حلول المتراجحة $x \leq a$ تمثل بيانيا.

مثال :

أ) $x \leq +1$.

ب) $x > -3$.

طرائق وتمارين محلولة

حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

طريقة لحل متراجحة،
- نتبع نفس خوارزمية حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد،
مع مراعاة الخواص المتعلقة بضرب طرفي المتباينة في عدد سالب.
- نستنتج بجملة رياضية أو بتمثيل بياني مجموعة الحلول على مستقيم مدرج (نلوّن الجزء الذي يمثل مجموعة الحلول ونشطب الجزء الآخر).

تمرين حل المتراجحة : $-3x + 5 < 2x + 2$.

الحل

$-3x + 5 < 2x + 2$ ،

أي : $-3x - 2x < -5 + 2$ ،

و هذا يكافئ : $-5x < -3$.

نضرب طرفي المتراجحة $-5x < -3$ في العدد السالب $-\frac{1}{5}$.

فنحصل على المتراجحة : $-\frac{1}{5} \times (-5x) > -\frac{1}{5} \times (-3)$ ؛

و منه $x > \frac{3}{5}$.

الجملة الرياضية حلول المتراجحة هي :
كل قيم x الأكبر تماما من $\frac{3}{5}$

التمثيل البياني

0 ، $\frac{3}{5}$ ، 5



تمارين للتطبيق المباشر

المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1 نعتبر المتراجحة : $4x + 7 > 2 - 3x$.

أ) هل العدد 0 حل لهذه المتراجحة ؟ (علل).

ب) هل العدد -1 حل لهذه المتراجحة ؟ (علل).

جـ) حل المتراجحة $4x + 7 > 2 - 3x$.

ومثّل مجموعة حلولها على مستقيم مدرّج.

2 تحقق من أن الأعداد 0 ؛ -3 ؛ 5 هي حلول المتراجحات التالية :

أ) $3x + 5 \leq 4x + 8$.

ب) $4x + 3 < -2x + 43$.

3 حل ذهنيا المتراجحات التالية :

أ) $-5x \leq 3$ ؛ $3x > 6$.

ب) $-4x + 4 < 0$ ؛ $2x - 3 < 1$.

4 أكمل الجدول.

المتراجحة	التمثيل البياني لمجموعة حلولها (الجزء الملوّن بالأحمر)
	-3 ؛ 0
	0 ؛ 4
	0
	0 ؛ 1

5 حل المتراجحة : $-4y + \frac{1}{2} \geq -9$.

1) مثّل بيانيا مجموعة حلولها.

2) ما هي قيم y الطبيعية التي تمثل حلول المتراجحة ؟

6 حل المتراجحات التالية:

1) $3(2x - 1) + 2(5x - 4) > x + 4$.

2) $\frac{-4}{7}x + 4 < 0$.

3) $\frac{3x - 2}{4} < -2$.

4) $\frac{5x + 1}{6} > \frac{3x - 3}{8}$.

7 حل المتراجحات الآتية ومثّل مجموعة حلول كل منها بيانيا:

1) $2x + 3 \leq \frac{1}{5}$.

2) $-\frac{2}{3}x - 1 \leq \frac{1}{4}$.

3) $-4x - 3 < 2x + 2$.

4) $\frac{2}{3}x - \frac{4 - x}{5} \leq x$.

5) $\frac{5x}{9} < \frac{25}{18}$.

6) $-\frac{3}{4}x \leq 6$.

7) $-x + 11 < 3x + 31$.

8) $-2x + 1 \leq -x + 2$.

9) $\frac{x + 3}{4} + 1 > x + \frac{x + 1}{2}$.

10) $x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

8 من بين الأعداد التالية : -4 ؛ 4 ؛ -7 ؛ 0.

- ما هي التي تمثّل حل للمتراجحة $1 - 5x \leq 21$ ؟
- حل المتراجحة $3x - 2 > x - 4$، ومثل مجموعة حلولها بيانيا.



تمارين

1 مستطيل طوله 12 cm وعرضه b حيث $0 < b \leq 12$.

- عبر عن المحيط P للمستطيل بدلالة b.
- ما هي قيم b التي من أجلها $P > 36$ ؟
- عبر عن المساحة S للمستطيل بدلالة b ؟
- ما هي قيم b التي من أجلها $S < 114$ ؟

2 لتكن العبارة الجبرية A حيث :

$A = \frac{3x-2}{4}$.

1) احسب A، لمّا $x = \frac{7}{3}$.

2) هل العدد $\frac{7}{3}$ حل للمتراجحة $\frac{3x-2}{4} < 2$ ؟

3) حل المتراجحة $\frac{3x-2}{4} < 2$.

3 1) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$ عددا ناطقا.

2) حل المتراجحة $x\sqrt{3} - 2 > \sqrt{3}$.

4 حل المعادلتين و المتراجحتين :

1) $x(2x-7) = 0$.

2) $4x^2 = 100$.

3) $\frac{5x+1}{6} > \frac{3x-3}{8}$.

4) $3x - 4 \leq 5(x-1)$.

5 ABC مثلث قائم في A بحيث $AB = 16$ cm.

عين حصرا لطول الضلع [AC] بحيث تكون مساحته تساوي على الأكثر 72 cm^2 وعلى الأقل 48 cm^2.

6 1) حل المعادلتين :

أ) $(3-4x) - (2x-1) = 0$.

ب) $(3-4x)(2x-1) = 0$.

2) حل المتراجحة $3 - 4x > 2x - 1$.

ومثّل مجموعة حلولها بيانيا.

7 لتكن العبارة D حيث :

$D = (3x-1)^2 - (x-1)(9x+6)$.

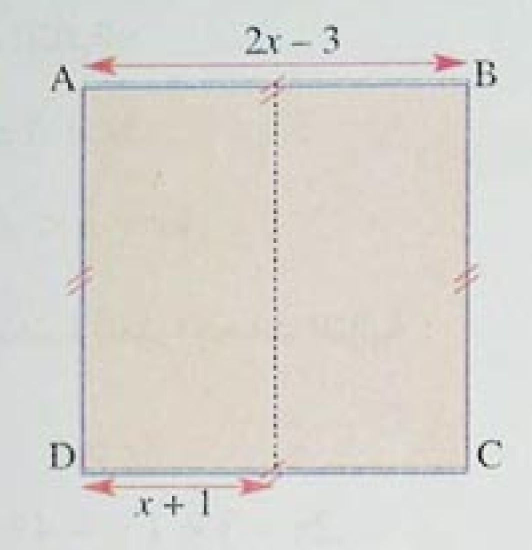
1) انشر وبسط D.

2) حل المتراجحة $D \geq 1$.

3) حلّل العبارة E حيث $E = (3x-2)^2 - 9$.

4) حل المعادلة $E = 0$.

8 ABCD مربع طول ضلعه $2x - 3$، حيث $x \geq 4$.



1) بين أنّنا نستطيع التعبير عن مساحة المستطيل BCEF بالعبارة $A = (2x-3)^2 - (2x-3)(x+1)$.

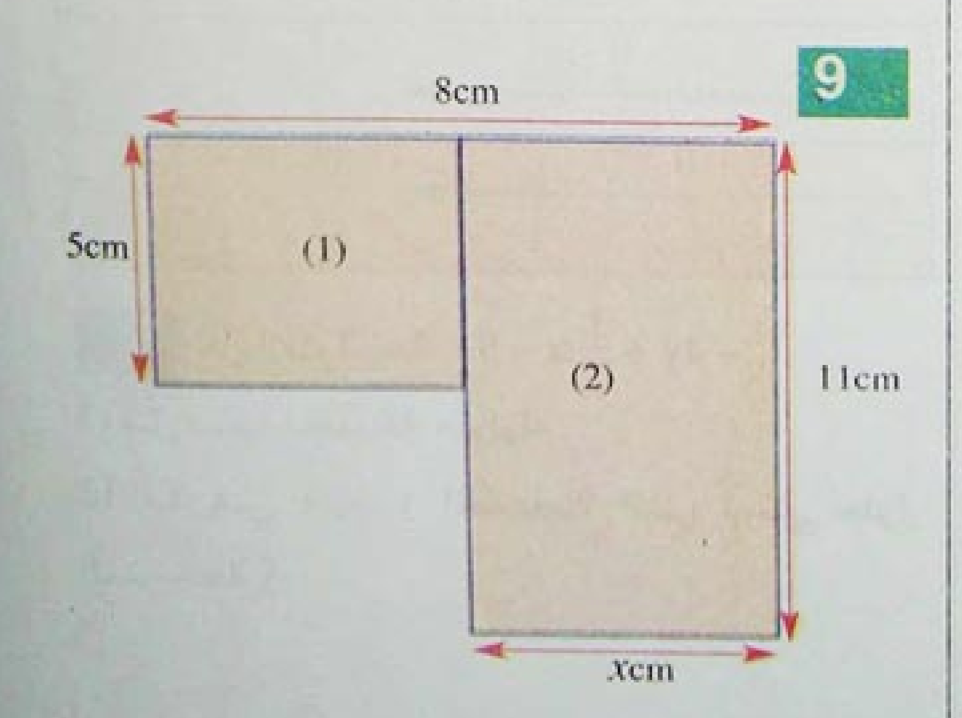
2) انشر، ثم بسط A.

3) حلل A.

4) حل المعادلة $(2x-3)(x-4) = 0$.

5) ما هي قيمة x التي من أجلها تكون مساحة BCEF معدومة ؟

9



من أجل أي قيم x يفوق محيط المستطيل (1) محيط المستطيل (2).

مسائل

1 نمثل قاعة مستطيلة بالمستطيل ABCD، الموضح في الشكل، والتي يمكن تقسيمها بحاجز متحرّك ممثل بقطعة مستقيم [MN].

الأطوال معبر عنها بالمتر وهي كالتالي :

$AD = 10\ m$ ؛ $DC = 30\ m$ ؛ $MB = xm$.

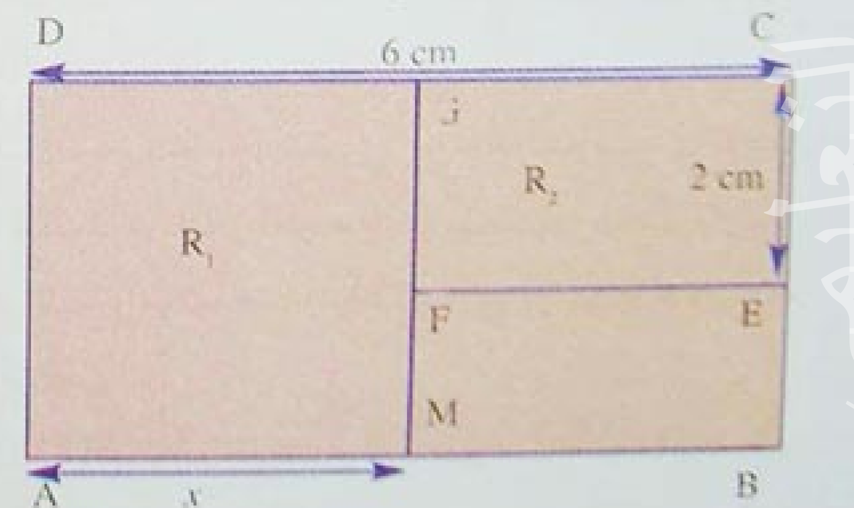
1) ماذا يُمثل الجداء $10\,(30 - x)$ المعبر عنه بـ m^2 ؟

2) ماذا يُمثل الجداء $10x$ المعبر عنه بـ m^2 ؟

3) حل المتراجحة $300 - 10x < 40x$.

4) اوجد قيم x التي من أجلها تكون مساحة الجزء AMND أقل بأربع مرات من مساحة الجزء MBCN.

2 إليك الشكل الآتي :



ABCD مستطيل بحيث $AD = BC = 3\ cm$.

M نقطة من القطعة [AB] بحيث :

$AM = x$ مع $0 < x < 6$ و x معبر عنه بالسنتيمتر.

نسمي R_2 المستطيل FECG

و R_1 المستطيل AMGD.

1) ليكن P_1، P_2 محيطي المستطيلين R_1، R_2 على الترتيب معبرا عنهما بـ cm.

أ) احسب P_1، P_2 بدلالة x.

ب) من أجل أي قيمة لـ x يتساوى المحيطان P_1 وP_2.

2) لتكن S_1، S_2 مساحتي المستطيلين R_1 و R_2 على الترتيب معبرا عنهما بـ cm^2.

أ) احسب S_1 و S_2 بدلالة x.

ب) من أجل أي قيم لـ x يكون لدينا : $S_1 < S_2$.

3 أراد فلاح أن يزرع قطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها 80 m وعرضها لم يقرره بعد.

يودّ هذا الفلاح أن يكون محيط هذه القطعة أقل من 240 m وأن تزيد مساحتها عن $300\ m^2$.

1) عبّر عن ذلك بمتراجحتين.

2) حل هاتين المتراجحتين، ثم أعط القيم الممكنة لعرض القطعة x.

4 مستطيل بعداه 7 cm ؛ 16 cm. ماهو العدد x المعبر عنه بالسنتيمتر الذي يمكن إضافته إلى طوله وعرضه بحيث لا يتجاوز محيطه 86 cm ؟

5 ABC مثلث مساوي الساقين رأسه الأساسي A.

بحيث $AB = 8cm$ و $BC = 6cm$.

- I منصف [BC]، O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و xcm نصف قطرها.

1) احسب الطول AI.

2) بيّن أن $x^2 = (\sqrt{55} - x)^2 + 9$

- استنتج x.

3) بين أن $OI = \dfrac{23}{\sqrt{55}}$.



من التاريخ

السموأل المغربي (524 هـ/1130م-570هـ/1175م)

حياته : لم يتفق المؤرخون على تحديد مسقط رأس السموأل. فهناك من يقول إنه ولد بمدينة فاس المغربية، وهناك من يؤكد أنه ولد ببغداد بعد رحيل أسرته من المغرب إلى المشرق، أما وفاته فكانت بمَراغَة (أذربيجان). وينتسب السموأل إلى عائلة يهودية غادرت المغرب الأقصى نحو بغداد، وكانت تُعْنَى بالتعليم فاهتم السموأل بدراسة الرياضيات وبرع فيها، وانشغل أيضا بالطب.

وكان السموأل قد قدّم تاريخ حياته في كتابه "بذل المجهود في إفحام اليهود" حيث قال : " وشغلني أبي بالكتابة بالعلم العبري، ثم بعلوم التوراة وتفاسيرها ... (و)شغلني حينئذ بتعلم الحساب الهندي وحل الزّيجات ... وقرأت علم الطب ... فأما الحساب الهندي والزّيج فإني أحكمت علميْهما في أقل من سنة، وذلك حين كمل لي أربع عشرة سنة، وأنا في خلال ذلك لا أقطع القراءة في الطب ومشاهدة علاج الأمراض. ثم قرأت الحساب الديواني وعلم المساحة ... وقرأت الجبر والمقابلة".

تجوّل السموأل بعد تأليف أشهر كتاب له، وهو "كتاب الباهر في الجبر"، في أوطان عديدة، منها العراق وسوريا وباكستان وأفغانستان وأذربيجان. ويذكر في سيرة حياته أنه كان في مراغة بأذربيجان يوم 8 نوفمبر1163م. واعتنق هناك الإسلام بعد تفكير طويل وعميق مكنّه من مقارنة معتقدات وشعائر مختلف الأديان. ومن ثمّ كتب مؤلفه "بذل المجهود في إفحام اليهود". وكان من الطبيعي ألا يرضى الوالد عن فعل ولده. ولذا كان السموأل حريصا على عدم إغضاب والده فأجّل اعتناقه الإسلام بأربع سنوات؛ ثم كتب رسالة إلى أبيه شارحا سبب تخليه عن دينه الأصلي. وتألّم الأب لهذا القرار وعزم على السفر للالتقاء بابنه، لكنه توفي خلال رحلته ولم يلتقيا.

أسلوبه : يمتلك السموأل أسلوبا رياضيا متميزا شبيها بالأسلوب الحديث حتى أنك تخال نفسك أحيانا، وأنت تطالع "كتاب الباهر في الجبر"، أنك تقرأ كتابا حديثا في الرياضيات. فهو يقول مثلا : " ومن أراد أن يجد مطلوبا ما، أو البرهان على قضية ما، فليجعل مطلوبه مفروضا وينظر ما يلزم من ذلك ويلزم من لوازمه حتى ينتهي إلى معلومات بسيطة. فإن كانت صادقة ركّب ما حلّه وابتدأ من حيث انتهى به التحليل. وإن كانت تلك البسائط كاذبة علم استحالة مطلوبه فأضرب عنه".

ويلخص السموأل قواعد جمع وطرح الأعداد الموجبة والسالبة، التي تعتبر أساس الحساب الجبري، في هذه العبارات : "إذا نقصنا عددا زائدا من عدد ناقص بقي مجموع العددين ناقصا، وإذا نقصنا عددا ناقصا من ناقص أكثر منه بقي تفاضلهما ناقصا، وإن كان الناقص أقل من المنقوص بقي تفاضلهما زائدا، وإذا نقصنا الناقص من الزائد بقي مجموعهما زائدا". وبخصوص عملية ضرب تلك الأعداد الموجبة والسالبة يقول إن "ضرب الناقص في الزائد ناقص وفي الناقص زائد".

لقد أسهم السموأل في إثراء العديد من المواضيع الرياضية وتمكن من اكتشاف الكثير من أسرار الرياضيات. وللأسف فإن معظم مؤلفاته التي تقارب 85 مؤلفا قد اندثرت.



استراحة

الرياضيات تتقدم

تطور الآلة الحاسبة

بدأ الإنسان يهتم بالحساب وقواعده منذ ظهوره على وجه الأرض. لكنه لم يتفطن إلى تصميم آلة تساعده على القيام بالحسابات التي يجريها يوميا إلا بعد قرون وقرون. فالمؤرخون يجمعون على أن أول آلة حاسبة كانت تلك التي ظهرت في الصين خلال القرن التاسع قبل الميلاد. وهي المسماة "المِعداد الصيني". إليك الجدول التالي الذي يلخّص بعض المراحل الأخيرة التي مرّت بها الآلة الحاسبة :

السنة والحدث	السنة والحدث
1930 : ابتكار آلة حاسبة ميكانيكية.	**1971** : ظهور برمجيات تربوية.
1935 : صنع آلة حاسبة تقوم بعملية ضرب واحدة في الثانية.	**1971** : ظهور أولى الحواسيب الشخصية.
1937 : نشر مبدأ تصميم آلة حاسبة.	**1972** : ظهور أول حاسبة علمية جيبية. ومن ثم اختفت المساطر الحسابية بدون رجعة.
1939 : تصميم أول آلة حاسبة إلكترونية.	**1973** : ظهور حاسبة تعوّض المسطرة الحاسبة.
1941 : تصميم آلة حاسبة تحل مسائل رياضية مختلفة في آن واحد.	**1974** : ظهور أولى الحاسبات العلمية القابلة للبرمجة.
1943 : ظهور أول حاسوب إلكتروني قابل للبرمجة.	**1977** : ظهور أول حاسبة إلكترونية مزودة بساعة ومنبّه ويومية.
1944 : إنشاء أول حاسوب رقمي كهرميكانيكي.	**1979** : قدّر عدد الحواسيب الشخصية المستخدمة في العالم بـ 15 مليون حاسب.
1946 : أول حاسوب إلكتروني. كان قادرا على إجراء 4500 عملية جمع في الثانية : مساحته 150 مترا مربعا، وزنه 30 طنا.	**1979** : ظهور أول حاسبة ذات أزرار موسيقية.
1947 : ابتكار الترانزستور. أدت صناعته إلى قفزة نوعية في التصنيع الإلكتروني.	**1981** : ظهور أول حاسبة مزودة بألعاب إلكترونية.
1947 : تصميم أول حاسبة جيبية ميكانيكية	**1982** : ظهور الحاسوب المحمول.
1953 : ظهور أول حاسوب إلكتروني.	**1985** : ظهور أقل حاسب سمكا (بسمك 0.8 ملم).
1959 : ظهور الجيل الثاني من الحواسيب.	**1986** : ظهور أول حاسبة بيانية (أي راسمة للبيانات).
1964 : إعداد لغة برمجة جديدة بسيطة ومتطورة. وقد اعتمدت في المعاهد لتكوين المبرمجين.	**1987** : قدّرت الأجهزة المرتبطة بالإنترنت بألف حاسب.
1965 : ظهور أول حاسبة إلكترونية مكتبية.	**1988**: ظهور برنامج خاص بالرياضيات سمي ماتيماتيكا. أسهم في ما يسمى بالحساب العلمي.
1965 : الحواسيب التي صنعت ابتداء من هذه السنة حتى سنة 1971 صارت تسمى حواسيب الجيل الثالث.	**1990** : ظهور الحاسوب الشخصي المتعدد الوسائط.
1966 : ظهور نوع من الحاسبات الجيبية.	**1990** : الانشغال باستغلال هذا الجهاز الجديد في ممارسة التعليم المدرسي وتسهيل مهمة التعلّم.
1970 : صارت الحواسيب الكبيرة والصغيرة تستخدم أكثر فأكثر داخل المدارس.	**1990** : الحواسيب المربوطة بالإنترنت فاقت 3 آلاف.
	1992 : ظهور أول حاسبة بيانية يمكن ربطها بالحواسيب.
	1997 : ظهور أول حاسوب جيبي يشتغل بنظام ويندوز.



6 الدالة الخطية - الدالة التآلفية

تمهيد

1 الجدولان (1) و(2) يمثلان جدولي تناسبية.

الجدول (1)

5	15	.	8
7	.	2,1	.

x ....

الجدول (2)

3	6	.	21
4	.	10	.

x ....

1 - احسب معامل التناسبية في كل حالة.

2 - أكمل الجدولين.

2 مثّل بيانيا الجدول الآتي :

x	0	1	4	6
y	1	2	5	7

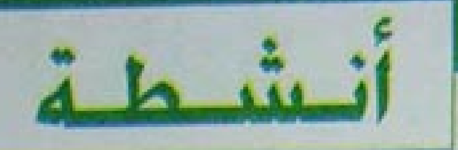
- هل هذا التمثيل يعبر عن وضعية تناسبية ؟ لماذا ؟

3 إذا كانت السرعة المتوسطة لدراج هي 10 أمتار في الثانية (10m/s).

- احسب سرعته المتوسطة بالكيلومتر في الساعة (Km/h).

4 غسالة سعرها 28000 DA. إنخفض سعرها بـ 5%.

- ما هو سعرها الجديد؟



أنشطة



1 التعرف على الدالة الخطية والدالة التآلفية

1 في حركة مستقيمة منتظمة، اكتب المساواة التي تعبر عن المسافة بدلالة الزمن بأخذ d(t) كترميز للمسافة.

- أكمل الجدول التالي :

الزمن t (h)	1	4	9	12	16
المسافة d(t) (Km)	80				

- مثّل في معلم $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ المسافة بدلالة الزمن (بوضع قيم d(t) على محور التراتيب وقيم t على محور الفواصل).

2 قيمة اشتراك الهاتف الثابت هي : 300 DA وثمن الوحدة هي : 3 DA.

أكمل الجدول الآتي :

عدد الوحدات المستهلكة	450	650	780	850
مبلغ فاتورة الهاتف بدون رسوم				

1) هل الجدول يمثل جدول تناسبية ؟ (علل).

2) ليكن x عدد الوحدات المستهلكة و $F(x)$ مبلغ الفاتورة بدون رسوم، عبّر عن $F(x)$ بدلالة x.

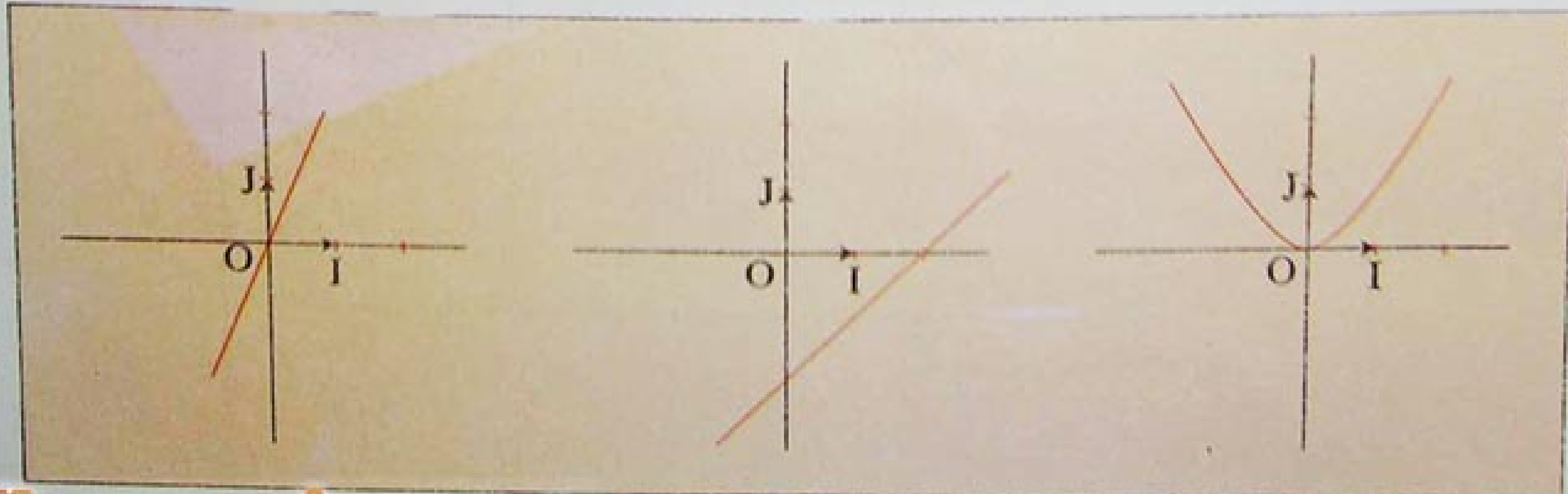
3) مثل في معلم $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ مبلغ فاتورة الهاتف $F(x)$ بدلالة عدد الوحدات المستهلكة x وذلك بوضع عدد الوحدات على محور الفواصل ومبلغ الفاتورة على محور التراتيب.

3 من بين الدوال التالية، ما هي الخطية وما هي التآلفية منها :

$f : x \longmapsto -4x+5$; $g(x) = \frac{2}{3}x + 4$; $h : x \longmapsto 3x^2$; $j(x) = 4 - 3x$

$i : x \longmapsto \frac{-3}{4}x$; $k(x) = \sqrt{3}\, x$.

4 من بين التمثيلات البيانية الموالية، ماهي تلك التي تظهر تمثيلات لدوال خطية أو دوال تآلفية:



2 تعيين صورة عدد بدالة، تعيين عدد إذا علمت صورته بدالة

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي : $f : x \longmapsto 5x$ ؛

$g : x \longmapsto 5x + 2$.

- الدالة f تعبر عن فعل «أضرب في العدد 5».

مثلا : $x = 4$ ، إذن $4 \xrightarrow{\times 5} 20$.

العدد 20 يسمى صورة 4 بالدالة f، ونكتب $f(4) = 20$.

أو العدد الذي صورته 20 هو العدد 4 بالدالة f.

- الدالة g تعبر عن فعل «أضرب في العدد 5» ثم «أضيف العدد 2».

مثلا : $x = -3$ ، إذن $-3 \xrightarrow{\times 5} -15 \xrightarrow{+2} -13$.

العدد 13- يسمى صورة 3- بالدالة g، ونكتب $g(-3) = -13$.

أكمل الجدول التالي :

قيم x	صورة x بالدالة f $x \xrightarrow{\times 5} 5x$	صورة x بالدالة g $x \xrightarrow{\times 5} 5x \xrightarrow{+2} 5x+2$	النتيجة
2	10	12	صورة 2 بالدالة f هي 10، ونكتب : $f(2) = 10$ صورة 2 بالدالة g هي 12، ونكتب : $g(2) = 12$
$\frac{1}{5}$	...	...	صورة $\frac{1}{5}$ بالدالة f هي ... ، ونكتب : $f(...) = ...$ صورة $\frac{1}{5}$ بالدالة g هي ... ، ونكتب : $g(...) = ...$
...	...	...	20 صورة ... بالدالة f، ونكتب : $f(\ ...\ ) = 20$ 20 صورة ... بالدالة g، ونكتب : $g(\ ...\ ) = ...$
...	...	...	1 صورة ... بالدالة g، ونكتب : $g(\ ...\ ) = ...$ 1 صورة ... بالدالة f، ونكتب : $f(\ ...\ ) = ...$
0	...	...	....
...	...	...	صورة ... بالدالة g هي 17، ونكتب : $g(...) = 17$ ... صورة ... بالدالة f، ونكتب : ... = ...

3 تعيين دالة خطية

1 اوجد الدالة الخطية $f: x \longmapsto ax$ إذا علمت أنّ : $f(7) = -3$

احسب $f(-7)$ ، $f(3{,}5)$ ، $f(-10{,}5)$.

4 تعيين دالة تآلفية

1 نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=3x-5$

- أكمل الجدول التالي :

1	x_1	-1	0	1	2
2	$f(x_1)$	....	....	....	....
3	x_2	5	3	4	$\frac{1}{2}$
4	$f(x_2)$	....	....	....	....
5	$x_2 - x_1$	$5-(-1) = ...$	....	....	....
6	$f(x_2) - f(x_1)$	....	....	....	....
7	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	....	....	....	....

- هل أعداد السطر الخامس من الجدول متناسبة مع أعداد السطر السادس على الترتيب ؟
- ما ذا تمثل أعداد السطر السابع بالنسبة للدالة f ؟
- كمل : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dots\dots$.

2 اوجد الدالة التآلفية $g : x \longmapsto ax+b$ **إذا علمت أن :** $g(2) = 3$ ، $g(4) = 1$.

حسب العدد a.

- أكمل ما يلي :

$g(2) = 3$ **معناه** $\dots\dots \times a + b = \dots\dots$.

$g(4) = 1$ **معناه** $\dots\dots \times a + b = \dots\dots$.

- احسب العدد b، بتعويض a بقيمته في إحدى المساواتين.
- استنتج العبارة الجبرية للدالة التآلفية g.





5 تمثيل دالة خطية

1 لتكن الدالة الخطية المعرفة كالتالي : $f : x \longmapsto 3x$.

- مثّل الدالة f في معلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

لتمثيل الدالة f أختار قيمة لـ x وأضعها على محور الفواصل، ثم أضع صورة x بالدالة f على محور التراتيب، أتحصل على النقطة التي إحداثياها $(x ; f(x))$.

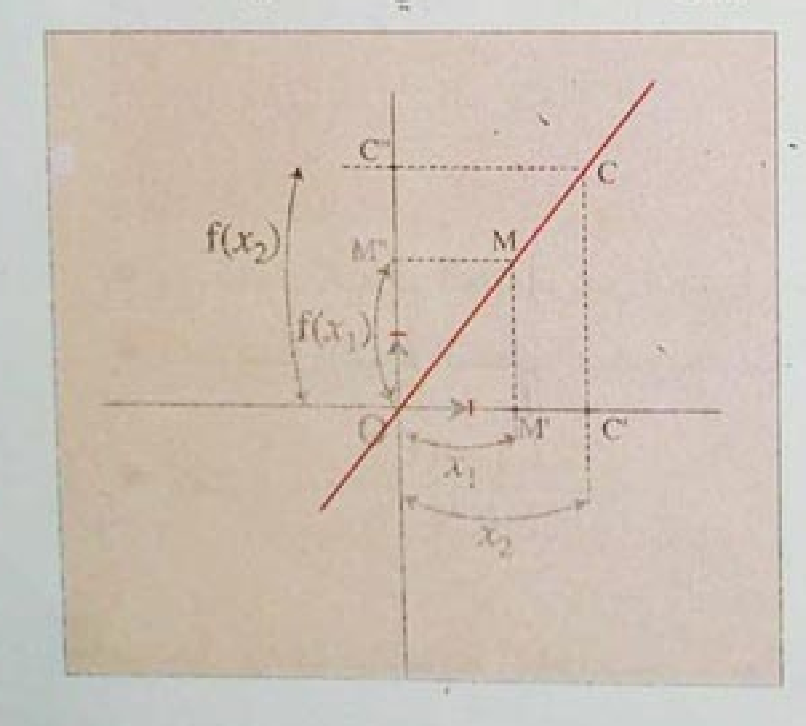
مثلا : نفرض $x = 1$ ، إذن $f(1) = 3$. نتحصل على نقطة احداثياها $(1 ; 3)$.

- أكمل الجدول التالي :

النقطة	الفاصلة x	الترتيب $F(x)$	احداثيا النقطة
A	-1	-3	(-1;-3)
B	3	9	(3 ; 9)
C	1	3	(1 ; 3)
D	5	15	(5 ;15)
O	0	0	(0 ; 0)

- هل النقط A، B، O، C، D في استقامية ؟
- برهن أن كل النقط التي احداثياها $(x ; f(x))$ تنتمي إلى المستقيم الذي يشمل النقط A، B، O، C، D.

للبرهان على ذلك نتبع ما يلي : لتكن $(x ; f(x))$ إحداثيتي M. **نبين أنّ** C، O، M في استقامية.



- احسب النسبتين $\frac{OM'}{OC'}$ و $\frac{MM'}{CC'}$.
- أكمل ما يلي :

لدينا في المثلث القائم OCC' : $M' \in (OC')$

و (...) // (...) و $\frac{OM'}{OC'} ... \frac{MM'}{CC'}$.

حسب نظرية طالس فإنّ $M \in (OC)$.

إذن : C، O، M على ...

هذا المستقيم هو التمثيل البياني للدالة الخطية $f(x)=3x$.

6 تمثيل دالة تآلفية

1 أنشىء (D) التمثيل البياني للدالة الخطية : $f : x \longmapsto 3x$

- نشىء (D') صورة (D) بالإنسحاب الذي يحوّل النقطة O إلى M (0 ; 2).
- تحقق من انتماء نقاط التمثيل البياني للدالة التالفية $g(x) = 3x + 2$ إلى المستقيم (D').
- ماذا تستنتج ؟ (D') هو تمثيل بياني لدالة g(x) = 3x+2
- أكمل : **التمثيل البياني لدالة تآلفية هو** ..مستقيم.. ...



2 **لتكن g الدالة الخطية حيث $g(x) = -4x$ وليكن (D_1) التمثيل البياني لها.**

- كمل ما يلي : $g(-1) = 4$ معناه أن المستقيم (D_1) يمر بالنقطة $M(-1\ ;\ ...)$. ونعلم أن المستقيم (D_1) يمر بالمبدأ O.

إذن : (D_1) هو المستقيم (...).

- أنشئ (D_1).

3 **لتكن f الدالة التالفية حيث $f(x) = -4x-5$ وليكن (D_2) التمثيل البياني لها.**

- اكمل ما يلي :

$f(0) = ...$ معناه أنّ (D_2) يمر بالنقطة $A(0\ ;\ ...)$.

$f(3) = ...$ معناه أنّ (D_2) يمر بالنقطة $B(3\ ;\ ...)$.

(D_2) هو المستقيم (...).

- أنشئ (D_2).



7 معادلة مستقيم

1 **نعتبر $A(x\ ;\ y)$ نقطة من المستقيم الممثل للدالة التالفية المعرفة كالتالي : $f(x) = 2x+3$.**

- اكتب y بدلالة x.

المساواة ... = y تسمى معادلة المستقيم الممثل للدالة f.

- أكمل الجدول الموالي :

الدالة	ترميز الدالة		معادلة المستقيم الممثل للدالة
f	$f(x) = 2x+3$	$f : x \longmapsto 2x+3$	$y = 2x+3$
g	$g(x) = \frac{1}{2}x+1$	....	....
h	....	....	$y = 5x+2$
i	....	$i : x \longmapsto -3x$	....
J	....	....	$y = 7x$
k	$k(x) = 3x+5$	....	....

2 1) لتكن النقط $A(2 ; 1)$ ، $B(-2 ; -1)$ ، $C(0 ;-5)$.

- هل النقط A، B، C تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=3x+5$؟

2) لتكن النقط $M(+\frac{1}{2} ; 5)$ ، $N(4 ; -2)$ ، $P(0 ; 6)$.

- أوجد الدالة التآلفية التي تمثيلها البياني المستقيم (MN).

بين أنّ النقط M، N، P في استقامية.

3 f ، g دالتان معرفتان كما يلي : $f(x) = x+1$ ، $g(x) = -\frac{2}{3}x+2$.

1) حل المعادلة $f(x) = g(x)$.

2) مثّل بيانيا الدالتين f و g في معلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

3) احسب احداثيي A نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (d')، حيث (d) هو ممثل الدالة f و (d') هو ممثل الدالة g.

8 تعيين المعاملين a وb انطلاقا من التمثيل البياني لدالة تآلفية

1 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي : $f(x) = 3x -5$ ، $g(x) = -2x +3$.

- مثل بيانيا كلا من f و g.

ليكن (D) التمثيل البياني للدالة f، (D') التمثيل البياني للدالة g.

انطلاقا من النقطة A من (D) حيث $A(0 ; -5)$.

- أكمل : إذا تقدمنا بوحدة أفقيا نحو اليمين، فإننا نصعد عموديا بـ ...... وحدة نحو الأعلى لنصل إلى (D).

العدد ...... يسمى معامل توجيه المستقيم (D) أو ميل المستقيم (D).

انطلاقا من النقطة B من (D') حيث $B(0 ; 3)$.

- أكمل : إذا تقدمنا بوحدة أفقيا نحو اليمين، فإننا ...... عموديا بـ ...... وحدة نحو ...... لنصل إلى (D').

ملاحظة

عندما نتقدم بوحدة أفقيا نحو اليمين، ثم ننزل عموديا نحو الأسفل لنصل إلى المستقيم، في هذه الحالة يكون معامل توجيه هذا المستقيم عددًا سالبا.

- ما هو معامل توجيه المستقيم (D')؟ ماذا يمثل ترتيبا النقطتين A و B في كل حالة ؟



2

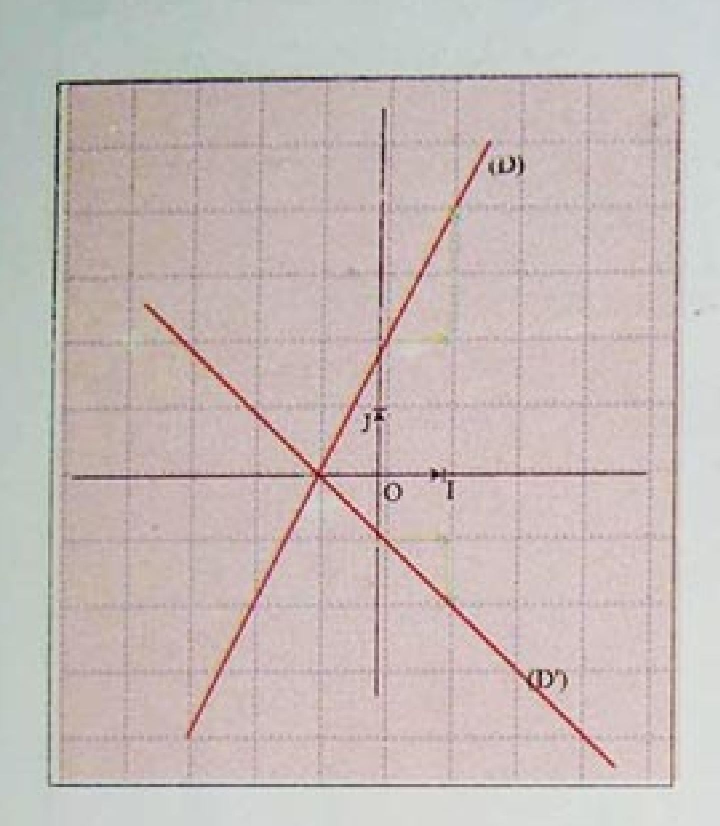
1) نعتبر النقط : $A(-1 ; 4)$ ، $B(5 ; -8)$ ، $C(-2 ; -3)$.

معامل توجيه المستقيم (AB) هو $a = \frac{.... - ....}{.... - ....}$.

معامل توجيه المستقيم (AC) هو $a = \frac{.... - ....}{.... - ....}$.

2) معامل توجيه المستقيم (D) هو ....

معامل توجيه المستقيم (D') هو ....



9 إنجاز تمثيل بياني لوضعية يتدخل فيها مقداران أحدهما معطى بدلالة الآخر

قصد حسّان وكالتين لكراء السيارات، فكانت شروط الكراء لكل وكالة كالتالي :

الوكالة 1 : دفع 2500 DA، إضافة إلى 500 DA على كل 50Km مقطوعة.

الوكالة 2 : دفع 1500 DA، إضافة إلى 750 DA على كل 50Km مقطوعة.

1) لتكن x المسافة المقطوعة، معبرًا عنها بالكيلومتر (Km).

- ليكن $A(x)$ المبلغ المستحق للوكالة 1 . عبّر بدلالة x عن $A(x)$.
- ليكن $B(x)$ المبلغ المستحق للوكالة 2. عبّر عن$B(x)$ بدلالة x.

2) مثّل بيانيا الدالتين A و B في نفس المعلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ وذلك بوضع المسافات المقطوعة على محور الفواصل والمبلغ المستحق على محور التراتيب.

(خذ كمعلم رسم : على محور الفواصل : $1cm \longrightarrow 50 Km$ وعلى محور التراتيب: $1cm \longrightarrow 500DA$)

3) اوجد فاصلة نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين، سمّها x_1.

4) ادرس وضعية المنحنيين (أي : المنحنى الممثل للدالة A يقع تحت أو فوق المنحنى الممثل للدالة B)، في الحالتين :

أ) $x < x_1$.

ب) $x \geq x_1$.

ماذا يعني ذلك بالنسبة للمبلغ المستحق في كل حالة ؟

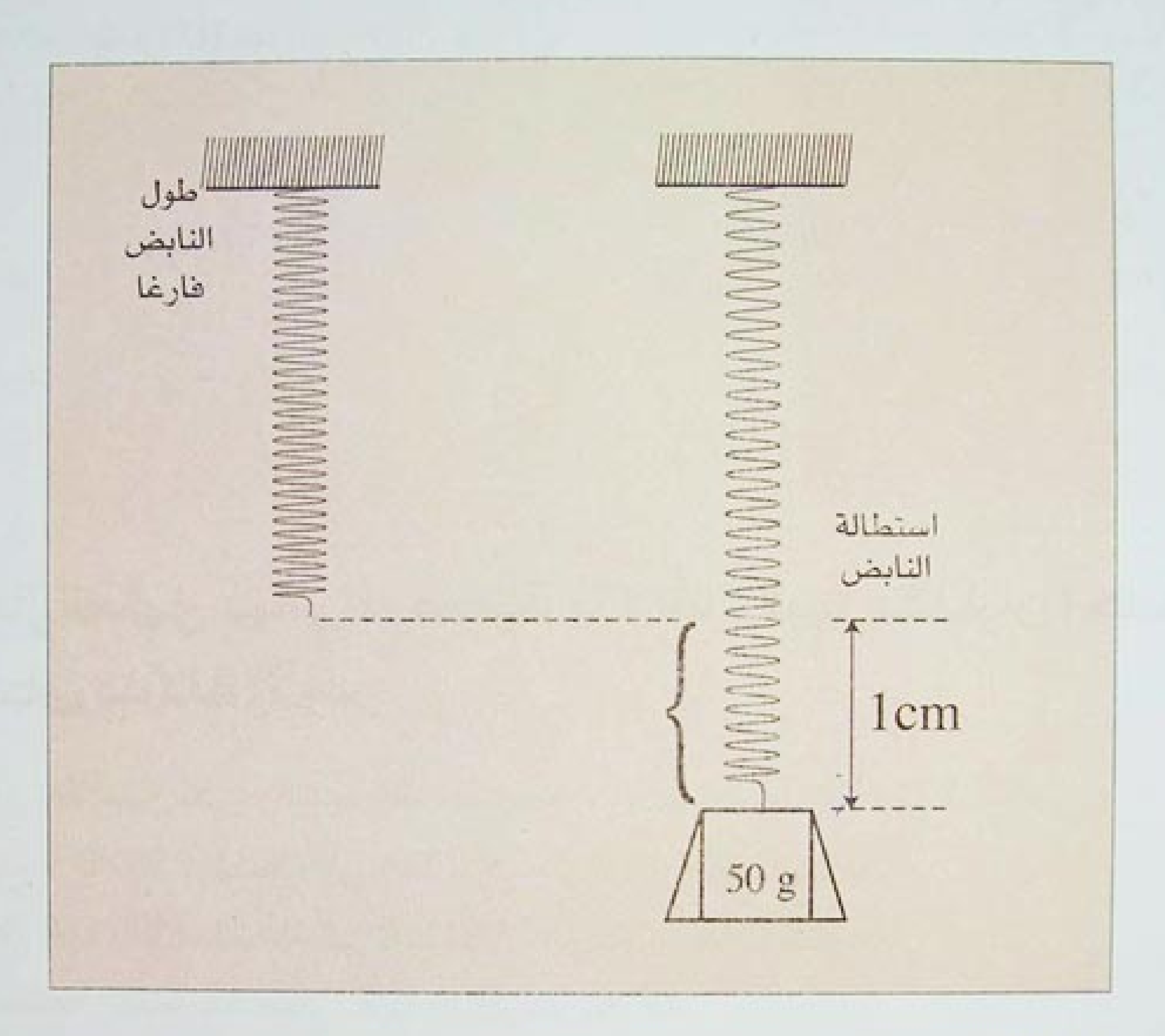
5) استنتج ممّا سبق في أي حالة تكون الوكالة 1 أفضل لحسّان ؟





10 تطبيقات التناسبية

1 نابض مثبت، نعلق في طرفه الحر كتلة x (g) ونعين في كل مرة الاستطالة y (cm)،علمًا أن الإستطالة y متناسبة مع الكتلة المعلقة x.



1) أكمل الجدول التالي :

x (g)	0	50	100	350	....
y (cm)	....	1	....	....	6,7

2) عبّر عن y بدلالة x.

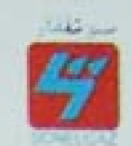
3) باستعمال عبارة y بدلالة x، احسب إستطالة النابض من أجل الكتل 250g ، 400g ، 150g.

4) مثّل هذه الوضعية التناسبية (خذ كسلم على محور الفواصل : كل 1cm يمثل 100g، وكسلم على محور التراتيب : كل 1cm يمثل 5cm).

5) اوجد بيانيا استطالة النابض من أجل الكتلتين : 500g ، 1200g ثم، الكتلتين اللتين ينبغي تعليقهما للحصول على استطالة قدرها 15cm ، 22,5cm .



2 نقرأ الجدول التالي في فاتورة الكهرباء الثلاثي الثالث 2005.



الشركة الوطنية للكهرباء والغاز	رقم التعريف الضريبي : 06916010012742 رقم البند الضريبي : 42120024521 الفترة : الثلاثي الثالث 2005

التعريفة	المبلغ المستحق بدون رسوم القيمة المضافة	رسم القيمة المضافة		المبلغ المستحق بكافة الرسوم (بالدينار)
		النسبة المئوية	المبلغ (بالدينار)	
الكهرباء	1532. 00	07	107. 24	1639. 24
الغاز	176. 07	07	12. 32	188. 39
ضريبة إستهلاك الطاقة	100. 00	00	00	100. 00
ضريبة السكن	75. 00	00	00	75. 00
	1883. 07		119. 56	2002. 63

أ) كيف حُسِبَ مبلغ رسم القيمة المضافة ؟

ب) كيف حسب المبلغ المستحق بكل الرسوم في إستهلاك الكهرباء؟

- أخذ 7% من الكمية x معناه حساب : x .....= x x $\frac{....}{....}$.
- زيادة الكمية x بـ 7% معناه حساب : $x+ \frac{....}{....} x = x(.... + \frac{....}{....})$.

3 في إحدى واجهات محلات الملابس علقت اللافتة **تخفيض 30%** .

- أخذ 30% من x معناه x ..... = x x $\frac{....}{....}$.
- أكمل الجدول التالي :

السعر (DA)	1900	4250	3400	5000
قيمة التخفيض	......	......	......	......
السعر بعد التخفيض	......	......	......	......

- تخفيض x بـ 30% يعني حساب x ... = $x - \frac{....}{....} x = x(.... - \frac{....}{....})$.



أنشطة

4 سيارة سعرها 800 000 DA، انخفض سعرها بـ 5%، ثم انخفض مرة أخرى بـ 3%.

- سأل الأستاذ تلاميذه عن سعر السيارة الجديد، وأخذ ثلاث أجوبة من اجاباتهم :

الإجابة 1

$$800\,000\left(1-\frac{5}{100}\right)\left(1-\frac{3}{100}\right)=737200 \text{ DA}$$

الإجابة 2

$$800\,000\left(1-\frac{5}{100}\right)=760\,000 \text{ DA}$$

$$760\,000\left(1-\frac{3}{100}\right)=737\,200 \text{ DA}$$

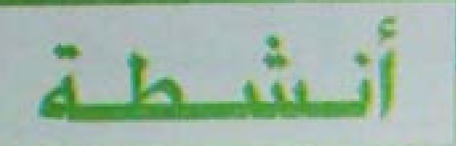
الإجابة 3

$$800\,000\left(1-\frac{8}{100}\right)=736\,000 \text{ DA}$$

عيّن الإجابة الصحيحة ؟

- أكمل : تخفيض x بـ 5%، ثم بـ 3% يعني حساب : $\left(\ldots-\frac{\ldots}{\ldots}\right)\left(\ldots-\frac{\ldots}{\ldots}\right)\times x$.
- هل يبقى سعر السيارة 800 000DA ثابتا، إذا انخفض بـ 8%، ثم زاد بـ 8% ؟

أكمل : تخفيض x بـ 8%، ثم زيادته بـ 8% يعني حساب : $\left(\ldots+\frac{\ldots}{\ldots}\right)\left(\ldots-\frac{\ldots}{\ldots}\right)\times x$.



11 المقادير المركبة

1 الطاقة الكهربائية

- تستهلك الأجهزة الكهربائية طاقة كهربائية E وفق القانون : $E = p.t$ حيث p هي الإستطاعة الكهربائية معبّرا عنها بالواط أو الكيلوواط، وt هو زمن التشغيل بالساعات.

- يعبّر عن الطاقة الكهربائية بالواط الساعي (WH) أو الكيلوواط الساعي (KWH)، حيث :

$1KWH = 1000\ WH$.

● احسب بالواط الساعي، ثم بالكيلوواط الساعي، الطاقة المستهلكة للأجهزة الآتية خلال المدد الزمنية المبينة في الجدول :

الجهاز	الإستطاعة	مدة التشغيل
مصباح	75 W	2h
تلفاز	80 W	1h 20mn
مدفأة كهربائية	1800 W	1h

● ما هي تكلفة استعمال المدفأة الكهربائية، إذا علمت أن ثمن الكيلوواط الساعي هو 1,5 DA؟

2 الكتلة الحجمية

الكتلة الحجمية للنحاس هي : $8,9\ g/cm^3$.

● ماذا تعني هذه الجملة ؟

لتكن m الكتلة معبّرا عنها بالغرام (g) و V الحجم معبّرا عنه بالسنتيمتر المكعّب (cm^3).

● عبر عن m بدلالة V.

● ما هي كتلة $20\ cm^3$ من النحّاس ؟

● مثّل بيانيا كتلة النحاس بدلالة حجمه، وذلك بوضع الحجم على محور الفواصل والكتلة على محور التراتيب.

● بالإعتماد على التمثيل البياني، أعط القيمة التقريبية لكتلة $3cm^3$ من النحاس، ثم تحقق حسابيا.

● ما هو حجم 1,424 kg من النحاس ؟

3 السرعة المتوسطة

قطعت سيارة مسافة 124 km في مدة قدرها 1h24 .

● احسب سرعتها المتوسطة.

● ما هي المدة التي تستغرقها لقطع مسافة 217km في نفس الظروف ؟

معــارف

1 الدالة الخطية

تعريف

عندما نرفق كل عدد x بالجداء ax حيث a عدد طبيعي معطى، نقول إننا عرفنا دالة خطية.

نرمز لها بـ : $f : x \longmapsto ax$

نسمي $f(x)$ صورة x بالدالة f، ونكتب $f(x) = ax$.

مثال : الدالة التي ترفق كل عدد x بنصفه هي دالة خطية.

نرمز لها بـ : $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x$.

صورة 2 بالدالة f هي $f(2)$. لدينا $f(2) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

إذن صورة 2 بالدالة f هي 1.

2 الدالة التآلفية

تعريف

ليكن a و b عددين معلومين.

عندما نرفق كل عدد x بالجداء ax، حيث a عدد معطى، ثم نضيف إلى ذلك الجداء عدداً معلوما b نقول إننا عرفنا دالة تآلفية.

نرمز لها بـ : $f : x \longmapsto ax+b$.

نسمي $f(x)$ صورة x بالدالة f، ونكتب $f(x) = ax+b$

مثال : الدالة التي ترفق بكل عدد x ضعفه مضاف إليه العدد 3 هي دالة تآلفية.

نرمز لها بـ : $f : x \longmapsto 2x+3$.

صورة 1 بالدالة f هي $f(1)$. لدينا $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$.

إذن صورة 1 بالدالة f هي 5.

ملاحظة

1) الدالة الخطية هي حالة خاصة للدالة التآلفية.

الدالة الخطية هي دالة تآلفية حيث $b = 0$.

2) تعبّر الدالة الخطية عن وضعية تناسبية.

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة بـ $f(x) = ax + b$.

فإن تغيرات $f(x)$ متناسبة مع تغيرات x ومعامل التناسب هو المعامل a.

حيث : $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ مع $x_2 \neq x_1$

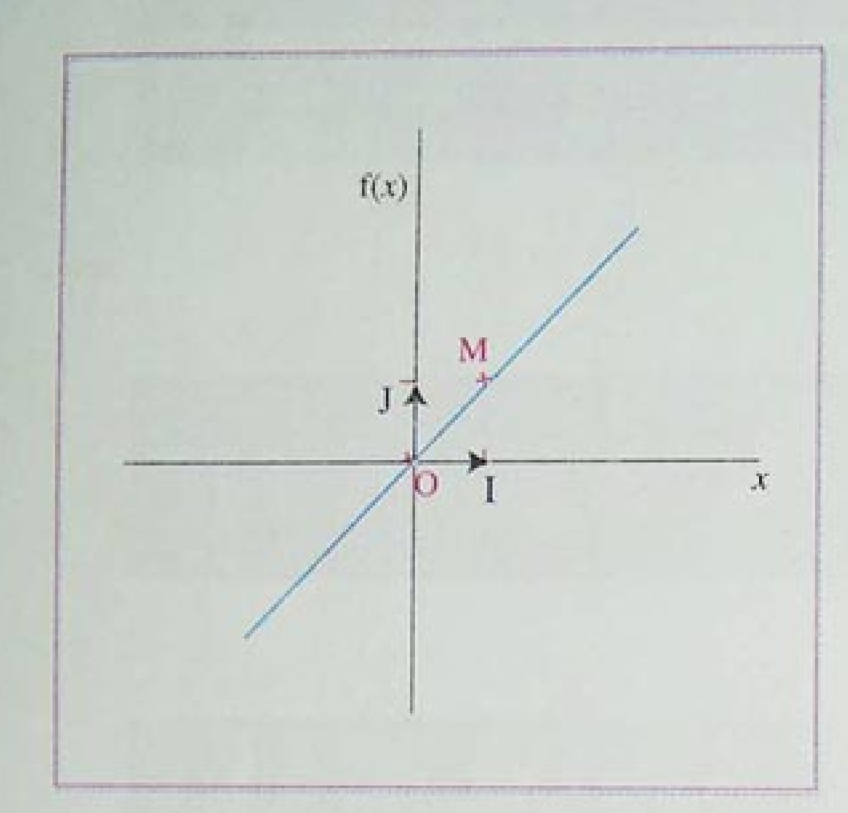
مثال : f الدالة التآلفية معرفة بـ $f(1) = 3$ و $f(-3) = -5$.

$a = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$ أي $a = \frac{3 - (-5)}{1 - (-3)}$ ومنه $a = \frac{8}{4}$ إذن **$a = 2$**.



3 التمثيل البياني لدالة خطية

التمثيل البياني لدالة خطية هو مستقيم يمر بالمبدأ.
إذن يكفي تعيين نقطة واحدة تختلف عن المبدأ لرسمه.



مثال : الدالة الخطية معرفة بـ $f(x) = x$.

تمثيلها البياني هو مستقيم يمر بالمبدأ.

إذن يكفي تعيين نقطة أخرى غير المبدأ لرسمه.

إذا كان $x = 1$، فإن $f(1) = 1$. إذن النقطة $M(1 ; 1)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f.

التمثيل البياني للدالة f هو المستقيم (OM)،

والذي معادلته $y = x$.

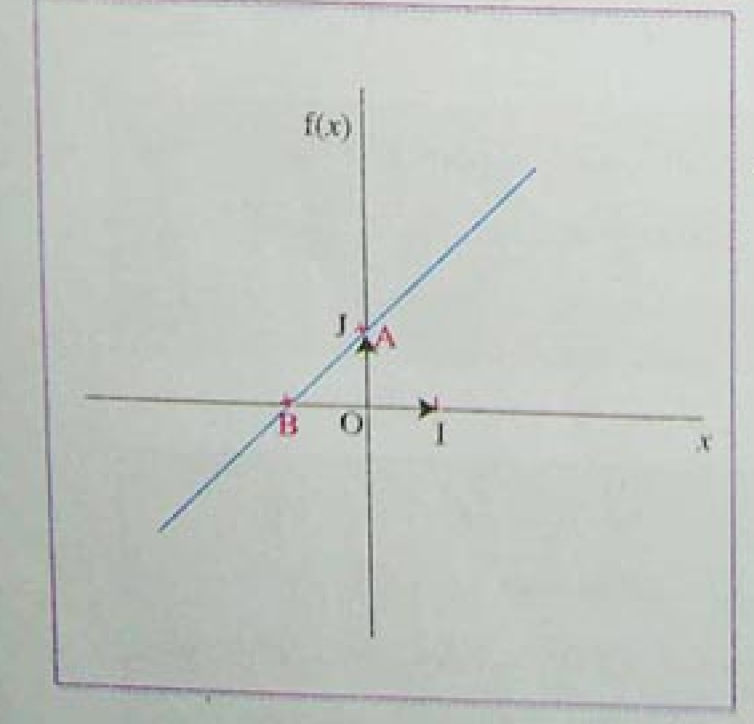
4 التمثيل البياني لدالة تآلفية

تعريف

التمثيل البياني لدالة تآلفية $f:x \longmapsto ax+b$ هو مجموعة النقاط ذات الإحداثيات $(x ; y)$ بحيث $y = ax + b$ وهي تمثّل مستقيما معادلته $y = ax+b$.

يسمى a معامل توجيه المستقيم.

يسمى b الترتيب إلى المبدأ.



مثال : الدالة التآلفية $f:x \longmapsto x+1$

تمثيلها البياني هو مستقيم، يكفي إذن تعيين نقطتين منه لرسمه.

إذا كان $x = 0$، فإن $f(0) = 0 + 1 = 1$.

إذن النقطة $A\ (0 ; 1)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f.

إذا كان $x = -1$، فإن $f(-1) = -1 + 1 = 0$.

إذن النقطة $B\ (-1 ; 0)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f.

التمثيل البياني للدالة f هو المستقيم (AB)،

والذي معادلته $y = x + 1$.



5 تطبيقات التناسبية

النسب المئوية

النسب المئوية تمثل وضعيات تناسبية.

أ) حساب p% من x هو حساب y حيث $y = \frac{p}{100}x$.

مثال : ثمن السكر هو 35DA، إزداد ثمنه بـ 20%.

- ما هو مقدار الزيادة ؟

مقدار الزيادة في الثمن هو $y = \frac{20}{100} x35=7$ DA .

ب) زيادة x بـ p% هو حساب y حيث :
$y =(1 + \frac{p}{100}) x$.

مثال : يزن عمر 60Kg، ازداد وزنه بـ 25%.

- ما هو وزنه الجديد ؟

وزنه الجديد هو $y =(1+ \frac{25}{100}) 60 =75$ Kg.

جـ) خفض x بـ p% هو حساب y حيث :
$y =(1 - \frac{p}{100}) x$.

مثال : انخفض عدد رؤوس قطيع من الغنم مكون من 20 رأسا بـ 5%.

- ما هو عدد رؤوس القطيع بعد الإنخفاض ؟

عدد رؤوس القطيع بعد الإنخفاض هو:
$y =(1- \frac{5}{100}) 20 =19$.

المقادير المركبة

أ) الكتلة الحجمية هي كتلة جسم بالنسبة إلى حجمه، وتقدر بـ g/cm^3 أو Kg/m^3.

مثال : الكتلة الحجمية للذهب هي $19,3g/cm^3$ يعني أن $1cm^3$ ذهب يزن 19,3g.

ب) السرعة المتوسطة هي نسبة المسافة المقطوعة إلى الزمن المستغرق لقطعها، وتقدر بـ m/s أو km/h.

مثال : السرعة المتوسطة لسيارة هي 80km/h، يعني ذلك أن السيارة تقطع مسافة 80km في مدة 1ساعة (h).

جـ) الطاقة الكهربائية هي كمية الاستطاعة الكهربائية المستهلكة خلال زمن معين، يعبر عنها بـ : (wh) أو (kwh) حيث 1kwh = 1000 wh .

مثال : ما هي الطاقة المستهلكة لمصباح استطاعته 100w خلال 3h؟

لدينا : $E = p \times t$. (E: الطاقة الكهربائية، p: الاستطاعة الكهربائية، t: الزمن)

$E = 100 \times 3 = 300$ Wh.

الطاقة المستهلكة هي 300 wh.



طرائق وتمارين محلولة

تعيين العبارة الجبرية لدالة تآلفية

تمرين

لتكن f الدالة التآلفية بحيث $f(1) = 3$ و $f(2) = 5$.

أعط العبارة الجبرية لهذه الدالة.

طريقة 1

بما أن f دالة تآلفية فإن تغيرات $f(x)$ متناسبة مع تغيرات x ومعامل التناسب هو المعامل a. ويعطى هذا المعامل بـ : $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ حيث $(x_1 \neq x_2)$.

الحل

$f(1) = 3$ معناه $x_1 = 1$ و $f(x_1) = 3$.

$f(2) = 5$ معناه $x_2 = 2$ و $f(x_2) = 5$.

إذن : $a = \frac{5-3}{2-1}$ **ومنه** $a = 2$.

$f(1) = 3$ معناه $3 = a \times 1 + b$. بتعويض a بقيمته نجد $b = 1$.

إذن العبارة الجبرية للدالة f هي $f(x) = 2x+1$.

طريقة 2 الطريقة البيانية

نرسم المستقيم (D) ممثل الدالة f.

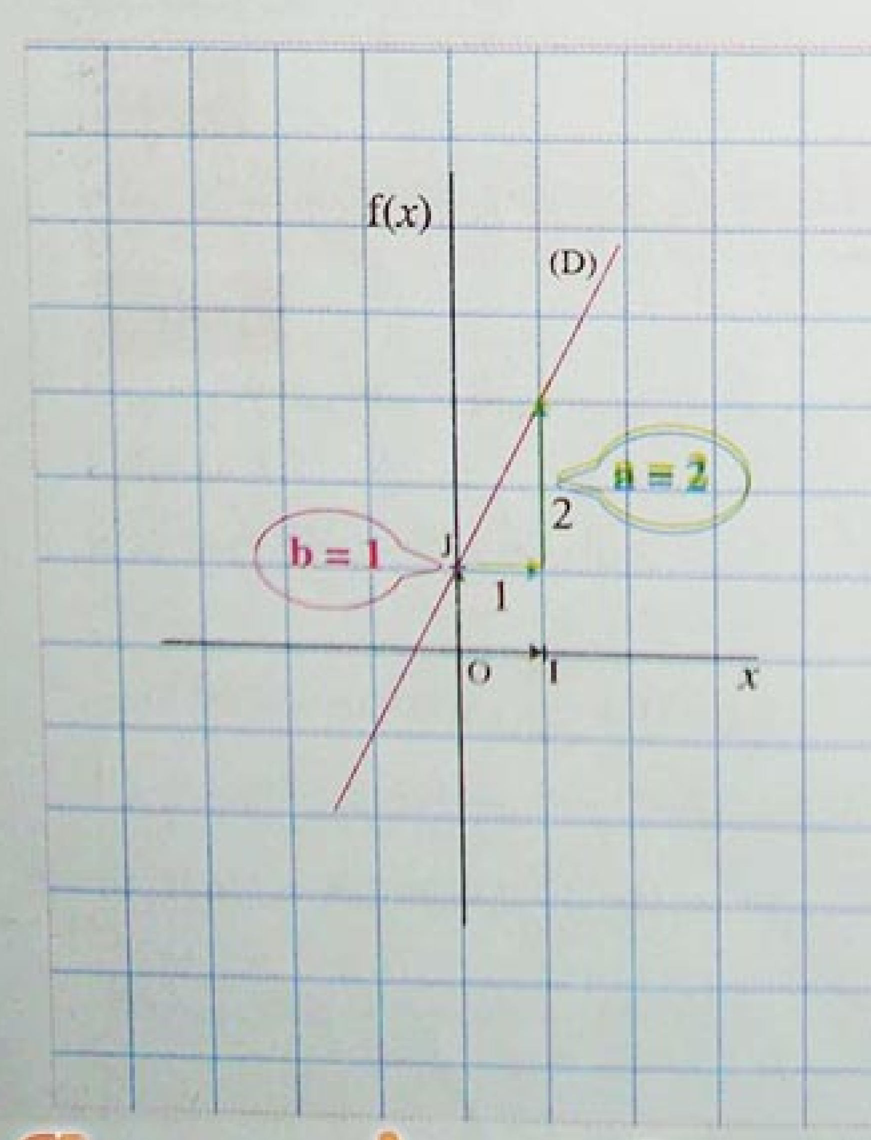
الترتيب إلى المبدأ لهذا المستقيم هو المعامل b.

إذن $b = 1$.

نتقدم بوحدة نحو اليمين، ثم نصعد بوحدتين نحو الأعلى لنصل إلى المستقيم (D).

إذن $a = 2$.

ومنه $f(x) = 2x + 1$.



طرائق وتمارين محلولة

البرهان على استقامية ثلاث نقاط

طريقة ترتكز على استعمال الدوال التآلفية.

للبرهان أن النقاط A، B، C في استقامية، نبحث عن الدالة التآلفية التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB)، ثم نتحقق أن C تنتمي إليه.

تمرين

لتكن النقط : A(1 ; 0) ، B(2 ; -1)، و C(-1 ,2).
هل هذه النقاط في استقامية ؟

الحل

نبحث عن العبارة الجبرية للدالة f التي تمثيلها المستقيم (AB)، وذلك بالطرق السابقة، فنجد أن :
$f(x) = -x+1$.

نتحقق من أن C تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f، أي هل احداثيي C تكتب من الشكل $(x_1 ; f(x))$؟

لدينا $f(-1) = -(-1) + 1 = 2$. **إذن** C (-1 ; 2) تنتمي إلى المستقيم الممثل للدالة f.

ومنه النقط A، B و C في استقامية.

النسب المئوية

تمرين

ثمن دراجة 8000DA، ازداد ثمنها بـ 15%، ثم انخفض بـ 20%، ما هو سعرها الجديد؟

الحل

نرمز بـ y لثمن الدراجة بعد ازدياد ثمنها، وبـ z لثمنها بعد إنخفاضه. المطلوب منا هو حساب الثمن الجديد z.

إن ازدياد الثمن بـ 15% يعني أن :

$$y = (1 + \frac{15}{100})\ 8000DA = 9200\ DA.$$

ومن جهة أخرى، انخفض الثمن السابق بـ 20%، وهذا يعني :

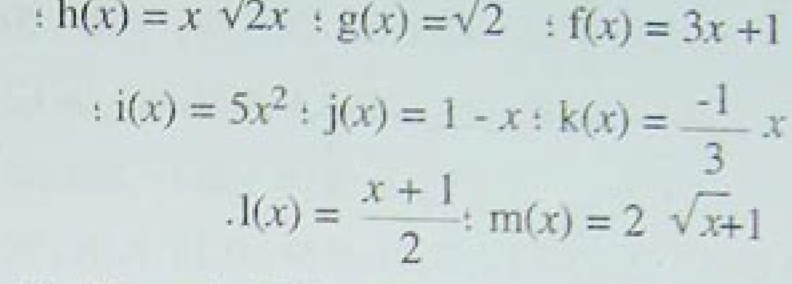
$$z = (1 - \frac{20}{100})\ 9200\ DA = 7360DA.$$

إذن سعر الدراجة الجديدة هو 7360DA.



تمارين للتطبيق المباشر

1 ما هي الدوال الخطية وما هي الدوال التآليفة من بين الدوال التالية :

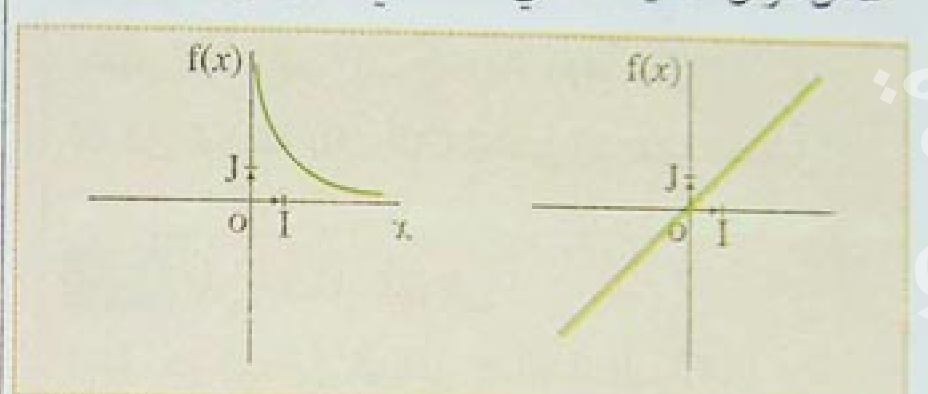


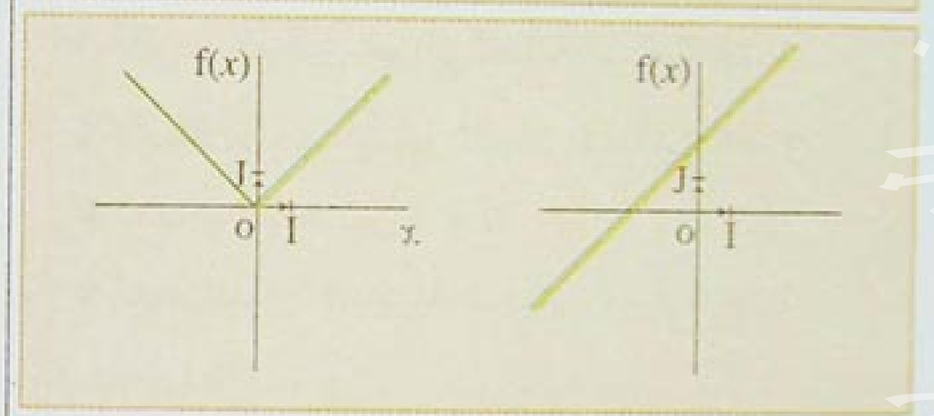
$f(x) = 3x + 1$ ؛ $g(x) = \sqrt{2}$ ؛ $h(x) = x\sqrt{2x}$ ؛

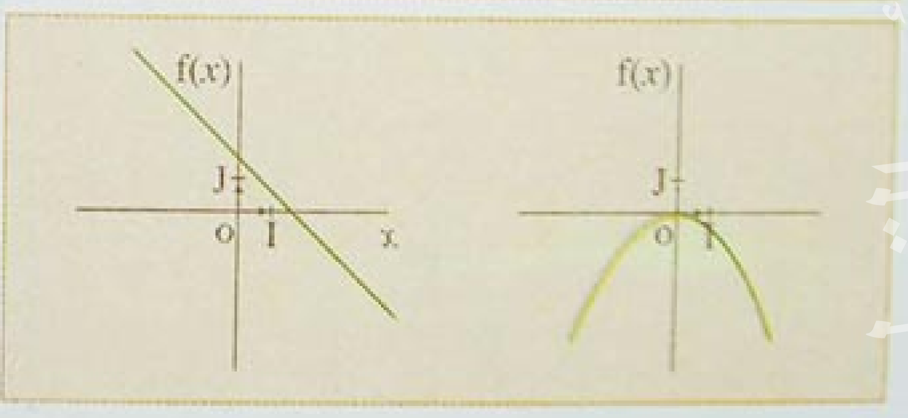
$k(x) = \frac{-1}{3}x$ ؛ $j(x) = 1 - x$ ؛ $i(x) = 5x^2$ ؛

$m(x) = 2\sqrt{x}+1$ ؛ $l(x) = \frac{x+1}{2}$.

2 من بين التمثيلات البيانية الموالية، ما هي تلك التي تمثل دوال خطية ما هي تلك التي تمثل دوال تآلفية.

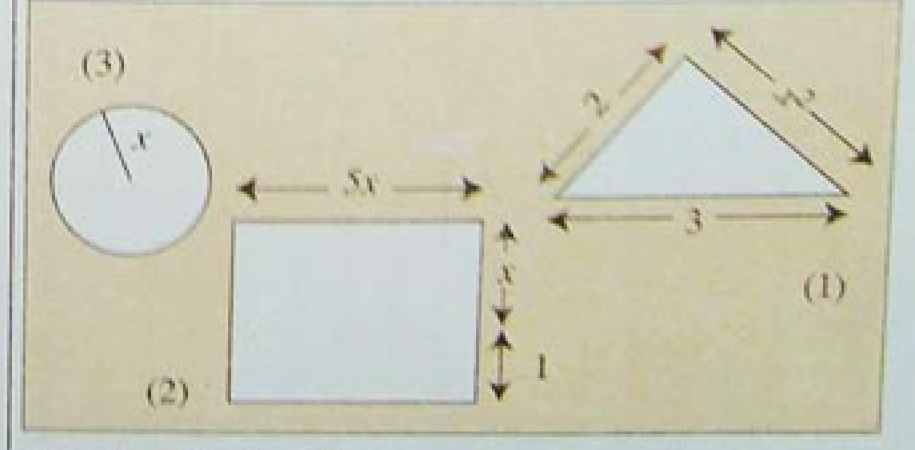






3 القياسات معبّر عنها بـ cm. ليكن $p(x)$ المحيط.

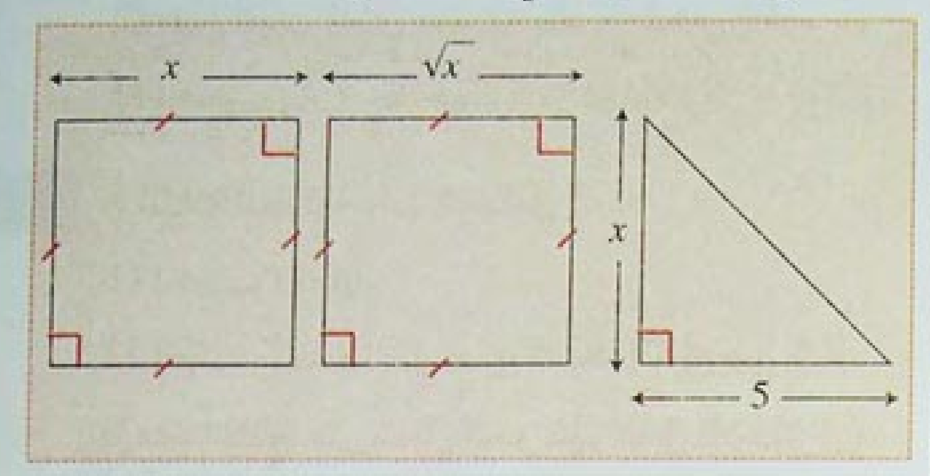
1) عبر عن $p(x)$ بدلالة x في كل حالة مما يلي :



2) هل الدالة p في كل حالة، هي دالة خطية أم تآلفية ؟

4 $A(x)$ مساحة.

1) عبر عنّ $A(x)$ بدلالة x في كل حالة من الحالات الآتية. (وحدة الطول هي السنتمتر).



2) هل الدالة A في كل حالة، هي دالة خطية أم تآلفية ؟

5 أكمل الجدول التالي :

ترميز الدالة		معادلة المستقيم الممثل لها
$f(x) = 5x + 2$	$f: x \longmapsto 5x + 2$	$y = 5x + 2$
$g(x) = 2x + \frac{-1}{2}$	....	....
....	$h: x \longmapsto 3x$	....
....	i :	$y = x + 3$
....	$j: x \longmapsto \frac{-1}{2}x + 7$	....

6 أكمل الجمل التالية :

1) $f(5) = 6$ يعني أن : صورة 5 بالدالة f هي: 6
أو العدد الذي صورته 6 بالدالة f هو : 5.

2) $f(8) = 3$ يعني أن : صورة ... بالدالة f هي :....
أو العدد الذي صورته 3 بالدالة f هو :....

3) $f(...) = 1$ يعني أن : صورة 3 بالدالة f هي :....
أو العدد الذي صورته ... بالدالة f هو : ....

4) ... يعني أن : صورة 6 بالدالة f هي : 4 -
أو العدد الذي صورته .... بالدالة f هو : ....

5) $f(3) = 7$ ....
أو ....

تمارين للتطبيق المباشر

7 الدالة الخطية f معرفة كالتالي : $f(x) = \frac{-2}{3}x$.

1) احسب $f(0)$، $f(-2)$، $f(\sqrt{3})$، $f(-\frac{1}{3})$.

2) عين العدد الذي صورته بالدالة f هي 10-.

3) احسب x_1 و x_2 حيث $f(x_1) = 8$ و $f(x_2) = -9$.

8 g الدالة الخطية ذات المعامل 3-.

1) احسب $g(-1)$.

2) احسب العدد الذي صورته بالدالة g هي 2,5.

(أعط الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال).

9 h دالة تآلفية بحيث $h(0) = 3$ و $h(1) = 3$.

1) احسب المعاملين a و b.

2) استنتج العبارة الجبرية للدالة.

10 نعرف الدالة f كما يلي : $f(x)= -3x+1$.

أ) احسب $f(0)$ و $f(1)$.

ب) مثّل الدالة f في معلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

11 لتكن الدالة g المعرفة كما يلي: $g:x \longmapsto 5x$.

أ) احسب $g(\frac{1}{5})$ ، $g(3)$ ، $g(-1)$.

ب) مثّل الدالة g في معلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

12 لتكن الدالتان f و g المعرفتين كما يلي :

$f: x \longmapsto 2x+1$ و $g(x) = -x+4$.

أ) مثّل بيانيا كلاً من الدالتين f و g وذلك في نفس المعلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

ب) اقرأ على التمثيلين، القيم التالية :

$f(0)$، $f(1)$، $f(2)$، $f(-1)$.

$g(0)$، $g(4)$، $g(-1)$، $g(3)$.

جـ) اقرأ على التمثيلين، قيم x حيث :

$f(x) = 2$ ، $f(x) = 4$ ، $f(x) = 6$.

$g(x) = -3$ ، $g(x) = 2$ ، $g(x) = -1$.

د) اقرأ على التمثيلين فاصلة نقطة تقاطعهما، أي x التي تكون من أجلها $f(x) = g(x)$.

13 1) هل النقاط التالية تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة : $f: x \longmapsto -3x+6$ ؟

$A(0 ; 6)$، $B(2 ; 0)$، $C(1; 3)$، $D(\frac{1}{3}; 5)$.

2) هل النقاط التالية تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة : $y = \frac{7}{2}x + 0,1$ ؟

$A(0 ; 0)$، $B(0 ; 0,1)$، $C(2; 7,1)$، $D(4 ; 28,1)$ ؟

14 1) عيّن الدالة التآلفية f التي تمثيلها البياني يشمل النقطتين $A(-\frac{1}{2}; 5)$ ، $B(-2 ; 4)$.

2) هل النقطة $C(5 ; 0)$ تنتمي إلى هذا التمثيل ؟

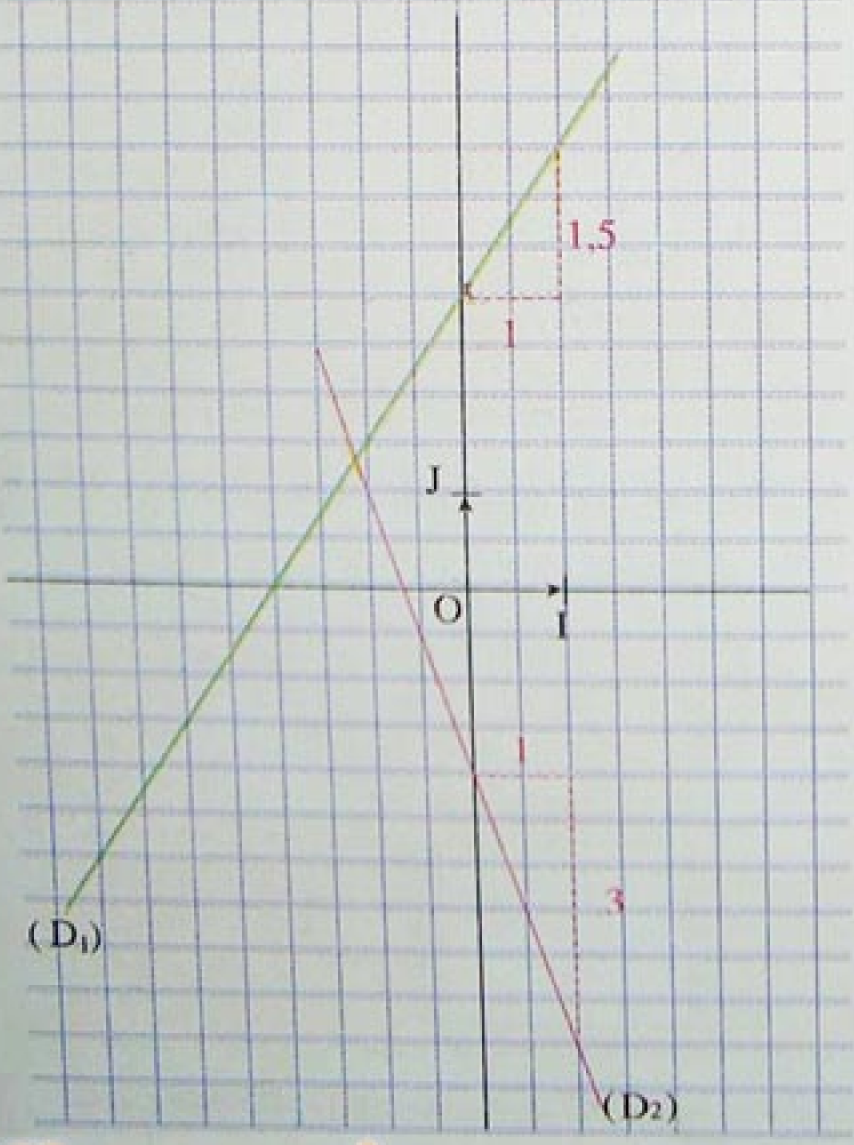
15 في الشكل الموالي :

(D_1) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية f.

(D_2) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية g.

1) إنطلاقا من التمثيل البياني للدالتين f و g.

- احسب المعاملين a و b.
- أعط العبارة الجبرية للدالتين f و g.



تمارين للتطبيق المباشر

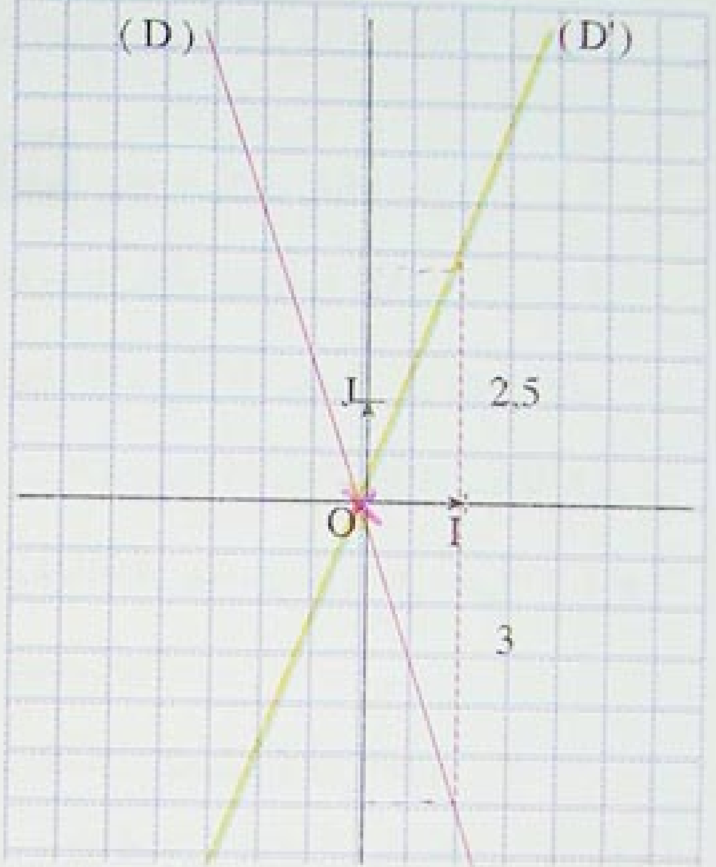
16 في الشكل الموالي :

(D) هو التمثيل البياني للدالة الخطية h.

(D') هو التمثيل البياني للدالة الخطية k.

1) اعتمادا على هذا التمثيل.

- احسب معاملي كل من الدالتين h و k.
- أعط العبارة الجبرية لكل منهما.



17 f و g دالتان معرفتان كالتالي :

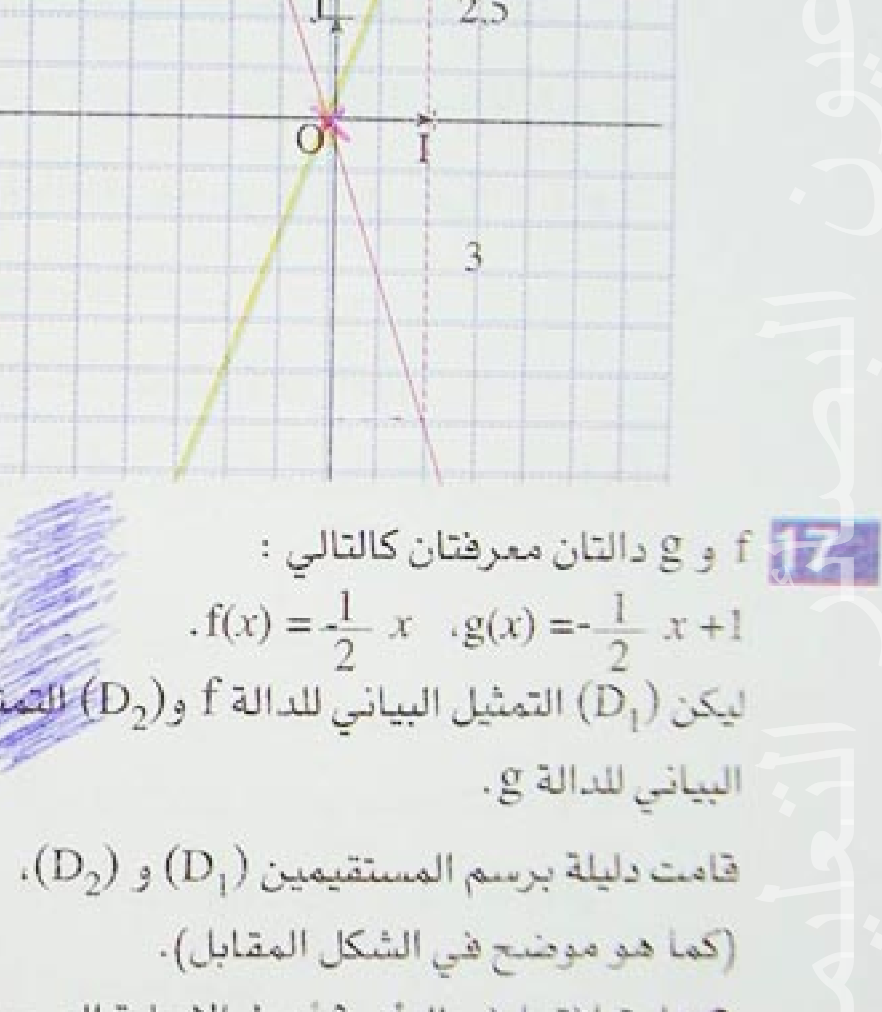
$f(x) = \frac{1}{2}x$ ، $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

ليكن (D_1) التمثيل البياني للدالة f و(D_2) التمثيل البياني للدالة g.

قامت دليلة برسم المستقيمين (D_1) و (D_2)،

(كما هو موضح في الشكل المقابل).

- هل توافقها في الرأي ؟ أعط الإجابة الصحيحة.



18 أعط ثمن بدلة رياضية سعرها 7500 DA إذا خفضت بنسبة بـ 20%.

19 ثمن هاتف نقال 12500 DA، ازداد ثمنه بـ 5%، كم أصبح ثمنه ؟

20 خزان ماء مملوء سعته $5m^3$، أفرغنا 30% من سعته، ثم أضفنا 20% من محتواه.

كم أصبح محتوى الخزان بالمتر المكعب (m^3)، ثم باللتر (l).

21 اكتب الدوال الخطية الآتية على شكل نسب مئوية:

1) $f(x) = (1,08)x$.

2) $g(x) = 0,7x$.

3) $h(x) = 2x$.

4) $i(x) = 3x$.

22 تمعن في الجدول التالي :

	خفض x بـ 8%	زيادة x بـ 8%	أخذ 8% من x
العبارة الجبرية	$x - \frac{8}{100}x = (1 - \frac{8}{100})x = 0,92x$	$x + \frac{8}{100}x = (1 + \frac{8}{100})x = 1,08x$	$\frac{8}{100}x = 0,08x$
الدالة الخطية	$x \mapsto 0,92x$	$x \mapsto (1,08)x$	$x \mapsto 0,08x$
معامل الدالة الخطية	0,92	1,08	0,08

أعد ملء الجدول بتعويض النسبة 8% بالنسب التالية :

1) 16%　　2) 90%　　3) 45%



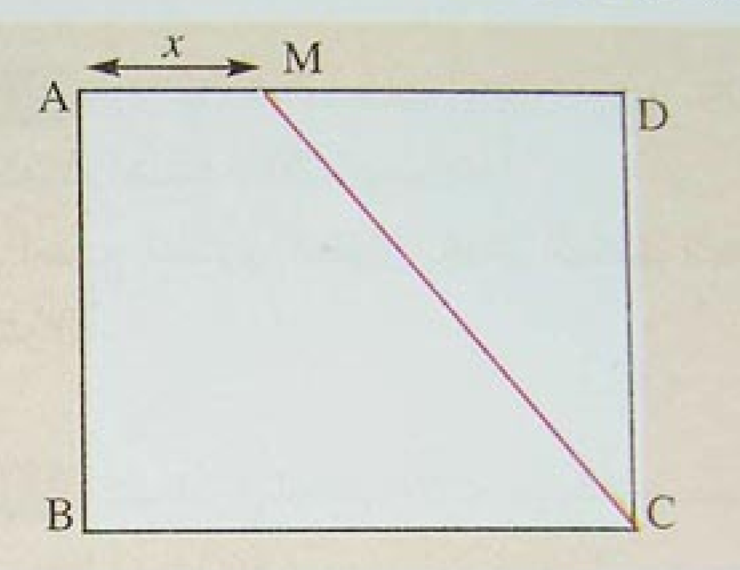
1 ليكن ABCD مستطيل بحيث $AB = 4cm$ و $BC = 5cm$.

ولتكن M نقطة متغيرة من قطعة المستقيم [AD].

نضع : $AM = x\ cm$.

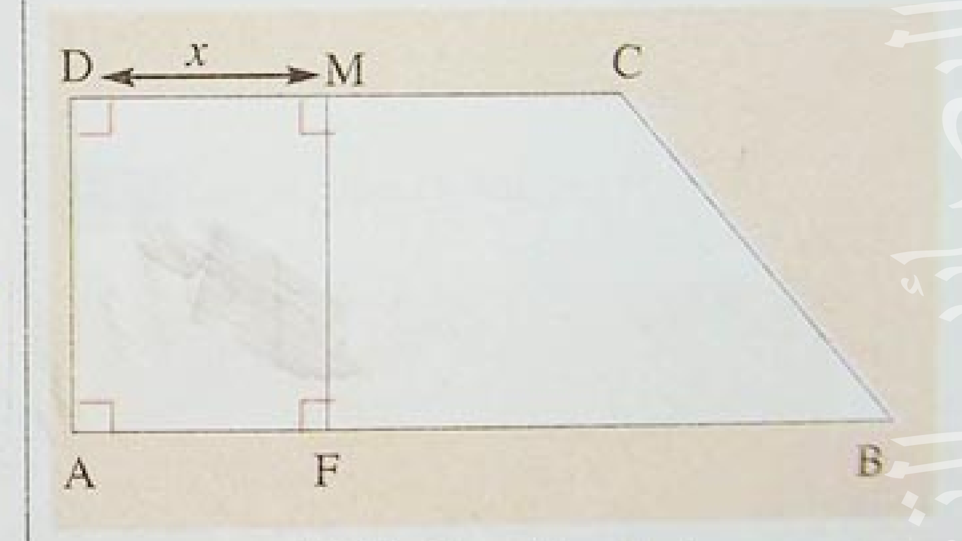
لتكن $S(x)$ مساحة الرباعي ABCM.

- عبر عن $S(x)$ بدلالة x.



2 ABCD شبه منحرف قائم حيث : $(AB) // (CD)$.

$AB = 8$. $DC = 5$. $AD = 4$. $\widehat{BAD} = 90°$.



1- احسب مساحة شبه المنحرف ABCD.

2 - لتكن M نقطة من [DC]. نضع $DM = x$.

F تقاطع العمود النازل من M على (AB).

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد x ؟

ب) نسمي $f(x)$ مساحة المستطيل ADMF.

احسب $f(x)$ بدلالة x.

ج) ارسم المنحنى الممثل للدالة f.

3 - نسمي $g(x)$ مساحة شبه المنحرف BCMF.

أ) اوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x.

ب) ارسم، في نفس المعلم السابق، المنحني الممثل للدالة g.

3 تستهلك سيارة 8L من البنزين لقطع 100Km.

سعة خزان وقودها هي 40L.

- عبّر عن المحتوى y لخزّان السيارة بدلالة المسافة المقطوعة x.

- اوجد بيانيا حجم البنزين المتبقي في خزان السيارة بعد قطع مسافة قدرها 500Km. ما ذا يعني ذلك ؟

4 ليكن المثلث ABC حيث :

$AC = 4\ cm$ ، $AB = 6\ cm$.

- طول الضلع [BC] متغير : $BC = x cm$.

احسب المحيط y للمثلث ABC بدلالة x.

مثّل الدالة المتحصل عليها من أجل $3 \leq x \leq 9$.

- أعط بيانيا :

1) قيمة المحيط من أجل $x = 5$.

2) طول [BC] من أجل محيط يساوي 16,5 cm.

5 أصحيح أم خاطئ ؟

ضع العلامة X في الخانة المناسبة.

1 - بأي دالة العدد 2- هو صورة للعدد 4 ؟

أ) ☐ $f(x) = -2x+2$ ، ب) ☐ $g(x) = x-4$ ،

جـ) ☐ $h(x) = -x+2$.

2 - الدالة التي ترفق بكل عدد x ثلثه مضاف إليه العدد 2 هي :

أ) ☐ $f(x) = (\frac{1}{3}x+2)$ ،

ب) ☐ $g(x) = 2x+\frac{1}{3}$ ،

جـ) ☐ $k(x) = (\frac{1}{3}+2)x$.

3 - التمثيل البياني للدالة الخطية ذات المعامل $\frac{5}{2}$ تشمل النقطة التي إحداثيتها :

أ) ☐ $(0 ; \frac{2}{5})$ ، ب) ☐ $(2 ; 5)$ ، جـ) ☐ $(5 ; 2)$.

6 أكمل ما يلي :

	ثمن السلعة (DA)	نسبة الزيادة (%)	قيمة الزيادة (%)
الزيت (5L)	380		40
اللحم (1Kg)	600	......	80
الحليب (1L)	15	16	......

7 أعط الدالة الخطية الموافقة لكل وضعية مما يلي :

1) أخذ 7% من x.

2) زيادة x بـ 7%.

3) خفض x بـ 7%.

4) أخذ 25% من x.

5) زيادة x بـ 54%.

6) خفض x بـ 54%.

7) ازدياد x بـ 68%.

8) خفض x بـ 42%.

8 اختر الجملة المناسبة : زيادة x بـ % .... أو نقصان x بـ % .... للدوال التالية :

$0,99x$	.... xبـ % ....
$1,38x$	.... xبـ % ....
$0,5x$	
$1,6x$	
$2,75x$	
$0,24x$	
$0,89x$	
$1,725x$	

9 قرّر تاجر تخفيض ثمن سلع محله بـ 25%.

1) أعط عبارة الدالة الخطية التي تربط بين الثمن x لسلعة وثمنها $f(x)$ بعد التخفيض.

2) أكتب لافتة السعر المخفض لكل سلعة مما يلي :



10 ثمن حذاء 1500 DA، أصبح سعره بعد التخفيض 1000 DA.

1) أعطِ معامل الدالة الخطية g المفسرة لهذا التخفيض.

2) استنتج نسبة التخفيض.

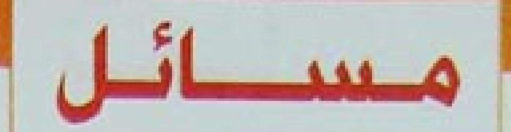
11 خفض تاجر ثمن سلع متجره بـ 20%.

1) ليكن x ثمن سلعة قبل تخفيض ثمنها، وليكن y ثمن السلعة بعد التخفيض.

عبر بدلالة x عن y.

2) إذا كان ثمن سروال قبل التخفيض هو 1200 DA، ما هو ثمنه بعد التخفيض ؟

3) سلعة سعرها بعد التخفيض 2880 DA. ما هو ثمنها قبل التخفيض ؟



مسائل

1 يمثل الماء 80% من وزن الإنسان.

1) ما هو وزن الماء وحجمه لشخص يزن 75kg، إذا علمت أن الكتلة الحجمية للماء هي $1g/cm^3$؟

2) ما هو وزن شخص، حجم الماء المتواجد في جسمه هو 50L ؟

2 أراد صائغ أن يعرف مدى نقاوة سبيكة من الذهب كتلتها 500g وذلك بقياس حجمها، فوجد أنّ حجمها $27cm^3$.

– هل هذه السبيكة مغشوشة ؟ (الكتلة الحجمية للذهب هي : $19,3\ g/cm^3$)

3 ما هو الفرق الزمني بين رؤيتك للبرق وسماعك للرعدّ علما أنهما يحدثان في آن واحد، وعلى بعد 10km منك، وأن سرعة الصوت هي 344m/s وسرعة الضوء هي 300 000km/s ؟

4 من بين أقدم أنظمة قياس درجة الحرارة هو النظام الذي وضعه الفيزيائي الألماني قابريال دانيال فهرنهايت وذلك سنة 1720. في هذا النظام وتحت ضغط مساو للضغط الجوي، درجة حرارة تجمد الماء تساوي 32°F المعادلة لـ 0°C، أمّا درجة غليان الماء فهي 212°F المعادلة لـ 100°C.

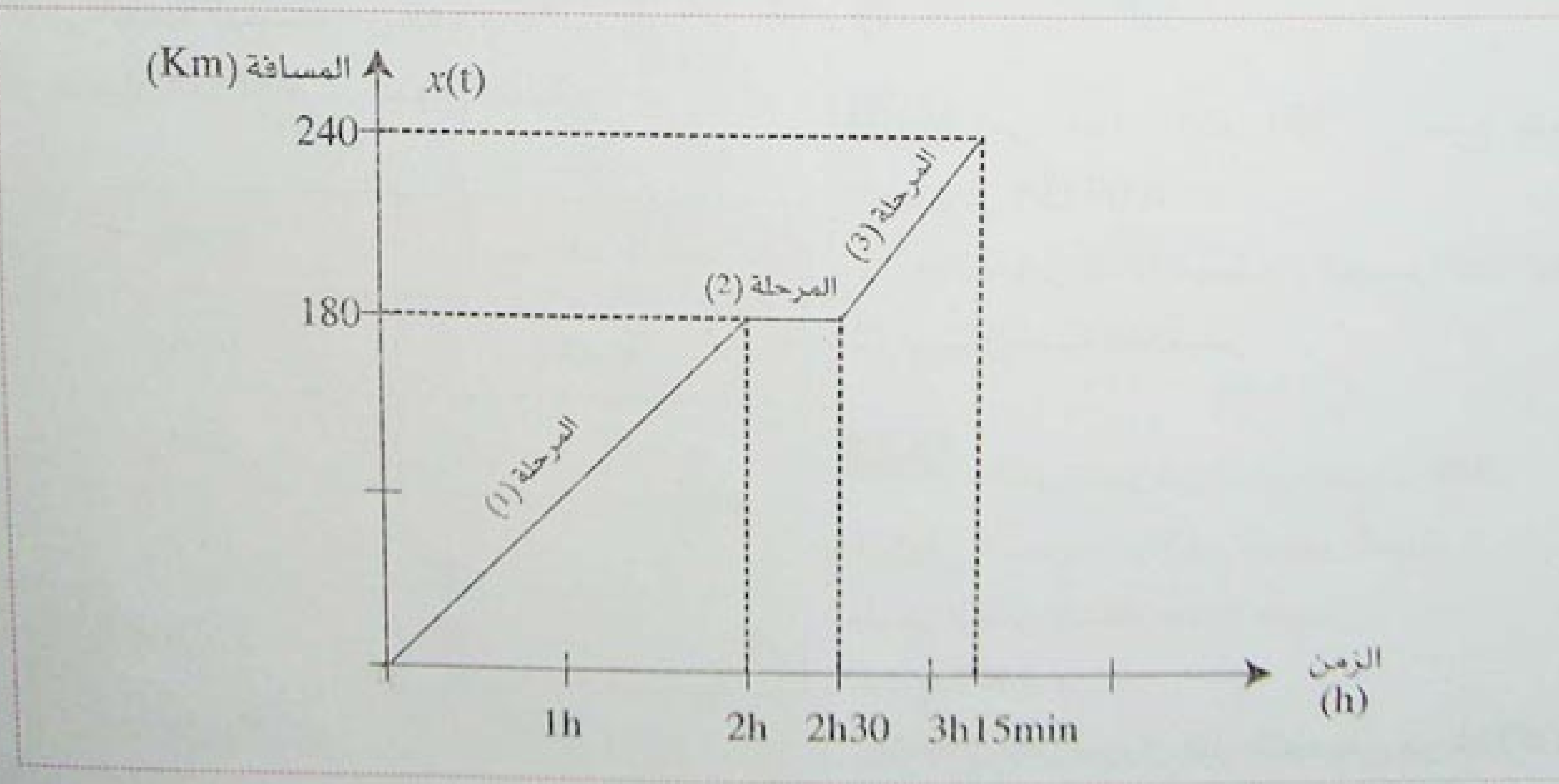
– اوجد الدالة التآلفية الرابطة بين درجة الحرارة الفهرنهايتية بدلالة درجة الحرارة بالسيلسيوس.

– أعط درجات الحرارة التالية في نظام الفهرنهايت :

5°C، 20°C، 37°C، -10°C.

– أعط درجات الحرارة التالية في نظام السيلسيوس: 50°F، 23°F، 0°F.

5 إليك المخطط الممثل للمسافة المقطوعة لسيارة بدلالة المدّة المستغرقة.

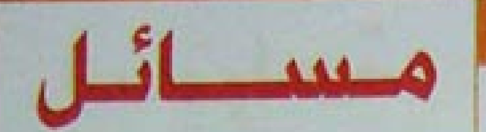


1) أعط $x(t)$ بدلالة t في كل مرحلة.

2) ماذا يمثل فيزيائيا ميل المستقيم في كل مرحلة ؟

3) ما هي المسافة الكلية المقطوعة ؟





6 لتكن f الدالة التآلفية المعرفة بـ : $f(x) = ax+b$ و g الدالة المعرفة بـ :

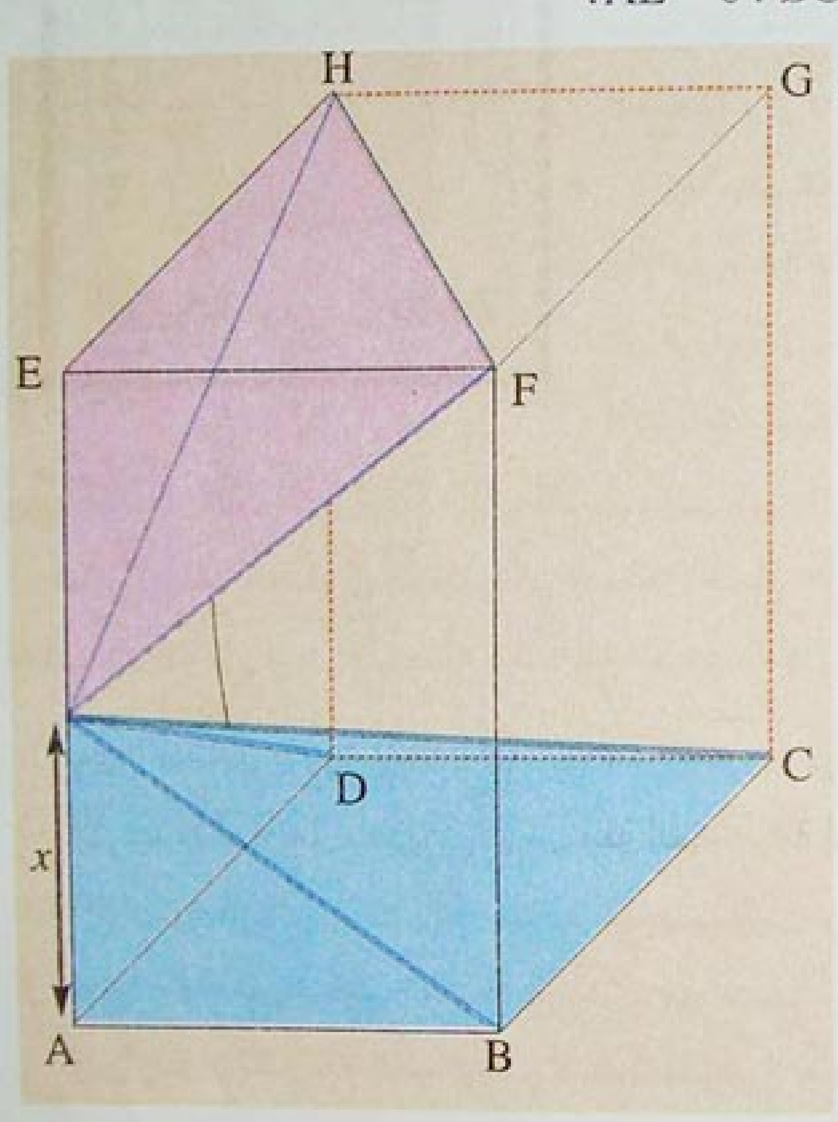
$$g: x \longmapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$$

1) احسب $f(0)$، $f(1)$ بدلالة a و b، ثم احسب $g(0)$ و $g(1)$.

2) اوجد قيمتي a و b اللتين من أجلها تتحقق المساواة $g(x) = f(x)$.

7 وحدة الطول هي السنتيمتر.

ABCDEFGH متوازي مستطيلات بحيث : $AB = 4$ ، $BC = 3$ ، $AE = 6$.



- S نقطة من [AE] بحيث $AS = x$ (عدد حقيقي موجب).

- ليكن V_1 حجم الهرم SABCD الذي قاعدته ABCD،

و V_2 حجم الهرم SEFH الذي قاعدته المثلث EFH.

1) عبّر عن V_1 و V_2 بدلالة x.

2) ما هي قيم x التي من أجلها $V_2 < V_1$.

3) في معلم معامد ومتجانس للمستوي، ارسم المستقيم (d_1) الذي معادلته $y = 4x$.

و(d_2) الذي معادلته $y = -2x+12$.

4) حل الجملة

$$\begin{cases} y = 4x \\ y = -2x+12 \end{cases}$$

5) ماذا تعني قيمتي x و y بالنسبة للحجمين V_1 و V_2 ؟

8 برميلان متماثلان A و B سعة كل واحد منهما $50l$. ملأنا البرميل A بالماء بمقدار 10% من سعته.

- استعملنا لملء ما تبقى من البرميل A مضخة تضخ 2L في الثانية، واستعملنا مضخة أخرى لملأ البرميل B، قدرتها على الضخ هي 3L في الثانية.

ليكن $V_A(x)$ حجم الماء في البرميل A و $V_B(x)$ حجم الماء في البرميل B.

- عبّر عن $V_A(x)$ و $V_B(x)$ بدلالة x حيث x يمثل الزمن معبر عنه بالثانية.

- ارسم V_A ، V_B في نفس المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ بدلالة x.

-اوجد لحظة تساوي محتوى البرميلين بيانيا وجبريا.



من التاريخ

ابن منعم العبدَري (توفي 626هـ/1228م)



حياته : اشتهر ابن منعم بعمله الأصيل في التحليل التوفيقي. وهو فرع من فروع الرياضيات يُعْنى بالتعداد، أي بتحديد عدد العناصر أو المجموعات الجزئية المتمتعة بخصائص معينة داخل مجموعة معطاة. ويرتبط التحليل التوفيقي بنظرية الأعداد ونظرية البيانات الحديثة. وكان ابن منعم قد انتقل إلى مدينة مراكش قادما إليها من مدينة دينية الأندلسية. وألّف هناك كتابه الرياضي الذي اشتهر به، وهو كتاب "فقه الحساب".

نجد في هذا الكتاب لأول مرة بابا مستقلا خاصا بالتحليل التوفيقي في كتاب رياضي. وينبّه هنا بعض المؤرخين إلى أنه كان يسود اعتقاد خاطئ مفاده أن هذا الفرع من الرياضيات مجال أبتكره رياضيون غربيون خلال القرنين 16م و 17م. والملاحظ أن الكتاب يكشف على ثراء الرياضيات التي كانت تدرّس في وقت ابن المنعم بمدينة مراكش. ويبيّن أيضا أن العلماء لم يكونوا آنذاك يكتفون بالتدريس، بل كانوا أيضا باحثين في حقل الرياضيات.

تناول ابن منعم التحليل التوفيقي في قسم من أقسام كتابه تحت عنوان "حصر الكلمات التي لا يتكلم البشر إلا بإحداهن". وقد اجتهد المؤلف في عرض الموضوع بدقة رغم الصعوبات التي واجهته في وضع الإطار العام لنتائجه.

من المسائل المطروحة : هذه عيّنة من أربع مسائل طرحها وحلها ابن منعم :

1) " عشرة ألوان من الحرير أردنا أن نعمل منها شراريب، بعضها من لون لون، وبعضها من لونين لونين، وبعضها من ثلاثة ألوان ثلاثة ألوان، وكذلك إلى أن تكون آخر شرابة من عشرة ألوان، وأردنا أن نعلم كم عدد كل نوع، نوع على انفراده من أنواع الشراريب، ألوان كل شرابة منها معلومة، أو كم عدد جميع الشراريب إذا جمعت على اختلاف عدد ألوان الشراريب".

2) "أردنا أن نعلم عدد الكلمات التي لا يلفظ البشر إلا بإحداها على أن يكون أصغرها من حرف، وأكبرها من عشرة أحرف، سواء كانت العشرة أحرف بجملتها مكررة، أو بعضها مكررا وبعضها مختلفا، أو كيف أمكن أن يلفظ البشر بها".

3) " أردنا أن تعلم عدد أوضاع حروف كلمة عدد تلك الحروف معلوم، (وقد تكرر) حرف منها أو حرفان أو أكثر تكريرا معلوما".

4) " جملة أغصان حرير ألوانها معلومة. أردنا أن نعمل منها شراريب، على أن يكون في كل شرابة عدة أغصان معلومة من ألوان معلومة".

مثلث باسكال : لقد أنشأ واستخدم ابن منعم – قبل باسكال (القرن 17م) المثلث الحسابي المعروف باسم "مثلث باسكال" المتداول في الكتب المدرسية الثانوية، والذي يؤدي دورا هاما في التحليل التوفيقي. وليس هذا فحسب إذ نجد في المغرب العربي رياضيين استخدموا هذا المثلث قبل ابن منعم ذاته. ومن بين هؤلاء نشير إلى الرياضي الشهير السموأل المغربي الذي كان أمينا فذكر أن الكرجي قد سبقه إليه.

كما اهتم ابن منعم كثيرا في كتابه باستخراج الجذور، إذ لم يكتف بالتطرّق للجذور التربيعية والتكعيبية بل تناول جذورا من رتب أعلى (مثل الجذر الخماسي للعدد 248832 والجذر السباعي للعدد 35831808، ...) مضيفا أن طريقته تمتدّ إلى استخراج أي جذر مهما كانت رتبته.



الرياضيات تتقدم

علم التَّعْمِية

ما هي التعمية : كانت المصالح الدبلوماسية والعسكرية والوسائل الأمنية تحتكر التعمية وأدواتها. ومنذ مطلع القرن العشرين، تمخضت التعمية، عبر الرياضيات، فولدت علم الحاسوب! والغريب أن علم الحاسوب، "ابن التعمية" قد تمكّن من احتواء هذا العلم الذي يرجع تاريخه إلى قرون عديدة.

التعمية مجموعة من الأدوات التقنية تسمح بإخفاء معلومات عبر شفرة سرية، كأن تكتب نصا وتستبدل فيه كل حرف بحرف آخر أو برقم وفق قاعدة معينة. وإذا كانت التعمية تستخدم في الماضي أدوات من المنطق الرياضي فإن التعمية الحديثة أصبحت وطيدة الصلة بكافة المجالات العلمية والاجتماعية.

متى ظهرت التعمية : بدأت التعمية فنًّا ثم صارت تقنية، ولم تلبث أن أصبحت علما قائما بذاته. وقد عاشت التعمية هذه المراحل الثلاث، وانتقلت من مرحلة إلى أخرى عبر انقطاعات وقفزات نوعية أوصلتها إلى عصرها الحالي.

لقد ظهرت التعمية منذ القدم إذ عثر علماء الآثار عما يثبت استعمالها إبان عهد الفراعنة في شكل بدائي. ويُذكر أن اليهود كانوا يخفون معنى بعض النصوص بقلب أحرف الأبجدية. وكان قيصر الروم يستعمل شفرة سرية في مراسلاته حيث كان يسحب مثلا جميع الحروف بأربع مراتب : الألف يصبح ثاء والباء جيما والتاء حاء، الخ.

والملاحظ أن لعلماء العرب والمسلمين السبق في مجال التعمية التي كانوا يسمّونها، قبل أكثر من 10 قرون "علم التعمية واستخراج المعمّى". والغريب أنه شاع في الغرب الاعتقاد بأن علم التعمية انتاج أوروبي، غير أن المخطوطات التاريخية الحديثة للكِنْدي وابن الدريهم وغيرهما من المسلمين أوضحت ريادة هؤلاء في التعمية. فهم أوّل من كتبوا عشرات المؤلفات في طرائق التعمية، وأسسّوا لمنهجيات استخراج المعمّى، وسبقوا الغرب بنحو7 قرون.

تطور التعمية : من المعلوم أن بعض الطرق التقليدية والميكانيكية قد تواصل استخدامها حتى فترة الحرب العالمية الثانية. ويرى المتتبعون أن هذه المرحلة (العصر الفني للتعمية، حسب البعض) هو الذي جلب الأنظار أكثر من غيره.

وبعد الحرب العالمية الأولى ظهرت الحاجة إلى تطوير الجانب النظري فطلب من الرياضيين ذلك، لكنه لم يكن يسيرا، بالنسبة للعسكريين، إعادة الرياضيين إلى مجال التعمية لأنها أصبحت تعتبر سلاحا مرتبطا بالجهد الحربي. ومن جهة أخرى نشير إلى أن تطوير الحواسيب لعلم التعمية سمح بالابتعاد عن المعالجات التقليدية المرتبطة باللغات المتداولة : الرسالة أو البرقية في مفهوم التعمية ليست سوى سلسلة من الأرقام المتكونة من الرقمين 0 ، 1.

الأعداد والتعمية : تستعمل التعمية الحديثة الأعداد الأولية بكثافة. كيف يتم استعمال هذه الأعداد في التعمية؟ من المعلوم أنه كلما كان العدد الطبيعي كبيرا كلما صعب تفكيكه إلى عوامل أولية. تصوّر مثلا أنك سئلت عن تفكيك عدد طبيعي يبلغ عدد أرقامه 1500 رقم. نحن نستطيع عادة القيام بهذه العملية اعتمادا على الطرق التقليدية، مستنجدين بالحاسوب إذا كان عدد أرقام العدد المطلوب لا يتجاوز كثيرا 15 رقما. وباختصار يمكن القول أن الإنسان الذي يريد اختراق السر في التعمية عليه أن يفكك عددا كبيرا إلى عوامل أولية ... وهذا يزداد صعوبة كلما كبر العدد.

يقارن الخبراء علم التعمية بشبكة الإنترنت، فكلاهما ترعرع ونمى لدى العسكريين. وعندما فكّ العسكر الحصار عليهما وجعلهما في متناول المدنيين تطوّرا بشكل مدهش، وقدّما خدمات جليلة للمدنيين والعسكريين وللناس أجمعين ... وللرياضيات في ذلك ثواب عظيم!



7

جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تمهيد

1

حل المعادلات التالية :

1) $-2x + 5(1-4x) = -6$ ؛ 2) $1 - y = 3(-2y - 8)$.

2

x و y عددان بحيث $y = 3x - 4$.

احسب y إذا كان $x = 2$.

احسب x إذا كان $y = -3$.

3

الدالة التآلفية g معرفة كالتالي : $g(x) = -3x + 4$.

- مثّل بيانيا هذه الدالة في معلم $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

- هل النقطة $C(5 ; 0)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة g ؟



1 المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين

قالت جيهان لرميساء : إخترت عددين مجموعهما 1. هل بإمكانك ايجاد هذين العددين ؟.

بعدما فكرت رميساء قالت : من المستحيل ايجاد العددين الذين فكرت فيهما بهذه المعطيات فقط.

1 ما رأيك في جواب رميساء (برّر ذلك) ؟

2 نسمي العدد الأول x والعدد الثاني y.

- اكتب المعادلة التي تترجم هذا المعطى ورقمه بـ (1).
- عبر عن y بدلالة x.

3 اوجد 3 ثنائيات (x, y) تحقق المعادلة (1).

4 نعتبر الدالة f حيث $f(x) = -x + 1$. مثّل بيانيا هذه الدالة في معلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

5 ما هي العلاقة الموجودة بين نقط هذا التمثيل وحلول المعادلة (1) ؟

- هل يمكنك ايجاد جميع حلول المعادلة (1) ؟ (علل ذلك) .

2 جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تنبهت جيهان أنها نسيت أن تعطي المعلومة الآتية :

«مجموع خمسة أمثال العدد الأول وثلاثة أمثال العدد الثاني يساوي -1 ».

1 اكتب معادلة تترجم فيها هذه المعطيات ورقمها بـ (2).

2 عبّر عن y بدلالة x في المعادلة (2).

3 نعتبر الدالة g المعرّفة كالتالي : $g(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$.

مثّل الدالة g. (الدّالتان f و g تمثلان في نفس المعلم).

4 ما هي العلاقة الموجودة بين نقط هذا التمثيل وحلول المعادلة (2) ؟

5 اوجد بيانيا العددين المطلوبين.

أكمل : الثنائية (... ; ...) حلّ مشترك للمعادلتين (1) و(2).

نقول إن : الثنائية (... ; ...) هي **الحلّ البياني** لجملة المعادلتين التي تكتب على الشكل :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$



الحل الجبري لجملة معادلتين

3 طريقة الحل بالتعويض

1 **لحل الجملة :**
$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ 5x + 3y = -1 & (2) \end{cases}$$

أولا : نكتب أحد المجهولين بدلالة الآخر إنطلاقا من إحدى المعادلتين.

مثلا : نستنتج من المعادلة (1) :

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (3).

ثانيا : نعوض y بقيمتها في المعادلة (2) فنجد : $5x + 3(\ldots\ldots\ldots) = -1$

(نتحصل عندئذ على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x)، حل هذه المعادلة.

ونكتب : $x = \ldots\ldots\ldots$.

ثالثا : نعوض x بقيمتها في إحدى المعادلات (1) أو (2) أو (3).

نعوّض في المعادلة (3).

فنجد : $y = - \ldots\ldots\ldots$ **و منه** $y = \ldots\ldots\ldots$.

نستنتج أن : حل الجملة هو $(\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots)$

هذه الطريقة تسمى **طريقة الحل بالتعويض.**

2 **تحقق أن :** $(-5 ; 2)$ حلٌ للجملة
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + 2y = -8 \end{cases}.$$

حل هذه الجملة بطريقة التعويض.

4 طريقة الحل بالجمع

1 **لنحل الجملة :**
$$\begin{cases} 3x - y = -4 & (1) \\ -x + 2y = 3 & (2) \end{cases}$$

أولا : إيجاد قيمة المجهول x.

لايجاد قيمة x نجعل معاملي y متعاكسان.

أي نضرب المعادلة (1) في العدد 2 فنتحصل على الجملة :
$$\begin{cases} 6x - 2y = -8 & (1) \\ -x + 2y = 3 & (2) \end{cases}$$

ثانيا : نجمع المعادلتين (1) و (2) طرفا لطرف فنحصل على معادلة ذات مجهول x

وهي $\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ،

ومنه $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

ثالثا: اتبع نفس الطريقة لحساب المجهول y.

رابعا : نستنتج أن حل الجملة
$$\begin{cases} 3x - y = -4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$
هو $(\ldots\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots\ldots)$



2 حل بطريقة الجمع الجملة :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 19 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$



5 حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

إليك الجملة :

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

1 حل هذه الجملة بيانيا .

2 حل هذه الجملة جبريا .



6

f و g دالتان معرفتان كالتالي :

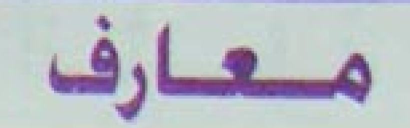
$f(x) = 6 - 2x$ ، $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

1 احسب إحداثيتي N نقطة تقاطع (d) و (d') حيث (d) التمثيل البياني للدالة f و (d') التمثيل البياني للدالة g.

2 أنشىء (d) و(d') وتحقق من نتيجة السؤال (1).

7 ترييض مسألة

يوجد في علبة 180 كرية خضراء وصفراء.
عدد الكريات الخضراء يساوي 3 أضعاف عدد الكريات الصفراء.
ما هو عدد الكريات الخضراء ؟
ما هو عدد الكريات الصفراء ؟



1 معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين

تكتب معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y على الشكل $ax + by = c$.
حيث a و b و c أعداد معلومة.
إن حلول هذه المعادلة غير منتهية.

ملاحظة
المعادلتان المتكافئتان معادلتان لهما نفس مجموعة الحلول.

مثال : نعتبر المعادلة :

$2x + 3y = 6 \quad (1)$.

إذا ضربنا كلا من طرفي المعادلة (1) في الأعداد $-\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{1}{2}$ ؛ (-2) نحصل على معادلات مكافئة لها وهي على الترتيب :

$-\frac{2}{3}x - y = -2$ ، $x + \frac{3}{2}y = 3$ ، $-4x - 6y = -12$.

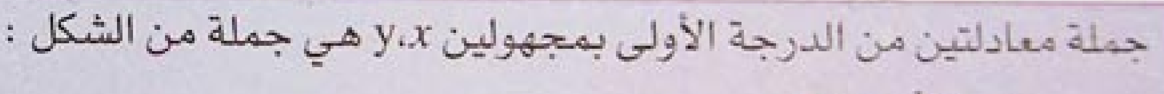
2 جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x،y هي جملة من الشكل :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حيث a، b، c، a'، b'، c' أعداد معلومة.

مثال : $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ جملة معادلتين بمجهولين x و y .



3 الحل الجبري لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y هو ايجاد الثنائيات $(x ; y)$ التي تحقق المعادلتين في آن واحد.
لحل جبريا جملة معادلتين نتبع إحدى الطريقتين :
1) طريقة الحل بالتعويض.
2) طريقة الحل بالجمع.

ملاحظة
بعد حساب قيمة أحد المجهولين بطريقة الجمع ليس من الضروري اتباع نفس الطريقة لحساب قيمة المجهول الآخر، بل يمكن التعويض بهذه القيمة في إحدى معادلتي الجملة لحساب هذا الأخير.

مثال : حل الجملة :

$$\begin{cases} 3x + y = -17 & (1) \\ -3x + y = -15 & (2) \end{cases}$$

لاحظ أن معاملي المجهول x متعاكسان.

إذن نجمع (1) و (2) طرفا لطرف فنجد : $2y = -32$. ومنه $y = -16$.

نعوض قيمة y في المعادلة (1) فنجد : $3x + (-16) = -17$،

أي : $3x = 16 - 17$،

ومنه : $x = \frac{-1}{3}$.

إذن $(-\frac{1}{3} ; -16)$ حل للجملة.

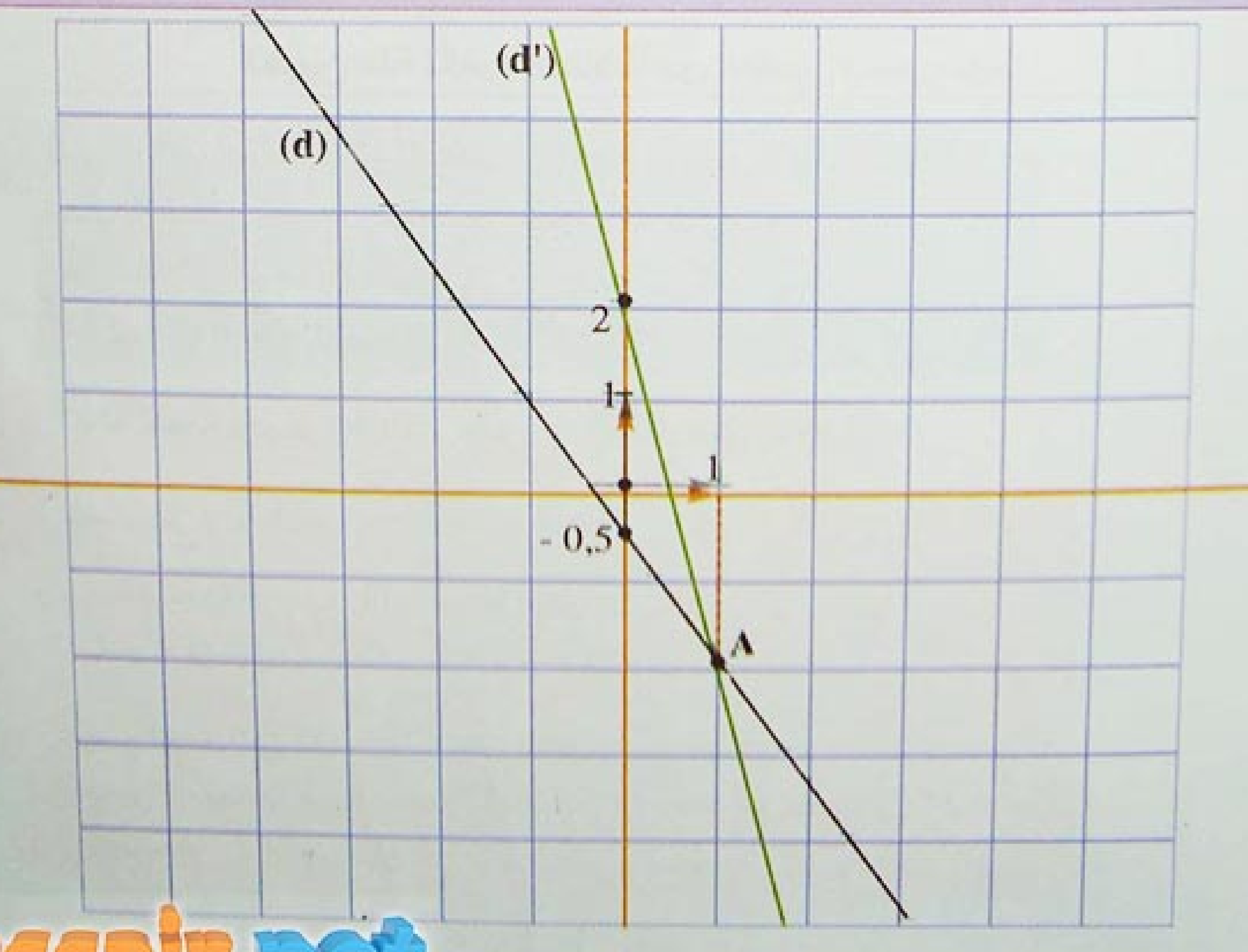


4 الحل البياني لجملة معادلتين

لحل الجملة :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$ بيانا .

- نرسم في معلم المستقيمين (d) و (d') المعرفين بمعادلتيهما $y = -1{,}5x - 0{,}5$ و $y = -4x + 2$.
- (d) و (d') يتقاطعان في النقطة A.
- إحداثيا النقطة $A(1 ; -2)$ هو حل لجملة المعادلتين.



طرائق وتمارين محلولة

حل جملة بطريقة التعويض

طريقة

- انطلاقا من معادلة نعبر عن أحد المجهولين بدلالة الآخر، مثلا x بدلالة y.
- في المعادلة الثانية نعوض x بعبارتها لنتحصل عندئذ عن معادلة بمجهول y. نحسب y.
- نعوض y بقيمته في عبارة x فنستنتج x.

تمرين

حل الجملة :

$$\begin{cases} x - 2y = -8 & (1) \\ 3x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

الحل

من المعادلة (1) نكتب:

$x = 2y - 8$ (3).

نعوض x بـ $2y - 8$ في المعادلة (2) فنجد :

$3(2y - 8) + 2y = 0$،

أي : $6y - 24 + 2y = 0$،

وبالتالي : $8y = 24$،

ومنه $y = 3$.

نعوض y بقيمتها في المعادلة (3) نتحصل على :

$x = 2(3) - 8$.

أي : $x = 6 - 8$.

ومنه $x = -2$.

استنتاج : الثنائية $(-2 \,;\, 3)$ هو الحل الوحيد لجملة المعادلتين.

تعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين وصورتيهما

طريقة

تعيين دالة تآلفية f هو ايجاد العددين a و b بحيث $f(x) = ax + b$.

لمعرفة عددين وصورتيهما نشكل جملة معادلتين بمجهولين a و b.

نحل الجملة المحصل عليها.

نعوض a و b بقيمتيهما في : $f(x) = ax + b$.

تمرين

f دالة تآلفية بحيث $f(1) = 2$ و $f(-1) = -4$. عين الدالة f.

الحل

نبحث عن a و b بحيث $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = -4 \end{cases} \;;\; \begin{cases} 2 = a + b & (1) \\ -4 = -a + b & (2) \end{cases}$$

نجمع المعادلتين (1) و(2) طرفا لطرف فنجد $2b = -2$ **ومنه : $b = -1$.**

نعوض b بقيمتها في المعادلة (1) فنجد $2 = a - 1$ **و بالتالي : $a = 3$.**

النتيجة : $f(x) = 3x - 1$.



طرائق وتمارين محلولة

حل مسألة بتوظيف جملة معادلتين

طريقة

- اختيار المجهولين.
- تربيض الوضعية بالتعبير عنها بمعادلتين.
- حل جملة المعادلتين.
- مراقبة النتيجة (معقوليتها، ملاءمتها للمعطيات).
- الإجابة عن السؤال.

تمرين

6 kg من مربى المشمش موزعة في 14 علبة، من بينها علب تحتوي على 500 g والأخرى على 375 g.

ما هو عدد العلب من كل نوع ؟

الحل

- نرمز بـ x لعدد العلب التي تحتوي على 500 g.
- نرمز بـ y لعدد العلب التي تحتوي على 375 g.

يوجد 14 علبة يعني : $x + y = 14$.

x علبة من نوع 500 g تحتوي كل منها على : $0,5x$ kg.

y علبة من نوع 375 g تحتوي كل منها على : 0,375 kg.

يوجد 6 kg من المربى يعني : $0,5x + 0,375y = 6$.

- نتحصل على الجملة :

$$\begin{cases} x + y = 14 & (1) \\ 0,5x + 0,375y = 6 & (2) \end{cases}$$

- نحل الجملة. من المعادلة (1) :

$y = 14 - x$ (3).

نعوض y في المعادلة (2) فنجد :

$0,5x + 0,375(14 - x) = 6$،

أي : $0,5x + 5,25 - 0,375x = 6$،

و بالتالي : $0,125x = 0,75$،

ومنه : $x = \dfrac{0,75}{0,125}$.

إذن : $x = 6$.

نعوض x بقيمتها في المعادلة (3) فنجد :

$y = 14 - 6$ و منه $y = 8$.

الثنائية (8 ; 6) حل الجملة.

يوجد 6 علب تحتوي كل منها على 500 g و 8 علب تحتوي كل منها على 375 g.



جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

1 لتكن الجملة التالية :

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

1) عيّن الحل المناسب لهذه الجملة.

• $(-2 ; 1)$ ؛ $(1 ; -1)$ ؛ $(2 ; -1)$ ؛ $(2 ; 1)$ ؛ $(-2 ; -1)$.

2) حل الجملة بطريقة التعويض.

2 اعتمادا على طريقة الجمع، حل الجمل.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1-y}{6} \\ \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

3 اعتمادا على طريقة التعويض، حل الجمل التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = -2 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = \sqrt{5} \\ x\sqrt{6} + 2y = \sqrt{10} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 0,3x + 0,4y = 0,5 \\ 0,5x - 0,2y = 1,7 \end{cases} \quad ;$$

$$\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3} + \dfrac{2y-3}{2} = 0 \\ \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{2x+1}{3} = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dfrac{4}{3}(x+y) + \dfrac{2}{3}(x-y) = 1 \\ \dfrac{2}{3}(x+y) + \dfrac{3}{4}(x-y) = 1 \end{cases}.$$

4 لتكن الجملة :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

(O , I , J) معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

• ارسم المستقيم الذي معادلته :

$2x + y = 2$.

• ارسم المستقيم الذي معادلته :

$x + y = 1$.

• حل بيانيا الجملة.

5 أنشىء المستقيمين (D) و (D') في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ حيث :

(D) معادلته: $y = \dfrac{3}{2}x - 5$.

(D') معادلته: $y = \dfrac{-3}{2}x - 1$.

عيّن بيانيا إحداثيتي N نقطة تقاطع (D) و(D')، ثم تحقق من ذلك حسابيًا.



1 f دالة تآلفية بيانها يشمل النقطتين :
$A(1\ ;\ 2)$ ، $B(-1\ ;\ 0)$.
عين الدالة التآلفية f.

2 $(0, I, J)$ معلم متعامد ومتجانس.
$T(-4\ ;\ -10)$ ؛ $M(2\ ;\ 5)$ نقطتين منه.
هل المستقيم (MT) يعين تمثيلا بيانيا لدالة خطية g ؟
عين هذه الدالة، إن وجدت ؟

3 في معلم $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ علم النقط :
$A(-3\ ;\ 4)$ ، $B(3\ ;\ 0)$ ، $C(5\ ;\ \frac{-4}{3})$.
بين أن النقط A، B، C في استقامية.

4 عين الدالة التآلفية f بحيث :
$f(-1) = -3$ ؛ $f(-4) = 5$.
عين الدالة التآلفية g بحيث : $g(3) = -2$ ؛ $g(-2) = 3$.

5 لإقامة حفل نهاية السنة الدراسية اشترى مدير المؤسسة 20 قارورة مشروبات غازية و30 قارورة عصير بثمن 1400 DA.
بعد نهاية الحفل بقيت 7 قارورات مشروبات غازية وقارورة عصير ثمنها معا هو 205 DA.
ما هو ثمن قارورة المشروب الغازي وثمن قارورة عصير البرتقال ؟

6 يضم أحد رفوف مكتبة مدرسية 42 كتابا . سمك بعض الكتب 3 cm وسمك البعض الآخر 5 cm. هذه الكتب موضوعة في صف طوله 150 cm.
اوجد عدد الكتب التي سمكها 3 cm وعدد الكتب التي سمكها 5cm.

7 x و y هما قيسا زاويتين بالدرجات، اوجد x و y.
إذا كان x يزيد عن y بـ $20°$ وكانت الزاويتان متكاملتين.

8 STR مثلث قائم في R.
اوجد قيسي $\hat{T}$ و $\hat{S}$ علما أن $\hat{S}$ تزيد عن $\hat{T}$ بـ $20°$.

9 في مزرعة لتربية الدواجن، يوجد دجاج و أرانب، عدد رؤوسها الإجمالي 78 رأسا .
أما العدد الإجمالي لأرجلها فهو 218 رجلا .
ما هو عدد الدجاج وعدد الأرانب ؟

10 اوجد عددين مجموعهما 286 علما أنّه إذا قسمنا أكبرهما على أصغرهما، يكون الحاصل 4 والباقي 21.

11 وضع في بنك مبلغان من المال مجموعهما 50 000 000 DA.
الأول بفائدة % 8 والثاني بفائدة % 12، فكانت فائدة المبلغين في نهاية السنة 5 080 000 DA.
ما هي قيمة كل من المبلغين وفائدة كل واحد ؟

12 اوجد كسرا، إذا أضفنا إلى بسطه 1 وأنقصنا من مقامه 1 يكون ناتج الكسر هو 1، وإذا أضفنا إلى المقام 1 يكون ناتج الكسر مساويا $\frac{1}{2}$.

13 العددان x و y يحققان العلاقة :
$x\sqrt{2} = 2y$.
بيّن أنّ : $\sqrt{2}$
$(\sqrt{2}+4)(\sqrt{2}-4)$ عدد ناطق.

اجعل مقام النسبة $\frac{-14}{-4}$ عددا ناطقًا.

احسب x و y إذا علمت أن :
$2x - y = 7$.

14 ليكن المستطيل ABCD.
إذ زاد طول المستطيل ABCD بـ 20%، فإن نصف محيطه يصبح 22,4 cm، وإذا نقص عرضه بـ 20%، فإن نصف محيطه يصبح 18,4cm .
- احسب بعدي هذا المستطيل.

1 انطلقت سيارة من مدينة A على الساعة السادسة والنصف بسرعة متوسطة قدرها 60 km/h متوجهة نحو مدينة B.

وفي نفس الوقت انطلقت دراجة نارية من المدينة B نحو المدينة A بسرعة متوسطة قدرها 52 km/h.

عين اللحظة التي تتلاقى فيها السيارة مع الدراجة، وبعد نقطة التلاقي عن المدينة A، علما أن المسافة بين المدينتين A و B هي 196 km.

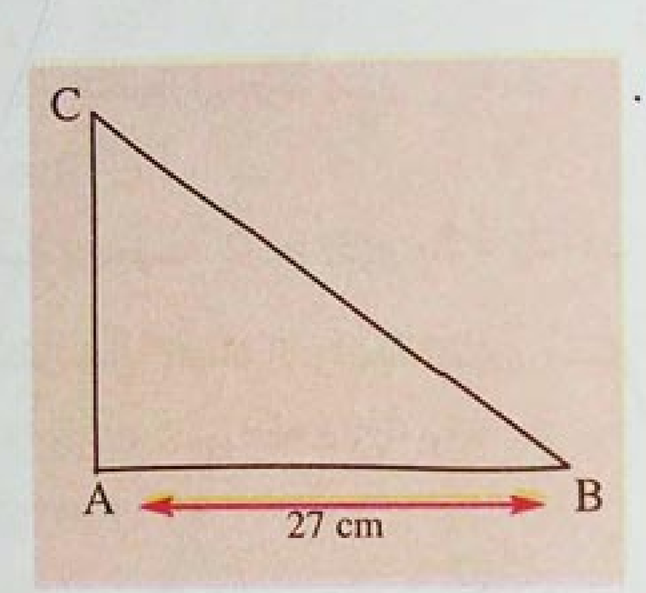
2 حديقة مستطيلة الشكل لو نقص طولها 3 أمتار وزاد عرضها 6 أمتار لصارت مربعا وزادت مساحتها عن المساحة الأولى بمقدار $78\ m^2$.

- ما هو طول وعرض الحديقة ؟

3 حل الجملتين :

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x^2 - y^2 = 6 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}.$$

4 ABC قائم في A كما هو مبين في الشكل (باليد).



- احسب الطولين AC و BC.

إذا علمت أنّ محيط المثلث ABC يساوي 108 cm.

5 مستطيل محيطه 18 cm ومساحته $18\ cm^2$.

1- اكتب المعادلتين المناسبتين للمعطيات حيث x هو طول المستطيل و y عرضه.

2- تحقق أن $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$.

- باستعمال هذه المساواة، احسب $(x - y)^2$، ثم استنتج $x - y$.

3- احسب كلا من طول وعرض هذا المستطيل.

6 توجد في موقف سيارات دراجات نارية و سيارات أجرة، عددها الإجمالي 70، والعدد الإجمالي لعجلاتها 180 .

- ما هو عدد السيارات وعدد الدرجات النارية ؟

7 ABC مثلث مجموع طولا ضلعيه [AB] و[AC] يساوي $14\sqrt{5}$، وطول الضلع [AB] يزيد عن طول الضلع [AC] بـ $2\sqrt{5}$.

1- احسب الطولين AB ، AC.

2- إذا كان ABC قائما في A، احسب BC.

من التاريخ

ابن حمزة الجزائري (القرن 10هـ / 16 م)

حياته : ولد ونشأ ابن حمزة بالجزائر العاصمة، ويعرف بابن حمزة الجزائري (وابن حمزة المغربي)، اشتهر كعالم في الرياضيات. وهو من أب جزائري وأم تركية. وحرص والده على تعليمه طوال فترة الطفولة. وعند بلوغه سن العشرين لم يجد بالجزائر معلما قديرا فقرر والده إرساله إلى اسطنبول عند أسرة والدته حتى يتمكّن من مواصلة دراسته. وبعد الانتهاء من دراسته التحق في اسطنبول بديوان المال في قصر السلطان العثماني ليتولى الحسابات.

وظل ابن حمزة في منصبه باسطنبول حتى سمع بوفاة أبيه، فرحل إلى الجزائر لرعاية والدته. وفي الجزائر عمل ابن حمزة في دكان يؤجرها لتجار صغار فترة من الزمن. لكنه سرعان ما باع متاجر أبيه، وباع معها البيت بعد أن قرّر الرحيل صحبة أمه إلى مكة المكرمة.

وكان ابن حمزة يقوم بتدريس علم الحساب للحُجّاج القادمين إلى مكة المكرمة. فذاع صيته حيث كان يهتم بالمسائل الحسابية ذات العلاقة بما يحتاجه الناس في حياتهم اليومية، ومنها مسائل الميراث. وسئل ذات مرة عن قضية ميراث - عرفت فيما بعد بالمسألة المكيّة - من قبل أحد الحجاج الهنود أعيت الرياضيين الهنود دون أن يجدوا لها حلا. لكن ابن حمزة تمكّن من حلّها مقدما تفاصيلها في جدول. ويذكر بعض المؤرخين أن ابن حمزة كان من وراء بزوغ مفهوم اللوغاريتم الذي ظهر فيما بعد في الغرب، والذي سوف تتعرف عليه خلال دراستك الثانوية.

المسألة المكيّة : ترك رجل تسعة أولاد، وقد توفي عن إحدى وثمانين نخلة. تعطي النخلة الأولى في كل سنة تمرا زنته رطل واحد، والثانية تعطي رطلين. والثالثة ثلاثة أرطال. وهكذا إلى النخلة الحادية والثمانين التي تعطي واحدا وثمانين رطلا. **السؤال :** المطلوب تقسيم النخلات بحيث يكون لكل ولد 9 نخلات تعطي نصيبا من التمر يساوي نصيب كل واحد من بقية الأخوة.

حل المسألة المكيّة : لقد قدّم ابن حمزة حل المسألة في هذا الجدول (من الصعب معرفة كيف اهتدى إليه) :

	الولد 1	الولد 2	الولد 3	الولد 4	الولد 5	الولد 6	الولد 7	الولد 8	الولد 9
أرقام النخيل	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	18	10	11	12	13	14	15	16	17
	26	27	19	20	21	22	23	24	25
	34	35	36	28	29	30	31	32	33
	42	43	44	45	37	38	39	40	41
	50	51	52	53	54	46	47	48	49
	58	59	60	61	62	63	55	56	57
	66	67	68	69	70	71	72	64	65
	74	75	76	77	78	79	80	81	73
عدد الأرطال	369	369	369	369	369	369	369	369	369

حاول أن تعرف كيف توصّل ابن حمزة إلى هذا الجدول.



الرياضيات تتقدم

مسألة الألوان الأربعة

المسألة: من بين المسائل الشهيرة في الرياضيات تلك التي عرفت بـ "مسألة الألوان الأربعة"؛ وهي تتساءل عما إذا كان بالإمكان تلوين أية خريطة جغرافية بأربعة ألوان، لا أكثر، وذلك بمراعاة بعض الشروط: أهمها ألا نلوّن بلدين متجاورين بنفس اللون.

وإذا كان الجغرافيون وعلماء الخرائط قد اعتبروا هذه المسألة "البسيطة" محلولة منذ قديم الزمان لأنهم لم يحتاجوا، في يوم من الأيام، إلى لون خامس لتلوين خرائطهم فإن الرياضيين لم يكتفوا بما توحي لهم به التجربة وعكفوا على الإتيان ببرهان رياضي سليم. وهكذا توصلوا بعد جهد جماعي مكثّف - دام 124 سنة - إلى البرهان الذي سعوا من أجله ... وأي برهان؟ إنه برهان أثار الكثير من النقاشات لأنه ألحق أضرارا بمفهوم البرهان الرياضي ذاته بسبب الإفراط في استخدام الحاسوب.

من طرح المسألة: كان فرنسيس غوثري طالبا في قسم الرياضيات بجامعة لندنية في منتصف القرن التاسع عشر. ثم صار بعد ذلك أستاذا بجامعة جنوب إفريقيا. وفي أكتوبر 1852 بعث فرنسيس برسالة إلى أخيه فريدريك الذي كان يدرس بنفس الجامعة التي تخرّج منها.

وفي هذه الرسالة طرح فرنسيس مسألة الألوان الأربعة، التي شغلت باله عندما كان يلوّن خريطة أقاليم انكلترا ومقاطعاتها. لكن فردريك لم يتمكّن من حل المسألة. ولذا توجّه بالسؤال إلى أستاذ شهير فلم يتمكن من حلها. ومن ثم ذاع صيت المسألة واهتم بها الرياضيون جميعا.

البرهان: كانت فكرة البرهان، منذ البداية، تتمحور حول ما يسمى في الرياضيات بـ " البرهان بالخلف" (الذي يعني الانطلاق من نفي صحة النتيجة التي نريد إثباتها والتوصل إلى تناقض، فيتم بذلك البرهان الرياضي على صحة النتيجة). ويضيق هنا المكان لاستعراض مختلف المراحل التي مرّ بها هذا البرهان خلال قرن وربع.

ونكتفي بالإشارة إلى أن الرياضيين آبل وهاكن هما اللذان أنهوه عام 1976، بعد أن قضوا في معالجته 4 سنوات. وتحقق الحلم الذي راودهما ... وراود غيرهما طيلة 124 سنة! ولم يكن ذلك ممكنا لولا تزايد قوة وقدرات الحواسيب في إجراء العمليات الحسابية المعقدة والمضنية. فمن المعلوم أن الخطوة الأخيرة في البرهان تطلبت استخدام ثلاثة من أقوى الحواسيب خلال 1200 ساعة.

الحاسوب يبرهن: وكان الاستخدام المكثف للحواسيب في هذا البرهان قد لقي صدى سلبيا لدى الكثير من الرياضيين. فهم لاحظوا بأنه عندما يتدخل الحاسوب في أحد البراهين يستحيل تقديم عرض لهذا البرهان مطابق للمقاييس التقليدية، وذلك حتى لو نشرت جميع حسابات الآلة وبرامجها. وفضلا عن ذلك، فكل حاسوب يحتوي على أخطاء خفيّة يصعب اكتشافها. كما يخضع كل حاسوب لأخطاء طارئة.

ومهما يكن من أمر فإن برهان نظرية الألوان الأربعة يعتبر الآن أمرا مقضيا. ولم يعد النقاش يدور حوله بالحدة التي عرفها في نهاية السبعينيات من القرن العشرين. وقد فتح نمط هذا البرهان بابا واسعا أمام الباحثين، وأثبت وجود وسيلة فعالة وقوية (الآلة) قادرة على توفير خدمات يصعب الاستغناء عنها ... ورغم ذلك كله، فمسألة الألوان الأربعة لا زالت تعتبر لدى البعض لغزا قائما إلى اليوم.





الإحصاء

تمهيد

1 ضع نقاط قسمك لامتحان مادة الرياضيات في الجدولين الآتيين (النقاط مقربة إلى الوحدة، **النقطة على** 20) :

الجدول الأول

النقاط	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	المجموع
التكرارات																					
التكرارات النسبية																					

الجدول الثاني

النقاط	4 > النقطة ≤ 0	8 > النقطة ≤ 4	12 > النقطة ≤ 8	16 > النقطة ≤ 12	20 ≥ النقطة ≤ 16	المجموع
التكرارات						
التكرارات النسبية						

2 أكمل ما يلي :

- المجتمع المدروس هو : ....
- الميزة المدروسة هي : ....
- أفراد المجتمع هم : ....
- تكرار النقطة 5 هو : ....
- التكرار النسبي للنقطة 9 هو : ....
- 8 > النقطة ≤ 4 تسمى .... النقاط الأكبر من أو تساوي 4 و الأصغر تمامًا من 8.
- تكرار الفئة : 20 ≥ النقطة ≤ 16 هو : ....
- التكرار النسبي للفئة : 12 > النقطة ≤ 8 هو : ....
- التكرار الكلي هو : ....
- التكرار النسبي الكلي هو : ....

3 احسب متوسط نقاط امتحان الرياضيات في الحالتين.

4 مثل بيانيا معطيات الجدولين وذلك باختيار التمثيلات المناسبة.

1 السلاسل الاحصائية

التكرارات المجمّعة، التكرارات النسبية المجمعة :

1 أ) توزيع أطوال قامات تلاميذ السنة الرابعة متوسط 1 معطى في التمثيل بالمستطيلات التالي :



1) أكمل الجدول الآتي حيث T هو طول القامة بالمتر (m).

طول القامة T (m)	$T < 1,45$	$1,45 \leq T < 1,55$	$1,55 \leq T < 1,65$	$1,65 \leq T < 1,75$
التكرارات	3	......	......	......
التكرارات النسبية	0,12			

2) ما هو عدد التلاميذ الذين لا تفوق أطوال قاماتهم : 1,45 m ، 1,55 m ، 1,65 m ، 1,75 m ؟

▪ نسمي هذه الأعداد : التكرارات المجمعة المتزايدة.

3) أكمل جدول التكرارات المجمعة المتزايدة :

طول القامة T (m)	$T < 1,45$	$T < 1,55$	$T < 1,65$	$T < 1,75$
التكرارات المجمعة المتزايدة	3	......	......	......

4) ما هي نسبة التلاميذ الذين لا تفوق أطوال قاماتهم : 1,45 m ، 1,55 m ، 1,65 m ، 1,75 m ؟

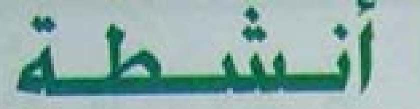
تسمى هذه النسب : التكرارات النسبية المجمّعة المتزايدة.

5) أكمل جدول التكرارات النسبية المجمعة المتزايدة :

طول القامة T (m)	$T < 1,45$	$T < 1,55$	$T < 1,65$	$T < 1,75$
التكرارات النسبية المجمعة المتزايدة	0,12	$0,12 + 0,24 = 0,36$	....	....

أعط كيفيتين لحساب التكرار النسبي المجمع المتزايد.





6) ما هو عدد التلاميذ الذين تفوق أطوال قاماتهم : 1,35 m ، 1,45 m ، 1,55 m ، 1,65 m ؟

تسمى هذه الأعداد : التكرارات المجمّعة المتناقصة.

7) أكمل جدول التكرارات المجمعة المتناقصة :

طول القامة T (m)	T ≥ 1,35	T ≥ 1,45	T ≥ 1,55	T ≥ 1,65
التكرارات المجمعة المتناقصة	25	..22..	..16..	05..

8) ما هي نسبة التلاميذ الذين تفوق أطوال قاماتهم : 1,35 m ، 1,45 m ، 1,55 m ، 1,65 m ؟

1 0,88 0,64 0,2

تسمى هذه النسب : التكرارات النسبية المجمّعة المتناقصة.

9) أكمل جدول التكرارات النسبية المجمعة المتناقصة :

طول القامة T (m)	T ≥ 1,35	T ≥ 1,45	T ≥ 1,55	T ≥ 1,65
التكرارات النسبية المجمعة المتناقصة	1	0,88	0,64	0,2

ب) 1) لدينا المعلومات التالية عن قسم السنة الرابعة متوسط 2 والذي عدد تلاميذه 28 :

طول القامة T (m)	T < 1,45	T < 1,55	T < 1,65	T < 1,75
التكرارات المجمعة المتزايدة	4	11	21	28

أكمل الجدول التالي للتكرارات :

طول القامة T (m)	T < 1,45	1,45 ≤ T < 1,55	1,55 ≤ T < 1,65	1,65 ≤ T < 1,75
التكرارات	4	11-04=07	21-11=10	28-21=7

2) لدينا المعلومات التالية عن قسم السنة الرابعة 3 والذي عدد تلاميذه 30 :

طول القامة T (m)	T < 1,45	T < 1,55	T < 1,65	T < 1,75
التكرارات النسبية المجمعة المتزايدة	0,2	0,5	0,9	1

أكمل الجدول الآتي :

طول القامة T (m)	T < 1,45	1,45 ≤ T < 1,55	1,55 ≤ T < 1,65	1,65 ≤ T < 1,75
التكرارات النسبية	0,2	0,3	0,4	0,1
التكرارات	6	...9..	...12	...3.



2 مؤشرات الموقع

أ) الوسط الحسابي

1 تحرّى أستاذ الرياضيات عن عدد أفراد أسر تلاميذ قسم السنة الرابعة متوسط 1 والمكون من 28 تلميذا، فكانت النتيجة كالتالي :

عدد أفراد الأسرة	2	3	4	5	6
عدد التلاميذ	2	5	10	9	2

1) ما هو معدل أفراد أسر تلاميذ القسم 1 ؟ ما هي الطريقة المتبعة لحسابك ؟

أكمل : $\frac{2 \times 2 + 3 \times . + . \times . + . \times . + . \times .}{. + . + . + . + .}$ = المعدّل

هذا المعدل يسمى الوسط الحسابي المتوازن لعدد أفراد أسر التلاميذ.

2) أعد حساب معدل أسر التلاميذ دون الأخذ بعين الاعتبار عدد التلاميذ الموافق لكل أسرة ؟

أكمل : $\frac{2 + 3 + . + . + . + .}{5}$ = المعدّل

هذا المعدّل يسمى : الوسط الحسابي لعدد أفراد أسر التلاميذ.

3) قارن بين الوسط الحسابي والوسط الحسابي المتوازن.

2 قام هذا الأستاذ بالتحري على نفس الميزة في قسم الرابعة متوسط 2 والمكون من 28 تلميذا، فوجد أنّ :

عدد أفراد أسر تلاميذ القسم 2	6	5	4	3	2
عدد التلاميذ	0	15	5	6	2

1) احسب الوسط الحسابي المتوازن لعدد أفراد أسر تلاميذ القسم 2 ثم قارنه بالوسط الحسابي المتوازن للقسم 1(نشاط 1).

2) في أي القسمين يوجد عدد أكبر من التلاميذ الذين يقل عدد أسرهم عن 4 أفراد ؟

3) في أي القسمين يوجد التلاميذ الذين لديهم الأسر الأكثر تعداداً ؟

ماذا تستنتج ؟



3 كان توزيع أثمان المنتوجات المعروضة في محل تجاري لبيع الأحذية كالتالي :

فئات الأثمان (DA)	500 ≥ الثمن > 1000	1000 ≥ الثمن > 1500	1500 ≥ الثمن > 2000	2000 ≥ الثمن > 2500	المجموع
التكرارات	118	135	95	82	
مراكز الفئات	$\frac{1000+500}{2} = 750$	....	....	....	
الجداءات	118 x 750 = ...	....	....	....	

1) أكمل الجدول.

2) أكمل ما يلي : ...... = $\frac{\text{مجموع الجداءات}}{\text{مجموع التكرارات}}$ ≈ الوسط الحسابي المتوازن للأثمان.

ب) الوسيط

1 إليك الجدول التالي الموضح لنتائج امتحان الرياضيات لأحد أقسام السنة الرابعة متوسط (النقطة مقربة إلى الوحدة، النقطة على 20) والمكون من 29 تلميذا.

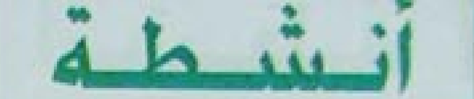
النقاط	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	المجموع
التكرارات	0	1	1	1	2	3	2	3	2	2	1	2	0	3	1	1	2	1	1	2	
التكرارات المجمعة النسبية المتزايدة																					

1) املء الجدول.

2) أكمل ما يلي : نصف القسم تحصل على نقطة تفوق ....

نسمي هذه النقطة : النقطة الوسيطية لنقاط القسم.





أنشطة

2 صحّح أستاذ الرياضيات 8 أوراق اختبار. النتائج موضحة في الجدول الآتي :

النقاط	5	7	8	10	11	المجموع
التكرارات	2	2	1	1	2	
التكرارات المجمعة المتزايدة						

1) املء الجدول.

2) أكمل ما يلي : نصف ما صحّح الأستاذ من أوراق تفوق نقاطها ...

هذه النقطة هي النقطة الوسيطية للأوراق المصححة.

3 أعمار عمّال إحدى الشركات موضحة في الجدول التالي :

الأعمار (سنة)	20 ≤ العمر < 30	30 ≤ العمر < 40	40 ≤ العمر < 50	50 ≤ العمر < 60	المجموع
التكرارت	97	64	45	37	243

1) أعط جدول التكرارات المجمعة المتزايدة ثم مثلها بإستعمال المدرج التكراري.

2) باستعمال التمثيل البياني، اوجد الفئة التي تنتمي إليها القيمة الوسيطية لأعمار عمّال هذه الشركة، مع تبريرك للطريقة المتبعة لذلك ؟

ج) مقارنة سلسلتين احصائيتين

لتاجر، متجرين لبيع المواد الغذائية بالجملة، أراد أن يقارن بين كميات مبيعات مادة الدقيق فيهما، وذلك في مدة قدرها 15 يومًا، فتحصل على المعطيات التالية :

المتجر 1

الأيام	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
كمية الدقيق المباعة ($\times 10^2$kg)	110	95	90	70	90	65	60	120	135	180	165	160	150	140	150

المتجر 2

الأيام	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
كمية الدقيق المباعة ($\times 10^2$kg)	95	145	95	150	135	150	160	95	150	145	95	90	95	90	90

1) احسب الوسط الحسابي للمبيعات لكل متجر ؟

2) أعط الوسيطين لمبيعات المتجرين.

3) نسمي مدى سلسلة احصائية، الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لها.

أعط قيمة المدى لكل من مبيعات المتجر الأول والمتجر الثاني.

4) مثل كلاً من هذه المعطيات باستعمال التمثيل بالأعمدة.

5) اعتمادا على الأسئلة السابقة، ما هو المتجر الأكثر انتظاما من حيث المبيعات ؟



3 استعمال المجدول لحساب مؤشرات الموقع ولتمثيل سلسلة احصائية

1 الجزء الأول: يعطى الجدول الممثل لسنة ميلاد تلاميذ القسم :

السنة	1990	1991	1992	1993
التكرار	2	10	16	2

1) استعمل مخططا بالأعمدة لتمثيل السلسلة الاحصائية المعطاة.

تسمى السنة الموافقة لأكبر تكرار منوال السلسلة. عيّنه في هذه الحالة.

2) احجز المعطيات السابقة في مجدول، ثم أعط تمثيل السلسلة الاحصائية بمخطّط بالأعمدة. حوّل هذا التمثيل إلى تمثيل دائري.

3) ابرز في ورقة الحساب خلية للتواترات ثم أضف ما يلزم لحساب هذه التواترات.

4) أضف ما يلزم لحساب التكرارات المجمعة المتزايدة. مثّل على نفس البيان، التكرارات والتكرارات المجمعة المتزايدة. ماذا يمثل المستطيل الممثل للسنة 1992 في كل من التمثيلين البيانيين ؟

5) غيّر الجدول بحيث يكون المنوال 1991 مع الاحتفاظ بنفس التكرار الكلي، لاحظ التمثيلات الموافقة.

6) إذا علمت بوجود تلميذ واحد على الأقل مولود في سنة ممثلة في الجدول، ما هو أصغر تكرار ممكن للقيمة المنوالية ؟ ما هو الأكبر ؟

الجزء الثاني : يعطي الجدول الآتي العلامات التي تحصل عليها قسم السنة الرابعة 1 في فرض لمادة الرياضيات.

العلامة	التكرار	العلامة	التكرار	العلامة	التكرار
0	0	7	1	14	2
1	1	8	0	15	0
2	1	9	1	16	1
3	1	10	2	17	0
4	1	11	4	18	0
5	2	12	5	19	0
6	2	13	2	20	0

1) احجز هذه المعطيات في ورقة حساب حيث ترتب العلامات تصاعديا ثم أضف عمودا لحساب التكرارات المجمعة.

2) احسب وسيط السلسلة الاحصائية.

3) احسب الوسط الحسابي للقسم.





1 التكرار المجمع المتزايد

في سلسلة احصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا، التكرار المجمع المتزايد لقيمة يحصل عليه بجمع تكرار هذه القيمة وتكرار القيم السابقة لها.

مثال : القيمة التقريبية لـ $\sqrt{2}$ هي : 1,414213562 .

- رتّب الأرقام المكونة للقيمة التقريبية لـ $\sqrt{2}$ ترتيبا تصاعديا.
- أعط تكرار كل رقم.
- ما هو عدد الأرقام الأصغر من أو تساوي الرقم 4 ؟
- ماذا يمثل عدد الأرقام الأصغر من أو تساوي العدد 6 ؟

الإجابة : نقوم بإعطاء الجدول الممثل للتكرارات والتكرارات المجمعة المتزايدة.

الأرقام	1	2	3	4	5	6
التكرارات	3 +	2 +	1 +	2	1	1
التكرارات المجمعة المتزايدة	3	5	6 +	= 8	9	10

هنالك 8 أرقام أصغر من أو تساوي 4

التكرار المجمّع المتزايد الموافق لعدد الأرقام الأصغر من أو تساوي 4 يُحصّل عليه بجمع تكرارات : العدد 4 والأعداد الأصغر من 4، أي تكرارات الأعداد : 1 ، 2 ، 3 . أما عدد الأرقام الأصغر من 6 فهو 10 . وهو العدد الكلي للأرقام.

2 التكرار المجمع المتناقص

في سلسلة احصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا، التكرار المجمع المتناقص لقيمة يُحصّل عليه بجمع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم الأكبر منها.

مثال : خذ معطيات المثال السابق. ما هو عدد الأرقام الأكبر من أو تساوي الرقم 4 ؟

الإجابة : نقوم بإعطاء الجدول الممثل للتكرارات والتكرارات المجمعة المتناقصة.

الأرقام	1	2	3	4	5	6
التكرارات	3	2	1	2 +	1 +	1
التكرارات المجمعة المتناقصة	10	7	5	= 4	+ 2	1

هنالك 4 أرقام أكبر من أو تساوي 4

التكرار المجمع المتناقص الموافق لعدد الأرقام الأكبر من أو يساوي 4، يُحصل عليه بجمع تكرارات : العدد 4 والأعداد الأكبر منه، أي تكرارات الأعداد 5 و 6.

3 التكرار النسبي المجمع المتزايد والمتناقص

التكرار النسبي المجمّع المتزايد هو التكرار المجمع المتزايد بالنسبة إلى التكرار الكلي،

أي : $\frac{\text{التكرار المجمّع المتزايد}}{\text{التكرار الكلي}}$ = التكرار النسبي المجمع المتزايد .

التكرار النسبي المجمّع المتناقص هو التكرار المجمّع المتناقص بالنسبة إلى التكرار الكلي،

أي : $\frac{\text{التكرار المجمّع المتناقص}}{\text{التكرار الكلي}}$ = التكرار النسبي المجمع المتناقص.

ملاحظة

نسمي كل تكرار نسبي تواترًا .

إذن : - التكرار النسبي المجمع المتزايد هو التواتر المجمع المتزايد .

- التكرار النسبي المجمع المتناقص هو التواتر المجمّع المتناقص.

مثال : إليك السلسلة الاحصائية التالية (أرقام القيمة المقربة لـ $\sqrt{3}$) : 8 ، 0 ، 8 ، 0 ، 5 ، 0 ، 2 ، 3 ، 7 ، 1.

● أعط تواتراتها المجمعة المتزايدة والمتناقصة.

الإجابة :

العدد	0	1	2	3	5	7	8	المجوع
التكرارات	3	1	1	1	1	1	2	10
التكرارات المجمعة المتزايدة	3	4	5	6	7	8	10	
التواترات المجمعة المتزايدة	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1	
التكرارات المجمعة المتناقصة	10	7	6	5	4	3	2	
التواترات المجمعة المتناقصة	1	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	

- التواتر المجمع المتزايد للقيمة 3 هو التكرار المجمّع المتزايد 6 لهذه القيمة مقسوم على التكرار الكلي 10 ، أي : $0{,}6 = \frac{6}{10}$.

- التواتر المجمع المتناقص المجمّع للقيمة 1 هو التكرار المجمّع المتناقص 7 لهذه القيمة مقسوم على التكرار الكلي 10، أي : $0{,}7 = \frac{7}{10}$.







4 الوسط الحسابي لسلسلة احصائية

الوسط الحسابي لسلسلة احصائية هو : مجموع قيم هذه السلسلة على عدد قيمها.

مثال : إليك السلسلة الاحصائية التالية : 2 ، 4 ، 0 ، 1 ، 3 ، 6 ، 5.

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو :

$\frac{22}{7} = \frac{5+6+3+1+0+4+2}{7}$ = الوسط الحسابي.

الوسط الحسابي المتوازن لسلسلة احصائية هو : مجموع جداءات قيمها بتكراراتها على مجموع المعاملات التكرارات.

مثال : لتكن السلسلة الاحصائية التالية:

4 ، 4 ، 4 ، 4 ، 3 ، 2 ، 2 ، 2 ، 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0.

$\frac{0 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 4 \times 4}{2+3+3+1+4}$ = الوسط الحسابي المتوازن

- الوسط الحسابي لسلسلة احصائية مجمعة في فئات هو : مجموع مراكز الفئات على عدد الفئات.
- الوسط الحسابي المتوازن لسلسلة احصائية مجمعة في فئات هو : مجموع جداءات مراكز كل فئة بتكرارها على مجموع التكرارات.

مثال : أثمان المنتجات المعروضة في محل تجاري موزعة كالتالي :

فئات الأثمان (DA)	500 ≤ الثمن < 1000	1000 ≤ الثمن < 1500	1500 ≤ الثمن < 2000	المجموع
التكرارات	63	84	109	256
مراكز الفئات	$\frac{500+1000}{2} = 750$	1250	1750	3750
الجداءات	63 x 750 = 47250	10500	19750	343000

≈ 1340 DA $\frac{343000}{256} \approx$ الوسط الحسابي المتوازن للأثمان

$= 1250$ DA $\frac{3750}{3} \approx$ الوسط الحسابي للأثمان

ملاحظة

إذا رمزنا للميزة المدروسة بالرمز X ، فإنّ الوسط الحسابي لهذه الميزة، يرمز له بالرّمز : $\overline{X}$.



5 الوسيط

وسيط سلسلة احصائية مرتبة هو القيمة التي تجعل عدد القيم الأصغر منها أو تساويها مساويا لعدد القيم الأكبر منها أو تساويها.

إذا كان عدد القيم فرديا، فإنّ الوسيط هو القيمة المركزية لهذه القيم.

مثال : عدد قيم السلسلة الاحصائية هو 7 :

2 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 3,5 ؛ 3,5 ؛ 4 ؛ 4

3 قيم — 3,5 هي القيمة الوسيطية — 3 قيم

مثال : عدد قيم السلسلة الاحصائية هو 8:

1 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 5 .

4 قيم — 4 قيم

القيم الوسيطية، هي القيم المحصورة بين 3 و4.

نأخذ، عامة، مركز القيمتين، أي : $\frac{3+4}{2} = 3,5$ كوسيط لهذه القيم.

في حالة سلسلة مجمعة في فئات : نبحث عن الفئة التي تنتمي إليها القيمة الوسيطية.

مثال : رَتَّبَ مَكْتَبِيٌّ 21 كتابا وفق عدد الصفحات لكل كتاب، تحصل على الجدول التالي : (نرمز لعدد الصفحات بالرمز x)

عدد الصفحات	$100 \le x < 200$	$200 \le x < 300$	$300 \le x < 400$	المجموع
التكرارات	9	8	4	21
التكرارات المجمعة المتزايدة	9	17	21	

القيمة الوسيطة هي : القيمة الموافقة للكتاب الحادي عشر والذي ينتمي إلى الفئة : $200 \le x < 300$، وهي الفئة الوسيطية.



6 المدى

مدى سلسلة احصائية هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لها.

مثال : مدى السلسلة الاحصائية : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8

هو : 7 = 1- 8.



التكرارات المجمعة المتزايدة، والتكرارات المجمعة المتناقصة

تحصل سبعة تلاميذ على النقاط التالية (النقطة على 20) :

3 ، 3 ، 19 ، 5 ، 17 ، 12 ، 7.

1) ما هو عدد التلاميذ الذين تحصّلوا على نقاط تفوق النقطة 10؟

2) ما هو عدد التلاميذ الذين تحصّلوا على نقاط تقل عن النقطة 10؟

3) ما هي نسبة التلاميذ الذين تحصّلوا على نقاط تفوق النقطة 5؟

4) ما هي نسبة التلاميذ الذين تحصّلوا على نقاط تقل تمامًا عن النقطة 17؟

الإجابة

1) عدد التلاميذ الذين تحصّلوا على نقاط تفوق النقطة 10 هو : مجموع تكرارات الأعداد : 12 ، 17 و 19. إذن هنالك 3 تلاميذ تحصلوا على نقاط تفوق النقطة 10 .

2) عدد التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تقل عن النقطة 10 هو : مجموع تكرارات الأعداد : 7 ، 5 و 3 . إذن هنالك 4 تلاميذ تحصّلوا على نقاط تقل عن النقطة 10.

- كما يمكن استعمال جدول التكرارات للإجابة عن السؤالين :

النقاط	3	5	7	12	17	19
التكرارات	2	1	1	1	1	1
التكرارات المجمعة المتزايدة	2	3	4	5	6	7
التكرارات المجمعة المتناقصة	7	5	4	3	2	1

3) لحساب النسبة، نحسب التكرار المجمع للقيم الأكبر من 5، ثم نقسمه على التكرار الكلي، ومن الجدول السابق فإن التكرار المجمع للقيم الأكبر من 5 يساوي : 4، إذن : نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تفوق النقطة 5 هي : $\frac{4}{7}$.

4) يتبيّن من الجدول السابق، أن نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على نقطة تقل تماما عن النقطة 17 هي : $\frac{5}{7}$.

حساب المتوسط الحسابي

تمرين

تحصّل عمر على النقاط التالية (النقطة على 20) : 10 ، 15 ، 13 ، 2 ، 6.

1) احسب معدّله.

2) إذا علمت أنّ معاملات كل نقطة، على الترتيب هي : 3 ، 2 ، 1 ، 4 ، 4، فما هو معدله ؟



الإجابة

1) المعدّل هو الوسط الحسابي لهذه النقاط.

- نجمع هذه النقاط : $46 = 10 + 15 + 13 + 2 + 6$.
- عدد النقاط : 5.
- نقسم مجموع النقاط على عددها : $9{,}2 = \frac{46}{5}$. معدل نقاط عمر هو : 9,2.

2) في هذه الحالة، معدّل عمر هو الوسط الحسابي المتوازن لنقاطه.

- نحسب جداء كل نقطة بمعاملها.
- نجمع هذه الجداءات.
- نقسم هذا المجموع على مجموع المعاملات.

نحصل على :

المعدّل هو : $7{,}5 = \frac{6 \times 4 + 2 \times 4 + 13 \times 1 + 15 \times 2 + 10 \times 3}{4 + 4 + 1 + 3 + 2}$ معدل عمر هو : 7,5

تمرين أخذ بائع للأحذية 20 زوج حذاء، فكانت مقاسات الأحذية كالتالي :

مقاسات الأحذية	28 ≤ المقاس < 32	32 ≤ المقاس < 36	36 ≤ المقاس < 40	40 ≤ المقاس < 44
التكرارات	02	03	06	06

- احسب الوسط الحسابي المتوازن لمقاسات الأحذية.

الإجابة

حساب الوسط الحسابي المتوازن في حالة المعطيات المجمعة في فئات يكون كالتالي :

- حساب مراكز الفئات.
- حساب جداء مركز كل فئة بتكرارها.
- نجمع هذه الجداءات.
- نقسم مجموع الجداءات على مجموع التكرارات.

هذه الطريقة، ملخصة في الجدول الموالي :

مقاسات الأحذية	28 ≤ المقاس < 32	32 ≤ المقاس < 36	36 ≤ المقاس < 40	40 ≤ المقاس < 44	المجموع
التكرارات	02	03	06	09	20
مراكز الفئات	$\frac{28+32}{2} = 30$	$\frac{32+36}{2} = 34$	$\frac{36+40}{2} = 38$	$\frac{40+44}{2} = 42$	
الجداء	$2 \times 30 = 60$	$3 \times 34 = 102$	$6 \times 38 = 228$	$9 \times 42 = 378$	768

$38{,}4 = \frac{768}{20} \approx$ معدل المقاسات



الوسيط

تمرين

عدد الغيابات المسجلة خلال 7 أيّام لعمّال شركة كان كالتالي :

.3 ، 2 ، 4 ، 0 ، 2 ، 1 ، 3

- ما هي القيمة الوسيطية لعدد غيابات هذه الشركة خلال هذه المدة ؟ (عدد القيم فرديا).

الإجابة نرتب عدد الغيابات.

.0 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4

3 قيم   3 قيم

القيمة الوسيطية

إذن القيمة الوسيطية هي : 2 غيابات.

تمرين

لتكن السلسلة الاحصائية المرتبة التالية :

.10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10,5 ؛ 11 ؛ 12 ؛ 12

اوجد وسيط هذه السلسلة الاحصائية. (عدد القيم زوجيا).

الإجابة لدينا : .0 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10,5 ؛ 11 ؛ 12 ؛ 12

4 قيم   4 قيم

إذن القيم الوسيطية هي الأعداد المحصورة بين العددين 10 و 10,5.

في الحالة العامة، نأخذ كوسيط، مركز هذين العددين أي : $\frac{10,5 + 10}{2}$ الوسيط هو : 10,25.

تمرين

أوزان 15 شخصا موضحة في الجدول التالي :

الأوزان (kg)	60 ≤ الوزن < 65	65 ≤ الوزن < 70	70 ≤ الوزن < 75	75 ≤ الوزن < 80
التكرارات	6	4	3	2
التكرارات المجمعة المتزايدة	6	10	13	15



طرائق وتمارين محلولة

1) أكمل الجدول. 2) إلى أي فئة تنتمي القيمة الوسيطية للأوزان ؟(القيم مجمعة في فئات).

الإجابة

1)

الأوزان (kg)	80 > الوزن ≥ 75	75 > الوزن ≥ 70	70 > الوزن ≥ 65	65 > الوزن ≥ 60
التكرارات	2	3	4	6
التكرارات المجمعة المتزايدة	15	13	10	6

2) عدد الأشخاص 15، إذن الوزن الوسيط هو وزن الشخص الثامن، ومنه الفئة التي تنتمي إليها القيمة الوسيطية هي : 70 > الوزن ≥ 65.

استعمال المجدول

تمرين

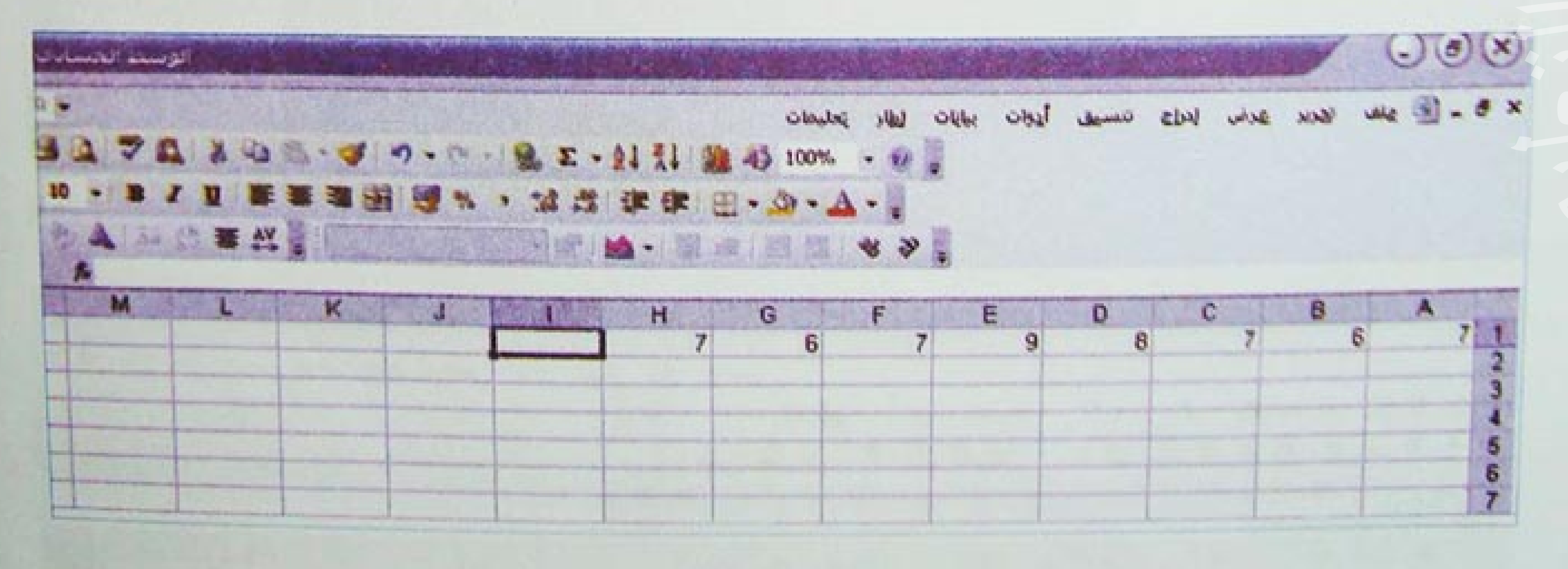
باستعمال المجدول، احسب الوسط الحسابي للسلسلة الاحصائية التالية :
7 ، 6 ، 7 ، 9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 7 .

الإجابة

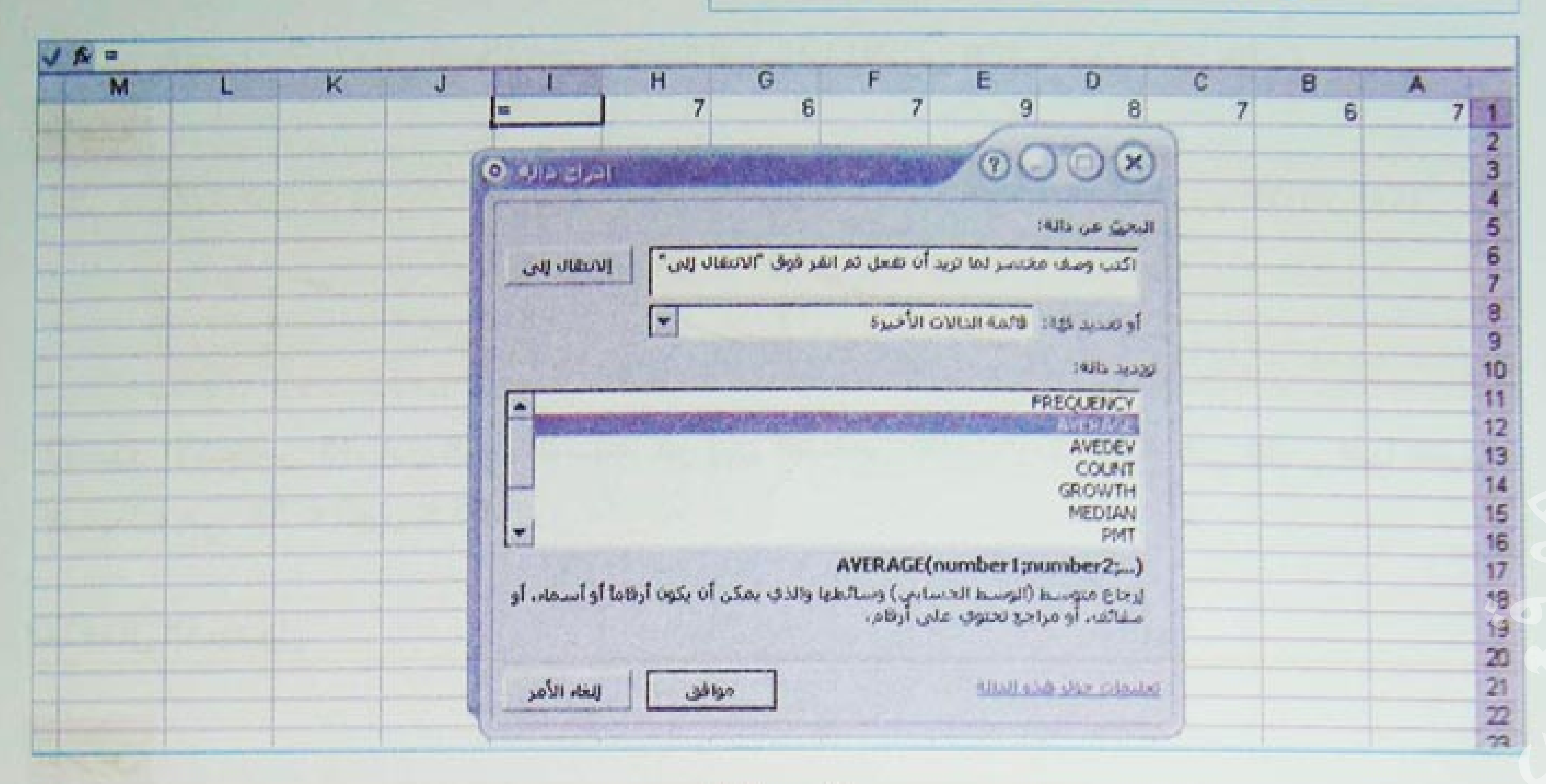
أولا : ادخل المعطيات.

ثانيا : استعمل الوظيفة المناسبة بعد تحديد كل قيم السلسلة الاحصائية.

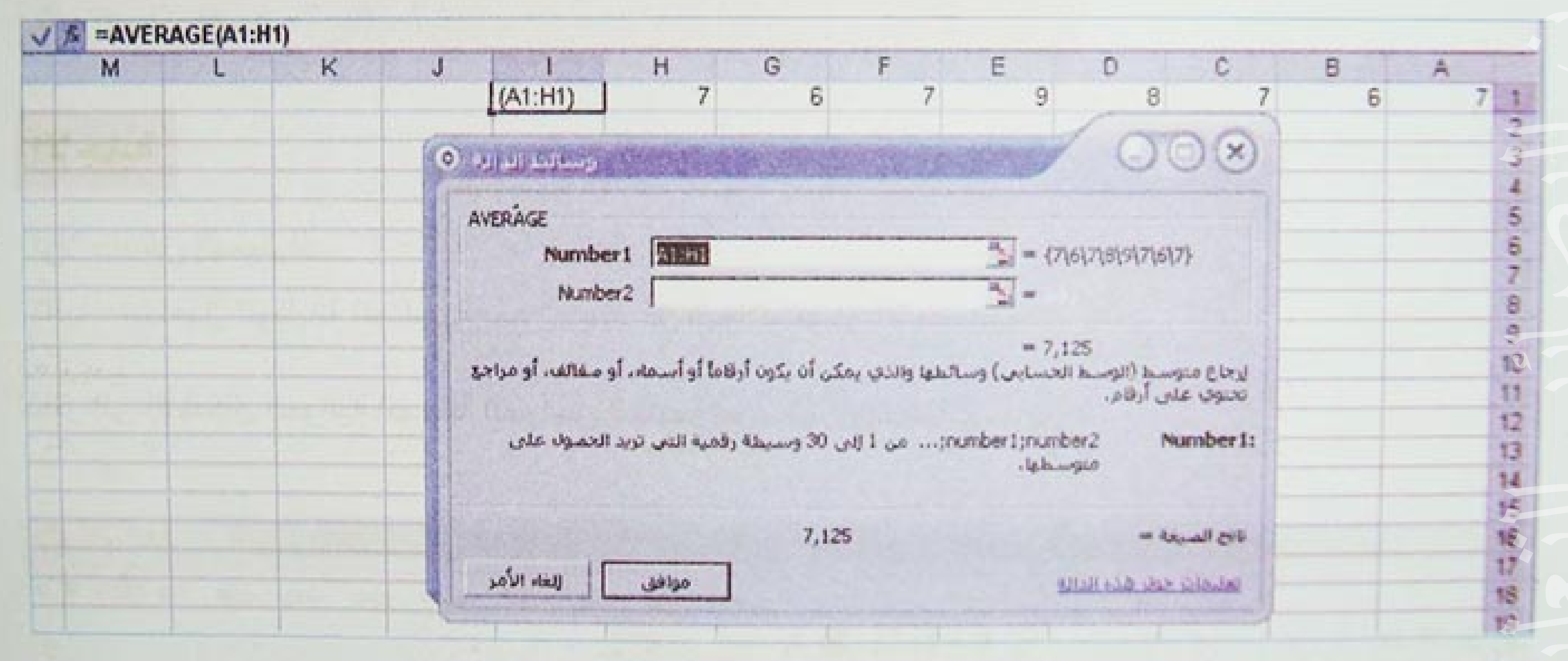
انظر إلى الأشكال الموالية الممثلة للمراحل المتبعة لحساب الوسط الحسابي :



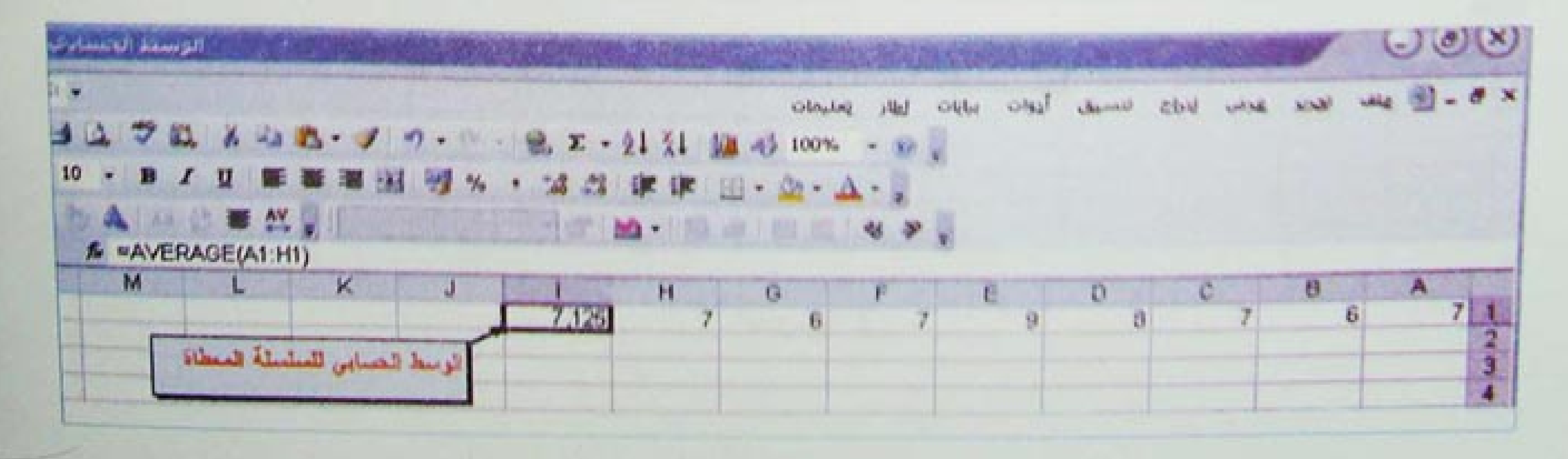
المرحلة 1



المرحلة 2



المرحلة 3



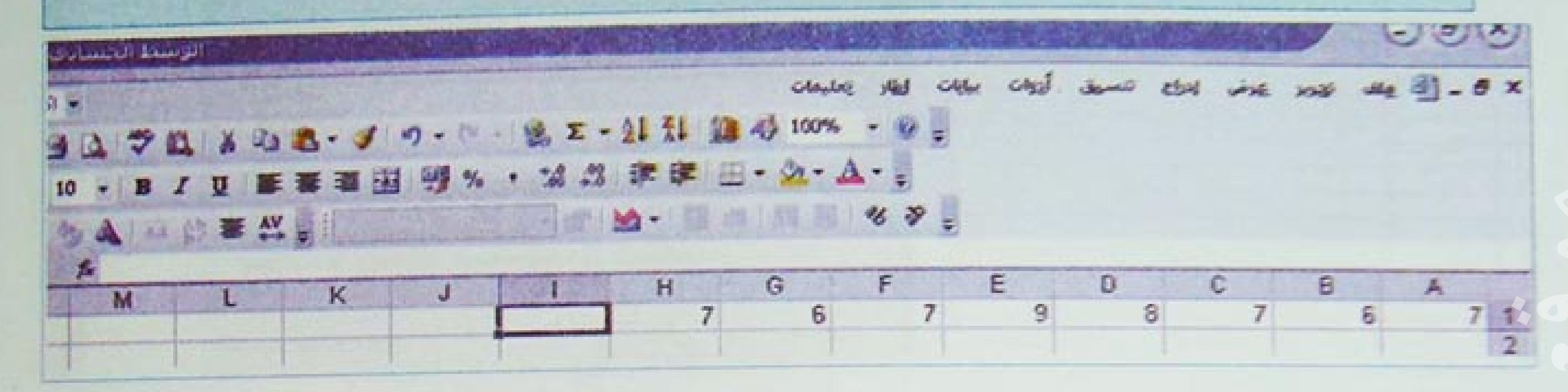
النتيجة



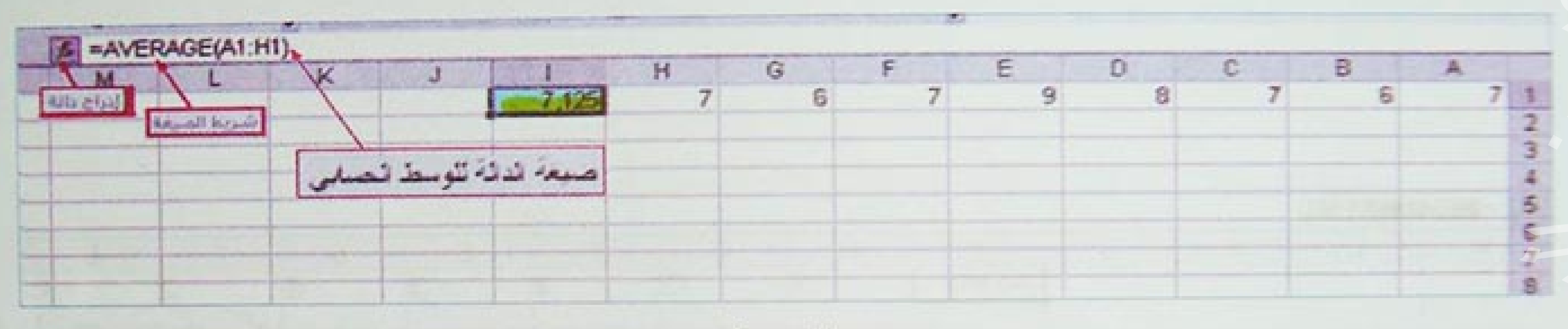
طرائق وتمارين محلولة

ملاحظة

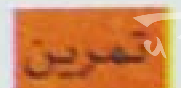
يمكن إختصار هذه المراحل، وذلك بكتابة الدالة AVERAGE (A1 : H1) =
مباشرة في الشريط المخصص لصيغة الدالة.
انظر الشكلين الموضحين لذلك.



المرحلة 1



النتيجة



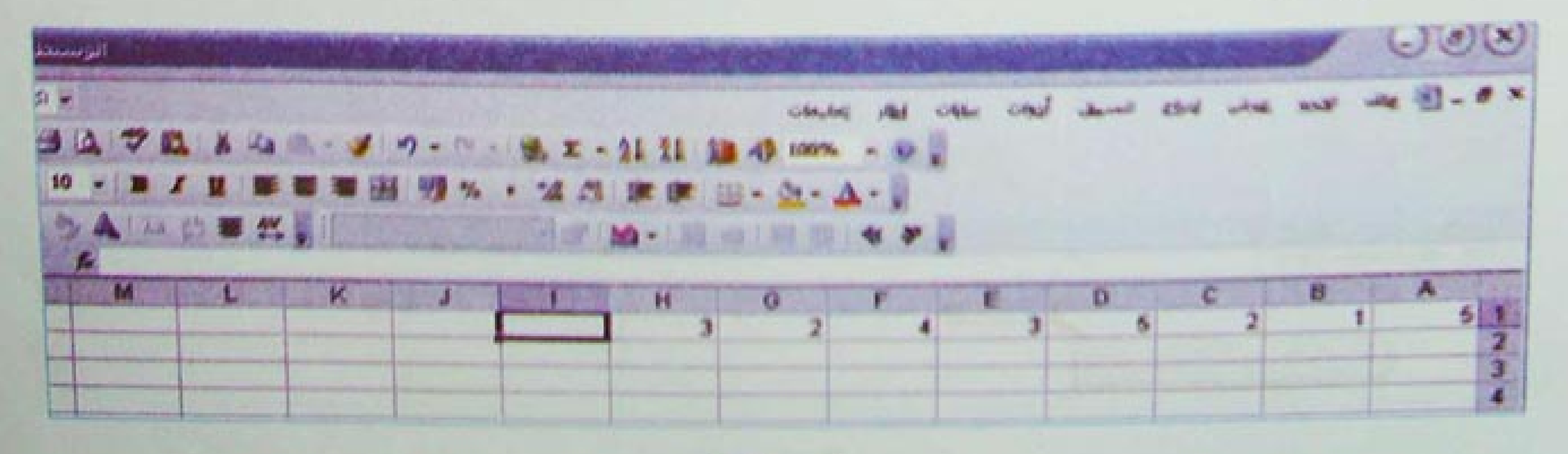
تمرين

أعط وسيط السلسلة الاحصائية التالية وذلك باستعمال المجدول : 3 ، 2 ، 4 ، 3 ، 5 ، 2 ، 1 ، 5.

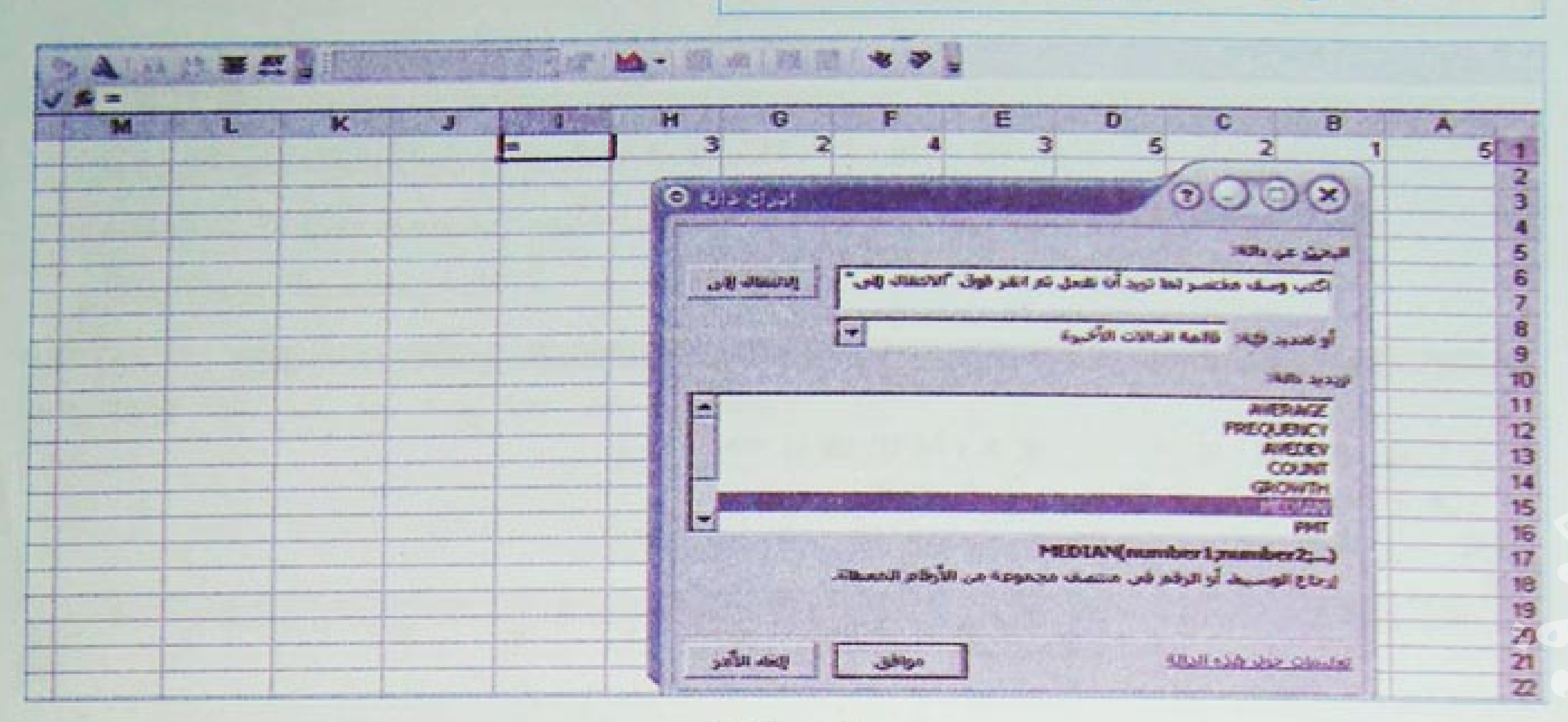
الإجابة

أولا : إدخال المعطيات. **ثانيا** : استعمال وظيفة الوسيط.

انظر الأشكال الموالية :



المرحلة 1



المرحلة 2

=MEDIAN(A1:H1)

B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	5	3	4	2	3	(A1:H1)

وسائط الدالة

MEDIAN

Number1 = {5;1;2;5;3;4;2;3}

Number2 =

= 3

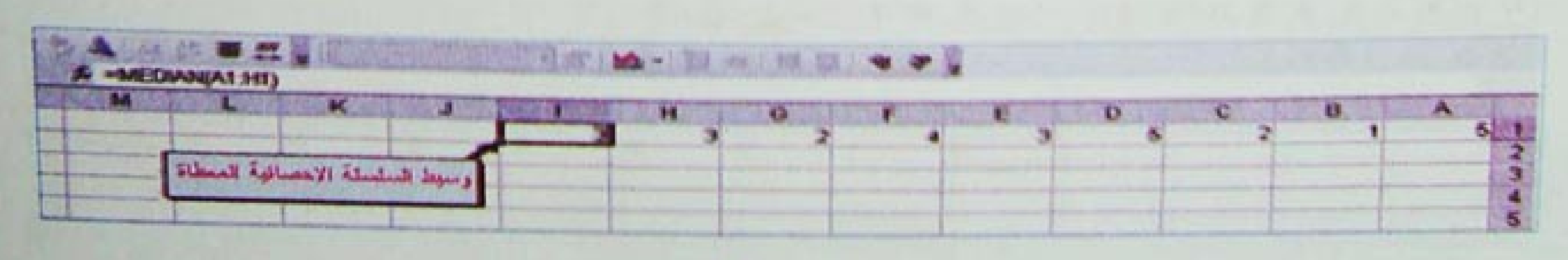
إرجاع الوسيط أو الرقم في منتصف مجموعة من الأرقام المعطاة.

Number1: number1;number2;... من 1 إلى 30 رقما أو أسماء أو صفائف، أو مراجع تحتوي على الأرقام التي تريد الوسيط لها.

ناتج الصيغة = 3

موافق | إلغاء الأمر | تعليمات حول هذه الدالة

المرحلة 3



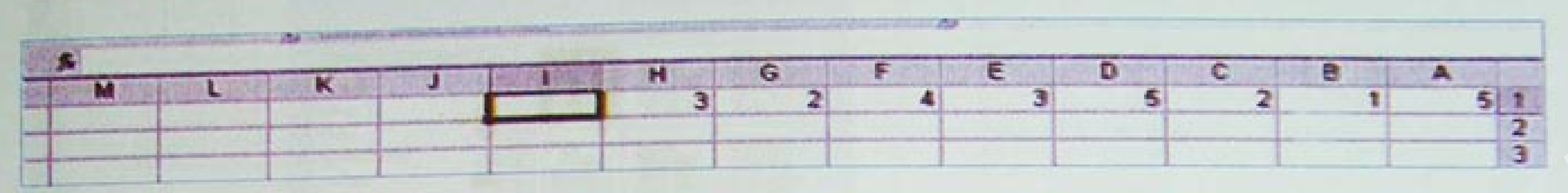
المرحلة 3



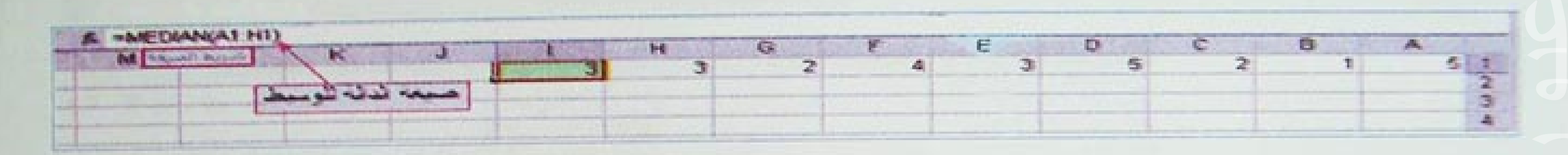
طرائق وتمارين محلولة

ملاحظة

يمكن إختصار هذه المراحل، وذلك بكتابة الدالة MEDIAN (A1 : H1) =
مباشرة في الشريط المخصص لصيغة الدالة.
انظر الشكلين الموضحين لذلك.



المرحلة 1



النتيجة

تمرين

مثّل السلسلة التالية، باستعمال المجدول : 2 ، 2 ، 6 ، 5 ، 4 ، 2 ، 3 ، 2 ، 1.

الإجابة

أولا : نقوم بادخال معطيات السلسلة الاحصائية. **ثانيا** : نحدّد كل القيم.
ثالثا : نختار وظيفة التمثيلات. **رابعا** : نحدّد التمثيل المناسب.

انظر الأشكال الآتية وتتبعها .



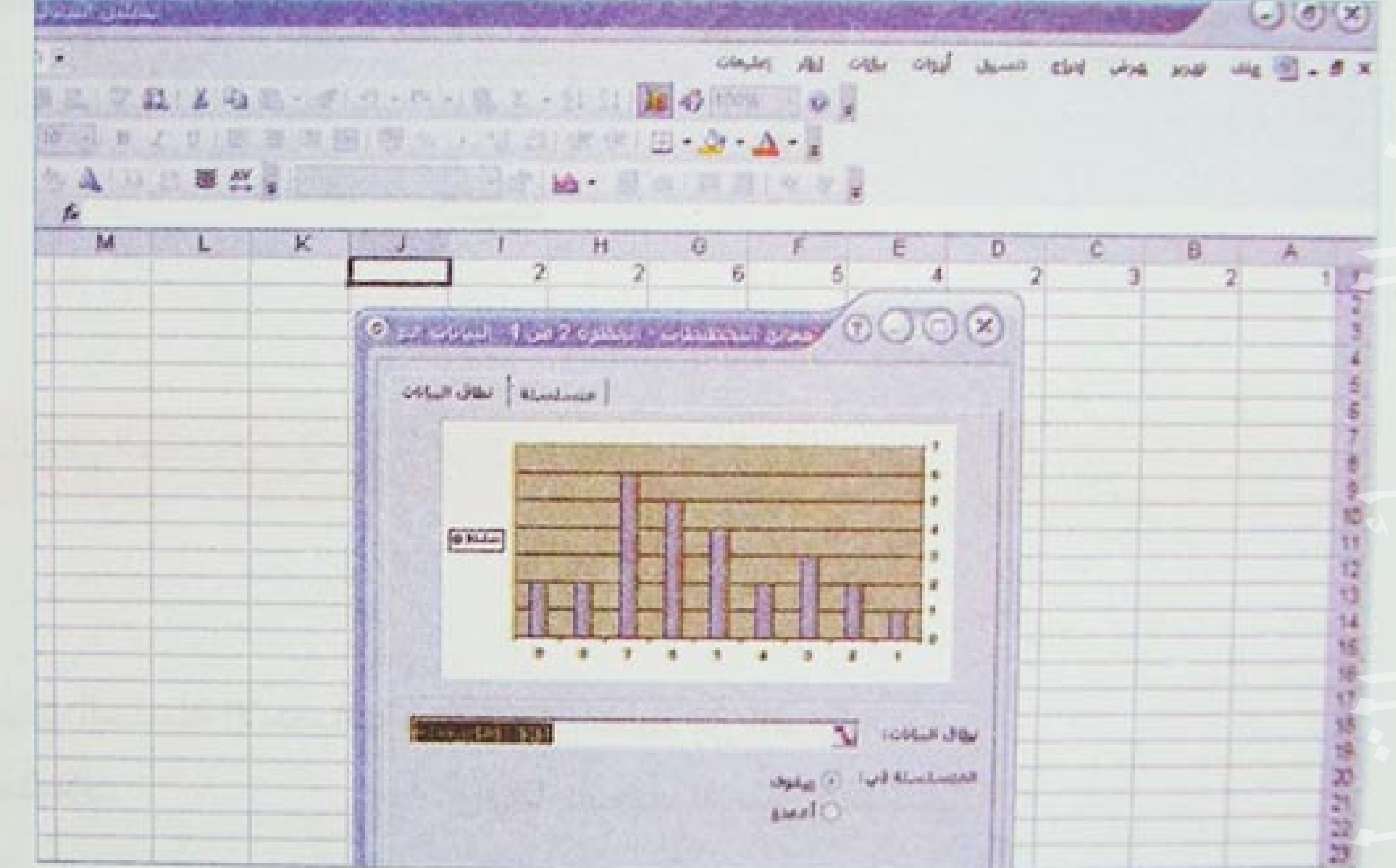
المرحلة 1



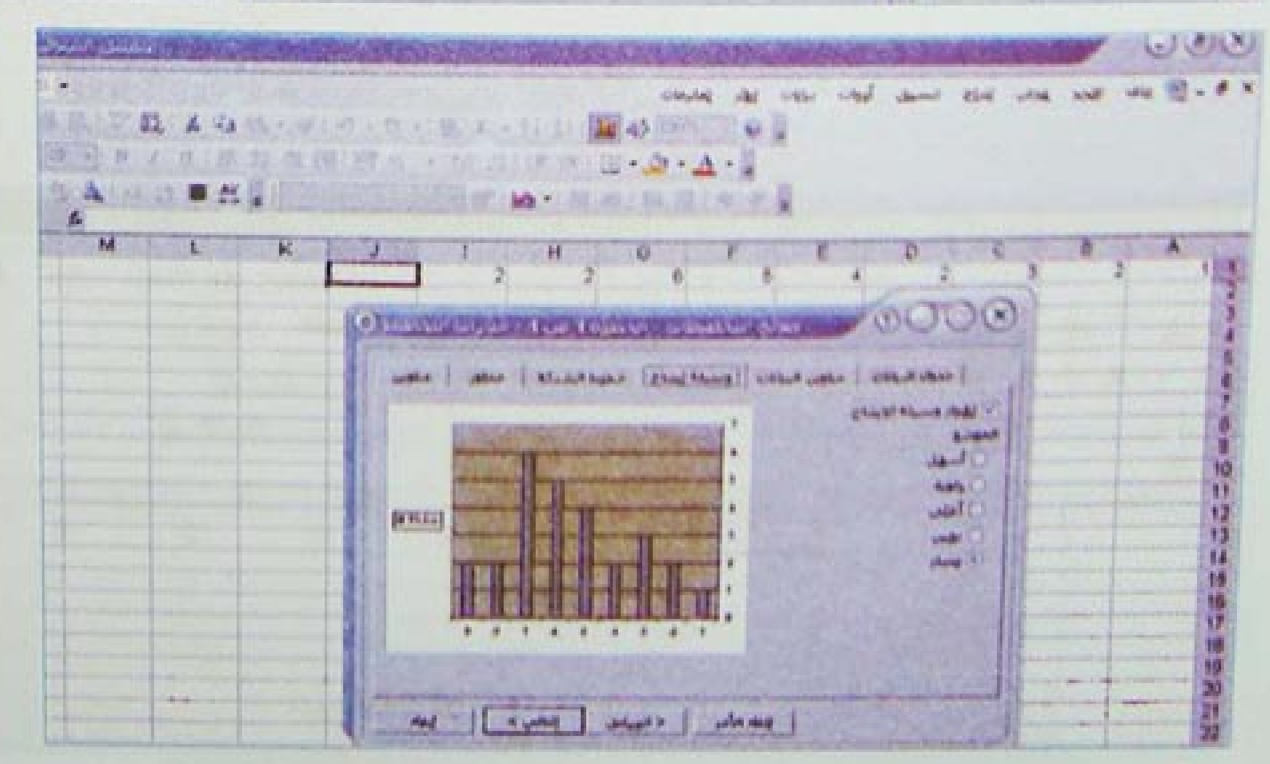
المرحلة 2



المرحلة 3



المرحلة 4





ملف تحرير عرض إدراج تنسيق أدوات بيانات إطار تعليمات

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	3	2	4	5	6	2	2

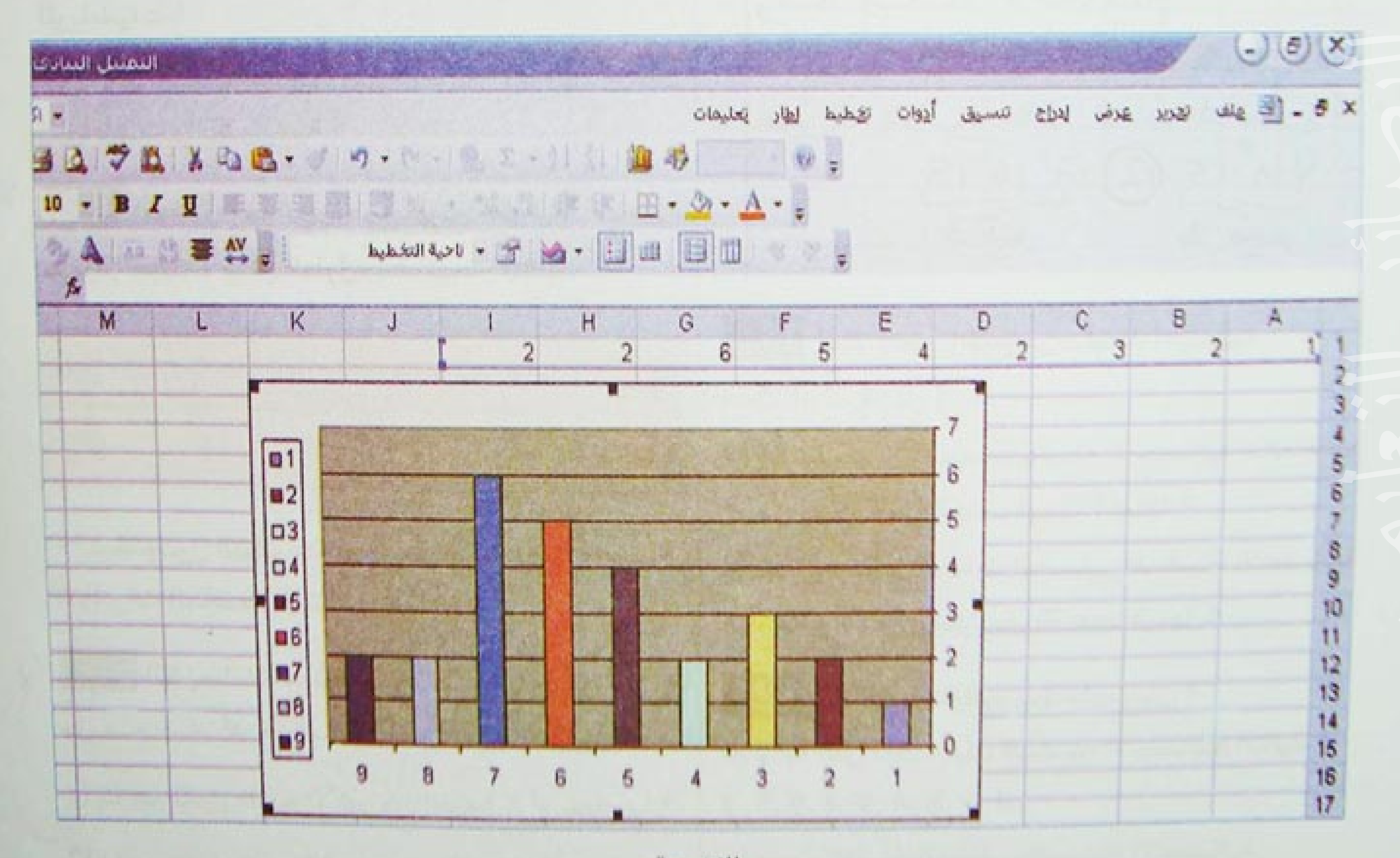
وضع التخطيط:

كورقة جديدة: تخطيط1

ككائن في:

إلغاء الأمر | < السابق | إنهاء

المرحلة 5



النتيجة

تمارين التطبيق المباشر

1 إليك السلسلة الإحصائية التالية :
6، 6، 5، 5، 5، 5، 4، 4، 3، 3، 3، 2، 2، 1، 1، 1، 1.
- أعط جدول التكرارات للسلسلة الاحصائية.
- أعط جدول التكرارات المجمعة.

2 إليك السلسلة الإحصائية التالية :
1، 10، 9، 8، 7، 6، 6، 5، 2، 4، 2، 3، 2، 1.
- ما هو تكرار القيم الأكبر تماما من القيمة 6 ؟
- ما هو تكرار القيم الأصغر من 5 أو تساويها ؟

3 اشترى جمال كرّاسا، خصّص منه : 90 صفحة لتمارين الرياضيات، 56 صفحة لتمارين التكنولوجية و46 صفحة لتمارين العلوم.
1) ما هو عدد صفحات الكراس ؟
2) ما هو التكرار النسبي للصفحات المخصصة لتمارين الرياضيات ؟
3) ما هو التكرار النسبي للصفحات المخصصة لمادتي الرياضيات والتكنولوجية ؟

4 الجدول الموالي يوضح توزيع أطوال30 شجيرة صنوبر حيث T يمثل الطول بالسنتيمتر (cm).

فئة الطول (cm)	$35 \leq T < 40$	$40 \leq T < 43$	$43 \leq T < 50$	$50 \leq T < 55$	$55 \leq T < 60$
التكرارات	6	7	9	5	3

- أعط جدول التواترات المجمعة المتزايدة وكذا جدول التواترات المجمعة المتناقصة.

5 لتكن سلسلة مرتبة ترتيبا تصاعديا ولتكن x قيمة من هذه السلسلة. ما المطلوب من هذين السؤالين ؟
1) ما هو تكرار القيم الأكبر من القيمة x أو تساويها ؟
2) ما هو تكرار القيم الأصغر من القيمة x أو تساويها ؟

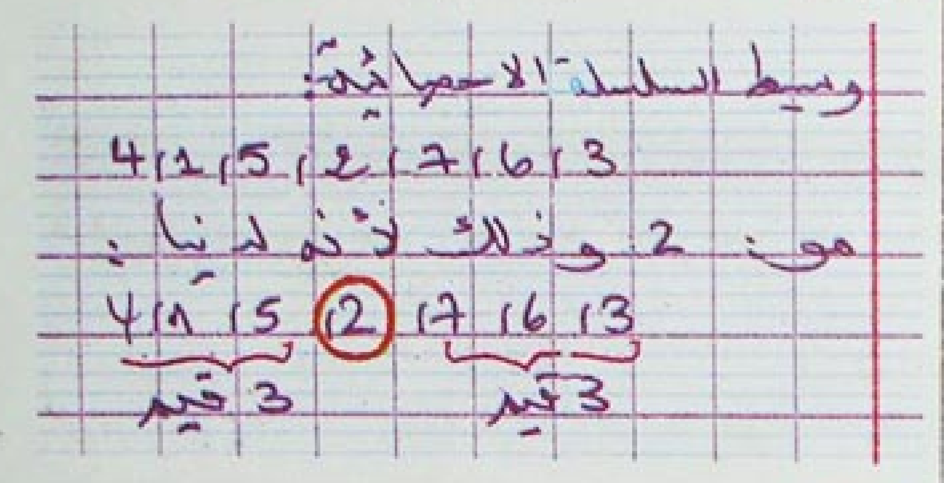
6 سُئِلَ تلميذ عن التواتر الكلي فكان جوابه 2.
- هل جوابه صحيح ؟ لماذا ؟

7 قال رابح لعزيز : في جدول التواترات المجمعة المتزايدة، آخر قيمة للتواتر المجمع هي دائما 1.
- ما رأيك ؟ علل.

8 قال عزيز لرابح : أول قيمة للتواتر المجمع في جدول التواترات المجمعة المتناقصة هي دائما 1.
- ما رأيك ؟ علل.

9 أنشىء في كل حالة من الحالات الآتية، سلسلة احصائية مشكلة من 5 قيم بحيث :
1) وسطها الحسابي يساوي 7.
2) وسيطها يساوي 5.
3) وسطها الحسابي يساوي 7 ووسيطها يساوي 5.

10 ما الخطأ في هذه الإجابة ؟ صحّحه.



11 إليك بعض القيم من سلسلة احصائية :
4، 5، 4، 3، 4، 2، 1، .... .
1) إذا علمت أن وسيط السلسلة الاحصائية الكاملة هو 5، هل يمكن معرفة عدد قيمها ؟ لماذا ؟
2) إذا علمت أن الوسط الحسابي للسلسلة الاحصائية التامة هو 5، هل يمكن معرفة عدد قيمها ؟

12 هل الوسط والوسيط متساويان ؟
للإجابة على ذلك، إليك السلسلة الاحصائية التالية :
4، 5، 9، 4، 9، 4، 8، 7، 4.
- احسب الوسط الحسابي للسلسلة الاحصائية.
- اوجد وسيط هذه السلسلة.
- قارن بين الوسط الحسابي لهذه السلسلة ووسيطها.
- ماذا تستنتج ؟



تماريـــن التطبيق المباشر

13 1) هل الوسيط هو دائما قيمة من قيم السلسلة الاحصائية ؟

2) إليك السلسلة الاحصائية التالية :

.8 .4 .3 .7 .5 .6 .2 .1

أ - رتبها.

ب - اوجد وسيطها.

جـ - هل الوسيط هو إحدى قيم السلسلة.

د - أعد الجواب عن السؤال الأول.

14 إليك أثمان الشاحنة K66 المنتجة من طرف الشركة الوطنية للسيارات الصناعية المعروضة في المعرض الدولي للسيارات عام 2005 وذلك حسب تجهيزها.

التجهيزات	التجهيز 1	التجهيز 2	التجهيز 3	التجهيز 4	التجهيز 5	التجهيز 6
الأثمان (DA)	2398500	2515500	2574000	2632500	2866500	3042000

- أعط الثمن الوسيط لهذه الشاحنة.

15 إليك سلسلة احصائية لمحيطات رؤوس 100 رضيع أعمارهم 6 أشهر :

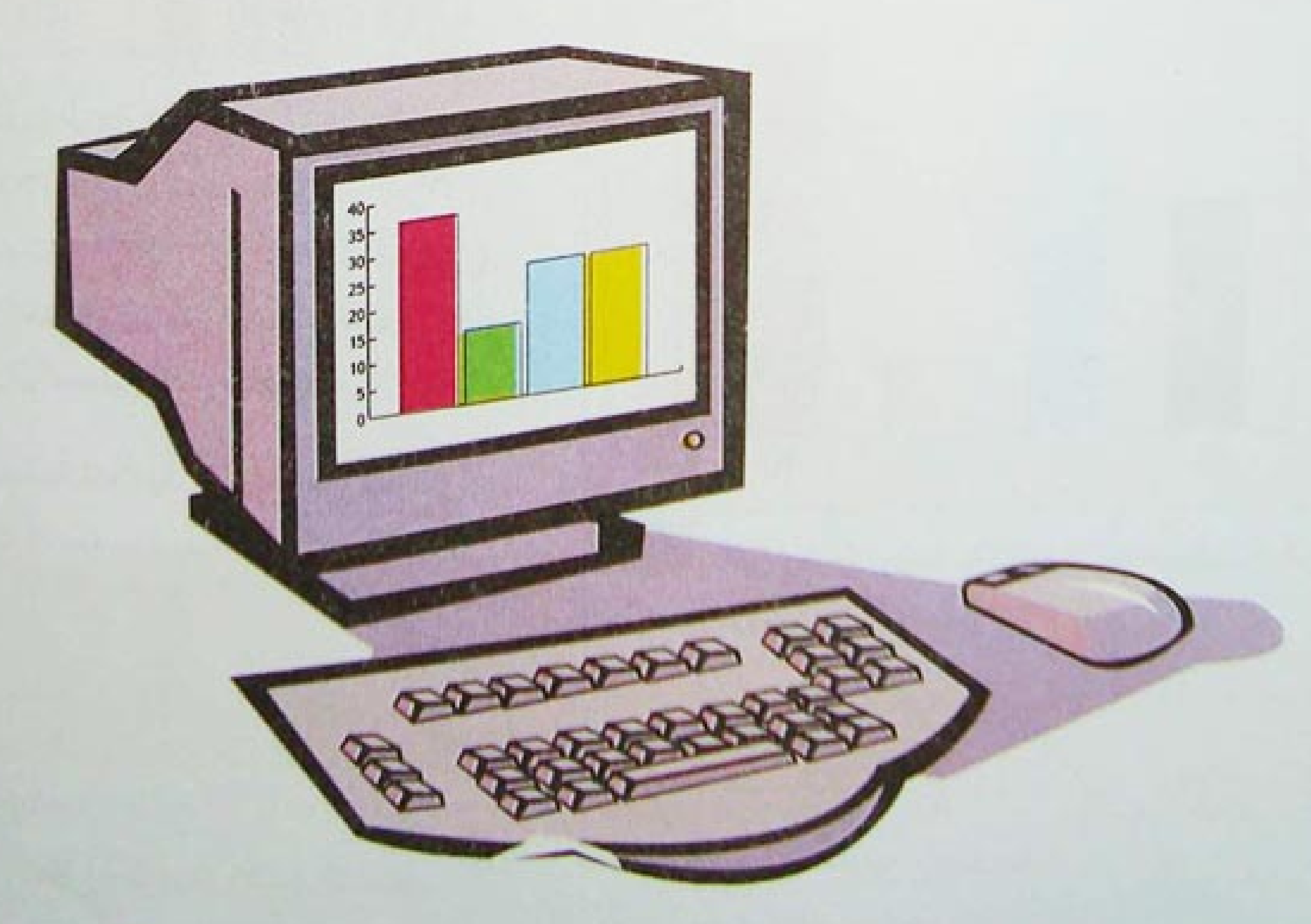
محيطات رؤوس الرضّع (cm)	41	42	43	44	45
التكرارات	16	21	24	20	19

- ما هو الوسط الحسابي المتوازن لمحيطات رؤوس الرضّع؟

16 سُجّلت في أسبوع درجات الحرارة التالية :

الأيام	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
درجات الحرارة (°c)	29	30	31	33	34	32	29

- ما هو الوسط الحسابي لدرجات الحرارة؟





1 يوضح الجدول مساحات بعض ولايات الجزائر (سنة 1987)

الولايات	العاصمة	عنابة	قسنطينة	وهران	تيزي وزو	بومرداس
المساحات (km^2)	455888	185346	353309	95822	702188	275315

1) ما هو التكرار النسبي لمساحة وهران ؟ سمه P.

2) ما هو التكرار النسبي لمساحات الولايات التي تفوق $100000\ Km^2$؟

- قارنه بـ : P - 1 حيث 1 هو التكرار النسبي الكلي.

2 افتتح خط نقل جديد للمسافرين، قامت الولاية بجرد عدد المسافرين في هذا الخط في الفترات الزمنية التالية:

الفترات الزمنية (h)	عدد المسافرين
$6 \le T < 8$	300
$8 \le T < 10$	800
$10 \le T < 12$	200
$12 \le T < 14$	400
$14 \le T < 16$	200
$16 \le T < 18$	700
$18 \le T < 20$	400

حيث T هي الفترة الزمنية معبر عنها بالساعة.

1- مثل معطيات الجدول بالمستطيلات

(خذ كسلم رسم : 1 cm ⟵ 200 مسافرا).

2- ما هو عدد المسافرين في الفترة الصباحية؟

3- ما هو التكرار النسبي للفترة الصباحية ؟

3 المعدلات الفصلية لتلاميذ قسم كانت كالتالي :

المعدل (M)	$M < 5$	$M < 10$	$M < 15$	$M < 20$
التكرارات المجمعة المتزايدة	6	24	35	40

- ما هو عدد تلاميذ القسم ؟

- أعط جدول التكرارات لهذا القسم ثم مثله.

4 المعدلات الفصلية لتلاميذ قسم مكوّن من 39 تلميذا كانت كالتالي :

المعدل (M)	$M > 0$	$M \ge 5$	$M \ge 10$	$M \ge 15$
التكرارات المجمعة المتناقصة	x	33	16	6

- أعط قيمة x.

- أعط جدول التكرارات لهذا القسم ثم مثله.

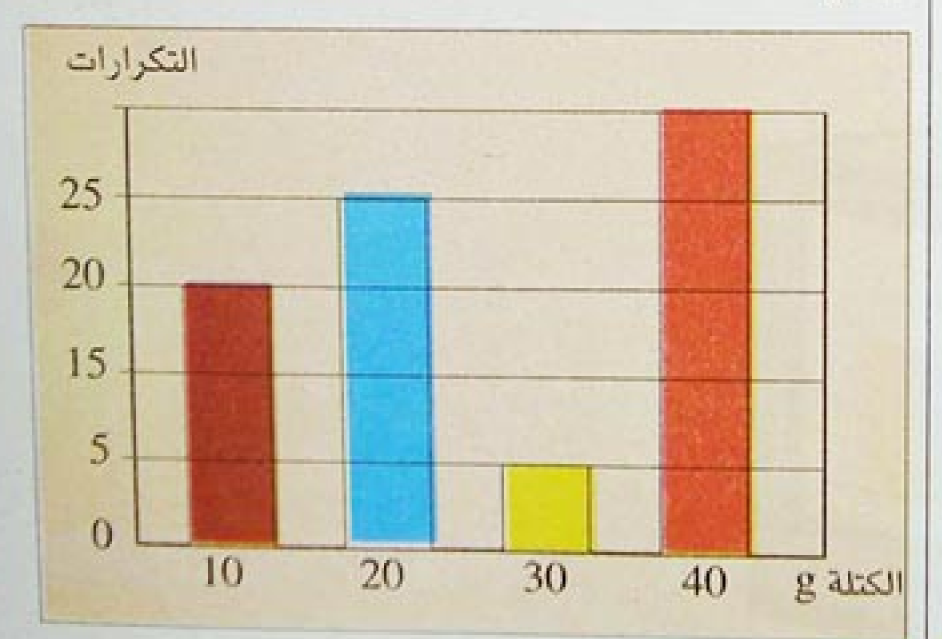
5 تكرارات سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا معطاة في الجدول أدناه :

القيم	10	11	12	13	x
التكرارات	1	3	3	2	y

أ) اوجد قيم y لكي تكون 12 هي القيمة الوسيطة لهذه السلسلة.

ب) ليكن : $y = 2$ ، اوجد x لتكون القيمة 12 وسطا حسابيا متوازنا للسلسلة الاحصائية.

6 أعط وسط ووسيط الكتل الممثلة بالأعمدة التالية :



7 تواريخ الازدياد بالأعوام، لقسم السنة الرابعة متوسط معطاة في الجدول أدناه :

تواريخ الإزدياد	1989	1990	1991
عدد التلاميذ	7	21	2

1) ما هو وسط تاريخ ازديادهم ؟

2) ما هو وسط أعمارهم ؟



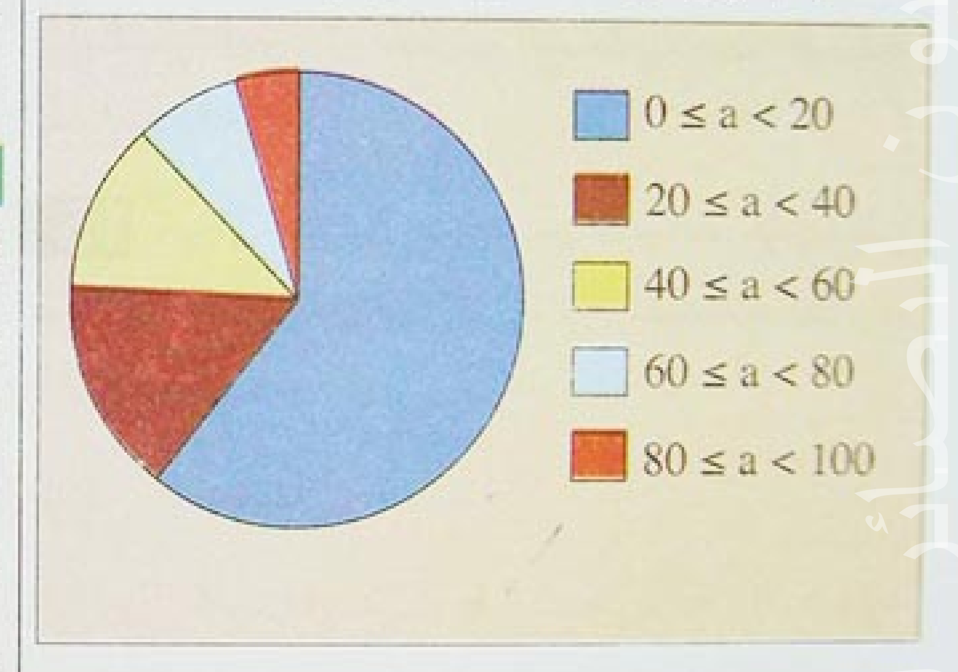
تمـــاريـــن

8 تقديرات عدد سكان الجزائر لنهاية سنة 2003 كانت 32,08 مليون نسمة، تتوزع أعمارهم كما يلي : (نرمز للعمر بـ : A)

فئات الأعمار (سنة)	$0 \leq A < 14$	$14 \leq A < 64$	$65 \leq A \leq 95$
النسب المئوية (%)	34,21	61,72	4,07

- ما هو معدّل عمر الجزائريين لسنة 2003؟
- ما هي نسبة الجزائريين الذين تقل أعمارهم عن 64 سنة ؟ وما هو عددهم ؟

9 يمثل القطاع الدائري الموالي توزيع سكان حي حسب أعمارهم. (يمثل a العمر بالسنوات).



- أعط جدول التكرارت للأعمار إذا علمت أن عدد سكان الحي هو 500 نسمة.
- احسب وسط أعمار سكان هذا الحي.

10 نقاط امتحان الرياضيات لقسم يتكون من 24 تلميذاً كانت كالتالي : 05 ، 08,5 ، 06,5 ، 07 ، 12 ، 06,5 ، 13، 07 ، 08 ، 6,5 ، 10 ، 02,5 ، 07,5 ، 08 ، 03,75 ، 10 ، 10,5 ، 08 ، 5 ، 05 ، 10 ، 11 ، 5 ، 05 ، 05 ، 10.

1) احسب الوسط الحسابي لهذا القسم.

2) ما هي النقطة الوسيطية لهذا القسم.

3) ما هو مدى نقاط هذا القسم.

4) ما هي نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على نقطة تفوق أو تساوي 10؟ ما هو تعليقك عن نتائج القسم ؟

11 إليك بعض المنتوجات الفلاحية الجزائرية (بآلاف القناطير) :

	2000	2001	2002	2003
الزيتون	2171	2003	1919	2005
التمور	3656	4373	4184	4372
العسل	11	16	21	22
الحبوب	9318	26567	19514	42000
الحليب	1584	1637	1544	1613

1) اوجد معدلات المنتوجات الفلاحية لكل سنة ؟

2) ما هي نسبة إنتاج الحبوب في كل سنة ؟

3) ما هي نسبة إنتاج الحبوب في السنوات الأربع ؟

12 درجات الحرارة المسجلة ليوم الأحد، 19 ديسمبر 2004 ، كانت كالآتي : (الوحدةC°)

وهران : 18°C، الجزائر : 19°C، بجاية : 15°C،
عنابة : 15°C، المدية : 14°C، سطيف : 14°C،
بوسعادة : 17°C، الجلفة : 9°C، الشلف : 15°C،
تيزي وزو : 17°C، ڤالمة : 11°C، معسكر : 15°C،
باتنة : 11°C، بشار : 17°C، بسكرة : 14°C،
تندوف : 20°C، أدرار : 28°C، حاسي الرمل : 28°C،
جانات : 28°C، إليزي : 28°C.

1) احسب معدل درجات الحرارة المسجلة ؟

2) ما هي القيمة الوسيطية لدرجات الحرارة المسجلة في هذا اليوم ؟

3) ما هو المدى الحراري لهذا اليوم ؟

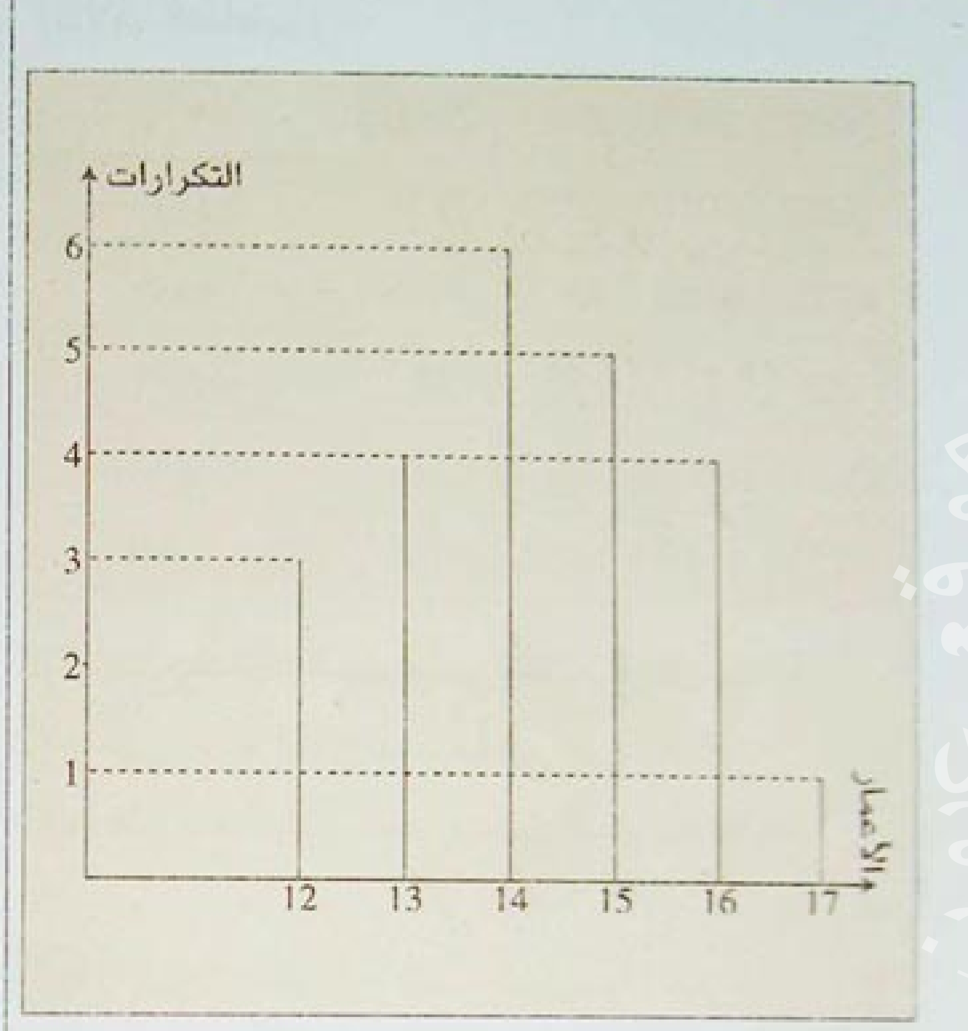
4) مثل باستعمال التمثيل بالأعمدة درجات الحرارة.

5) نسمي منوالا لسلسلة احصائية، القيمة الموافقة لأكبر تكرار أي القيمة الأكثر تكرارا في السلسلة.

استنتج من السؤال 4، منوال هذه الدرجات الحرارية.

6) ما هو عدد درجات الحرارة الأقل من 17°C ؟ ما هي نسبة درجات الحرارة الأكبر من 20°C؟

13 يمثل التمثيل بالأعمدة التالي، توزيع أعمار نادٍ للشطرنج :



1) ما هو عدد المشتركين في هذا النادي ؟

2) أكمل الجدول التالي :

الأعمار	12	
التكرارات	3	
التواترات	0,13	
التواترات المجمعة المتناقصة	23	

3) ما هو عدد المشتركين الذين تفوق أعمارهم 14 سنة؟ وما هي النسبة المئوية للمشتركين الذين أعمارهم 14 سنة في هذا النادي ؟

4) ما هو معدل أعمار المشتركين في هذا النادي ؟

5) أعطي العمر الوسيط لهذا النادي ؟

6) ما هو مدى أعمار المشتركين في هذا النادي ؟

14 تمثل القيم التالية، نسبة السكر في الدم لـ 32 شخصا مقدرة بـ g/l.

1,13 ، 1,06 ، 0,98 ، 0,87 ، 1,11 ، 1,06 ، 0,98 ، 0,83 ، 1,07 ، 0,99 ، 0,91 ، 1,14 ، 1,06 ، 0,99 ، 0,90 ، 1,13 ، 1,03 ، 0,94 ، 1,15 ، 1,08 ، 1,00 ، 0,94 ، 1,14 ، 1,07 ، 1,04 ، 0,97 ، 1,19 ، 1,10 ، 1,03 ، 0,95 ، 1,17 ، 1,08 ، 1,20 ، 1,10.

– ما هو تكرار القيم الأصغر تمامًا من 1g/l ؟

– ما هو تكرار القيم الأكبر من 1g/l ؟

– ما هي القيمة الوسيطية لنسبة السكر في الدم لهذه العينة.

– احسب متوسط نسبة السكر في الدّم للعينة.

– استعمل المجدول لحساب الوسط ولإيجاد الوسيط لهذه السلسلة.

15 لقياس صلابة أنابيب من الفولاذ، نطبق على عينة من 50 أنبوبًا، العدد اللازم من الصدمات لحدوث الإنكسار.

النتائج كانت كالتالي :

1 ، 5 ، 2 ، 4 ، 1 ، 4 ، 5 ، 2 ، 3 ، 5 ، 1 ، 3 ، 4 ، 4 ، 1 ، 3 ، 2 ، 1 ، 3 ، 3 ، 4 ، 2 ، 4 ، 1 ، 4 ، 1 ، 5 ، 1 ، 1 ، 5 ، 3 ، 4 ، 1 ، 3 ، 2 ، 3 ، 4 ، 2 ، 2 ، 3 ، 1 ، 3 ، 2 ، 3 ، 3 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 3.

– رتب هذه القيم تصاعديا.

– أعط جدول التكرارت لهذه القيم.

– أعط جدول التواترات المجمعة المتزايدة.

– أعط جدول التواترات المجمعة المتناقصة.

– احسب وسط هذه السلسلة الإحصائية وأعط وسيطها.

مســائل

1 اوجد العددين x و y لكي يكون الوسط الحسابي والمدى مساويين للعدد 7 للسلسلة الاحصائية المرتبة :
x ، 5 ، 5 ، 8 ، 9 ، 9 ، y.

2 توزيع أثمان السلع المعروضة في محل تجاري موضحة في الجدول التالي :

الأثمان (X 100 DA)	< 5	< 10	< 15	<20	<25	<30	< 35	<40	< 45	< 50
التكرارات المجمعة المتزايدة	14	35	63	97	130	155	175	184	200	212

1) احسب الوسط الحسابي المتوازن للأثمان.

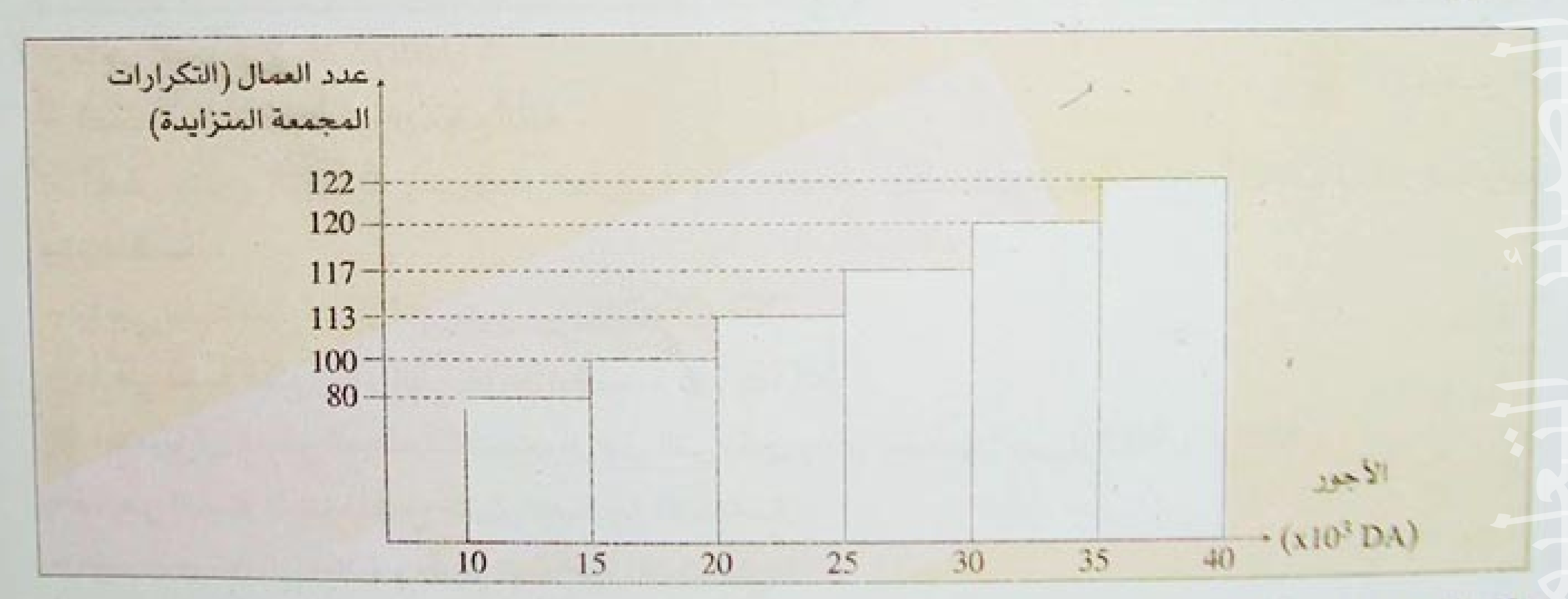
2) أرسم المدرج التكراري المتزايد.

3) إلى أي فئة ينتمي وسيط الأثمان ؟

4) أعطي التكرار النسبي للبضائع التي أثمانها محصورة بين 2500 DA و 4500 DA؟

5) أعط منوال هذه الأثمان (نتكلّم هنا عن الفئة المنوالية).

3 مرتبات عمّال مؤسسة محصورة بين 10000 DA و 40000 DA. نعطي مدرج التكرارات المجمّعة المتزايدة :



1) ما هو عدد عمال هذه المؤسسة ؟

2) أعط الوسط الحسابي لأجور عمال المؤسسة.

3) انطلاقا من هذا المخطط، أعط الفئة التي ينتمي إليها الأجر الوسيط مع شرح الطريقة.

4 في مؤسسة، $\frac{2}{5}$ عمالها حديثو التوظيف، يتقاضون 12000 DA كأجور شهرية، و63 عاملاً الباقون يتقاضون 15000 DA شهريا.

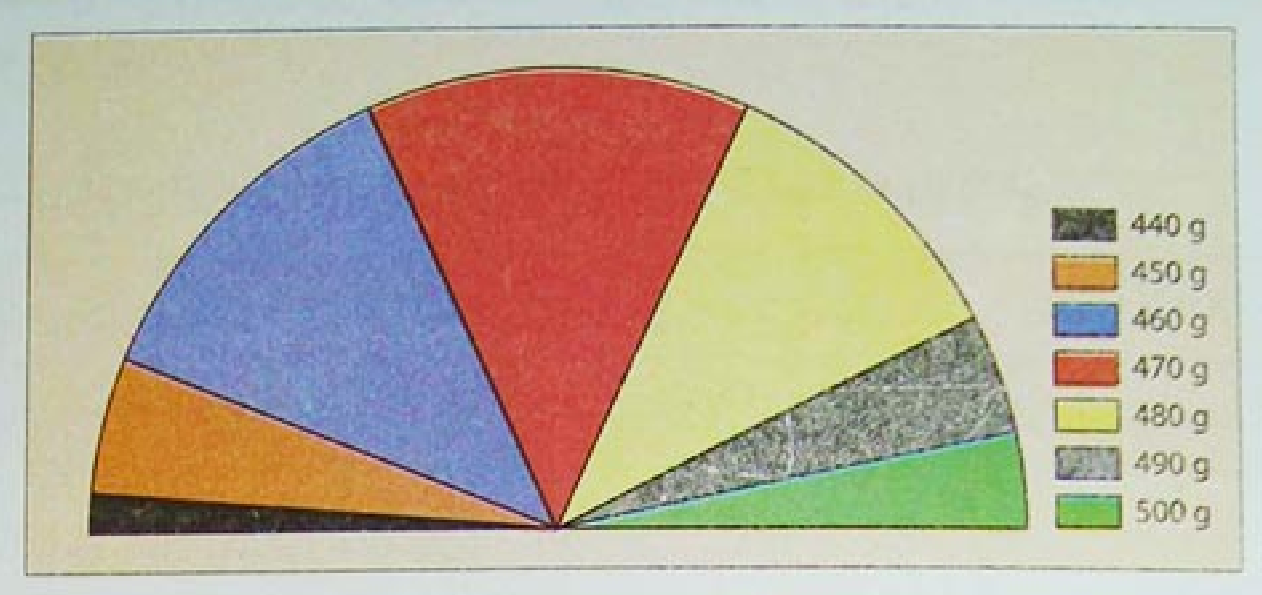
وفي مؤسسة أخرى، 30 عاملاً حديثو التوظيف، يتقاضون 13000 DA شهريا، و $\frac{2}{7}$ الباقون يتقاضون 14000 DA شهريا.

1) قارن بين التكرارات، متوسطي الأجور، الأجرين الوسيطين للمؤسستين.

2) في أي المؤسستين، يوجد عدد أكبر من العمّال الذين يتقاضون أجوراً تقل عن معدلات أجور مؤسساتهم ؟



5 يمثل نصف القطاع الدائري التالي توزيع أوزان قطع غيار لمصنع.



- توزيع أوزان قطع غيار المصنع -

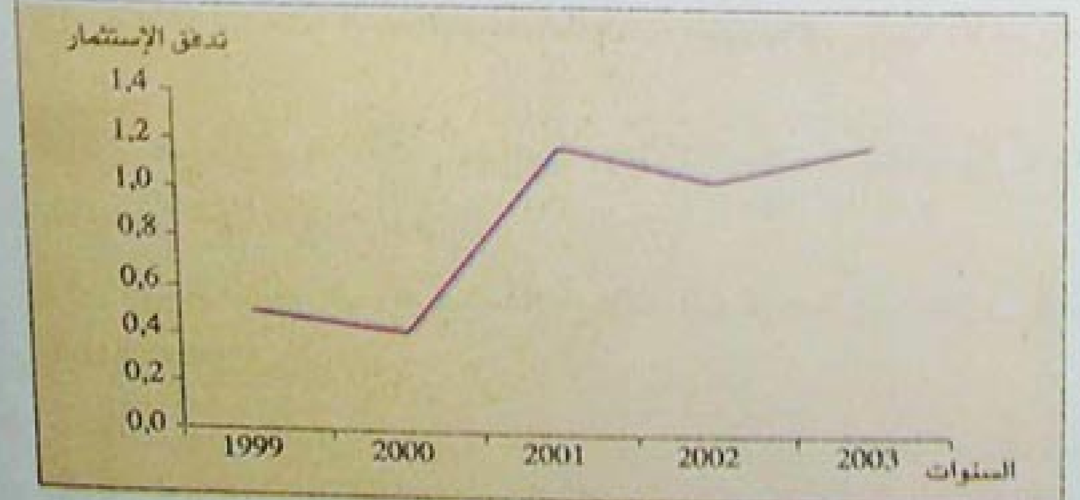
الوزن (g)	440	450	460	470	480	490	500	
الزاوية (°)								180
التكرار								360

- ما هو العدد الكلي لقطع الغيار ؟
- أعط وسط ووسيط أوزان قطع الغيار.
- أعط جدول التكرارت المجمعة المتزايدة والمتناقصة، وكذا التواترات المجمعة المتزايدة والمتناقصة.
- ما هي نسبة قطع الغيار التي يفوق وزنها تماماً 480 g ؟
- ما هي نسبة قطع الغيار التي يقل وزنها تماما عن 460 g ؟

إذا اعتبرنا أنّ القطع الصالحة للاستعمال هي التي يكون وزنها محصوراً بين 460 g و 480 g.

- ما هي النسبة المئوية لقطع الغيار الصالحة للاستعمال ؟
- احسب وسط الوزن لقطع الغيار الصالحة للاستعمال ؟

6 يمثل التمثيل الموالي، تطور تدفق الإستثمارات الأجنبية بالجزائر بملايير الدولارات.



1) في أي فترة زمنية، كان أكبر تدفق للإستثمار ؟

2) في أي فترة زمنية، كان أسرع تطوّر لتدفق الإستثمار ؟

3) إذا اعتبرنا أنّ وتيرة تطور تدفق الإستثمار للفترة الأخيرة تبقى ثابتة إلى غاية 2007، فما هي قيمة تدفق الإستثمار لسنة 2007.



من التاريخ

شرف الدين المظفر الطوسي (حوالي 532هـ/1135م-611هـ/1213م)

حياته : ولد شرف الدين المظفر بن محمد الطوسي (الذي ينبغي التمييز بينه وبين نصير الدين الطوسي الذي ذاع صيته أكثر من شرف الدين) حوالي سنة 532 هـ/1135 م، في منطقة طوس بإيران. وتنقّل الطوسي في مدن مختلفة في سوريا والعراق وإيران. فقد درّس في العديد من المدن، منها دمشق وحلب والموصل وبغداد وطوس. وفي الموصل كان للطوسي شهرة كبيرة في تدريس الرياضيات جعلت بعضهم يقطعون مسافات طويلة أملا في التتلمذ على يديه. قيل عنه قديما : "كان أوحد زمانه في الحكمة والعلوم الرياضية وغيرها، فاضلا في الهندسة، ليس في زمانه مثله".

إسهاماته : عُرف شرف الدين بالكتابة حول آلة الأسطرلاب، ونسب إليه اختراع أحد أنواعها، عرف بـ "عصا الطوسي" أو "الأسطرلاب الخطي". وفي حقل الرياضيات ألف الطوسي كتابا في الجبر عنوانه المعادلات". وتمكّن مؤرخون الرياضيات بصعوبة من الإلمام بما كتبه الطوسي في موضوع المعادلات التكعيبية.

والذي يشد الانتباه أن الطوسي استخدم ما يسمى في الرياضيات الحديثة بمفهوم "المشتق" (الذي ستتعرف عليه خلال دراستك الثانوية) دون أن يسميه، فتحصل على القيم القصوى التي تأخذها بعض العبارات من أجل العثور على حلول أنواع من المعادلات الجبرية. ومن المعلوم أن هذا المفهوم قد أدخل في الرياضيات خلال القرن السابع عشر ميلادي بتسمية أخرى. ولم يشر الطوسي بوضوح إلى مفهوم "الدوال" غير أن هذا المفهوم كان حاضرا في عمله.

الحساب التفاضلي : يؤرخ الغربيون بداية الحساب التفاضلي - الذي أحدث تحولا جذريا في الرياضيات، والمرتبط بدراسة "اللامتناهيات في الصغر" - في عهد العالم الإنكليزي نيوتن (1642-1727) والرياضي الألماني ليبنيتز (1646-1716). فقد جعلت دراسة ليبنيتز لعمليات التفاضل والتكامل هؤلاء المؤرخين ينسبون إليه ابتكار حساب "اللامتناهيات في الصغر". كما نسبوا مفهوم "المشتق" و"الدالة" إلى نيوتن. إلا أن إسهام الرياضيين العرب والمسلمين - قبل عهد نيوتن وليبنيتز- من أمثال ثابت بن قرة (835م-900م) وإبراهيم بن سنان (908م-946م) والكوهي (المتوفى نحو 1014م) وابن الهيثم (نحو 965م - 1038م) والطوسي في هذا الموضوع لم يتم إبرازه في هذا السياق، ولم يوفَّ هؤلاء حقهم من التنويه.

ومن جهة أخرى، ينسب الغربيون ابتكار الحساب الجبري إلى الرياضي الفرنسي فرونسوا فيات (1540-1603). وقد قارن مؤخرا المؤرخون عمل الطوسي بما قام به فيات في الحساب الجبري. فلاحظوا التشابه الكبير الموجود بين بعض الجداول التي وضعها الطوسي في دراسة المعادلات والجداول التي أتى بها فيات، وهم يتساءلون : "ألم يكن فيات على صلة بهذا التيار في الجبر العربي الذي يشكّل الطوسي أحد ممثليه؟" . ثم يؤكدون على ضرورة مراجعة المواقف بخصوص مقارنة أعمال الطوسي وفيات، متكهنين بأن هناك أعمالا جبرية لعمر الخيام وشرف الدين الطوسي كانت معروفة لدى المشتغلين بالجبر من الأوروبيين خلال القرن السادس عشر.



نوع من أنواع الأسطرلاب

الرياضيات تتقدم

كم ينتج الرياضيون؟ إحصائيات

المجلات : تؤدي المجلات المتخصصة التي تصدرها الجامعات والمعاهد العليا في عصرنا الحاضر دورا بارزا في إيصال الأخبار العلمية ونشرها في أوساط العلماء والباحثين. إنها القناة الأولى التي يعلن فيها عن الاكتشافات والابتكارات، وهي الوعاء الملائم لتدارس أهم ما توصل إليه العلماء وقياس صدى الاختراعات ومدى صحة النتائج والنظريات الجديدة.

إحصائيات : إذا اقتصرنا على مادة الرياضيات فإن الإحصائيات تشير إلى أن عدد البحوث التي تصدر سنويا يتضاعف كل عشر سنوات تقريبا. ويقدّر عدد البحوث الرياضية التي صدرت عام 1870 بـ 480 بحثا؛ أما خلال الخمسينيات من القرن العشرين فقد بلغت 5000 بحث سنويا. وتشير نفس التقديرات إلى أن عدد البحوث المنشورة وصل في أواخر القرن الماضي إلى 70000 بحث سنويا.

لكن نسبة تزايد عدد البحوث ليست منتظمة، فهي ترتبط بعوامل شتى في مختلف البلدان. والملاحظ أن تضاعف عدد البحوث عبر العالم كل عشر سنوات ظل القاعدة العامة منذ نهاية الحرب العالمية الثانية إلى سنة 1990. أما في السنوات الأخيرة، فتشير بعض الإحصائيات إلى انخفاض طفيف في نسبة التزايد، وليس في العدد الإجمالي. فلا عجب في هذا الكمّ الهائل من الإنتاج إذا ما علمنا أن عدد الباحثين في الرياضيات عبر العالم كان يقدر في مطلع القرن العشرين بـ 200 باحث، أما الآن فهو يزيد عن 50000 باحث.

البحوث الرياضية : وما يشد الانتباه في هذه الإحصائيات أنها توضح بأن العدد الإجمالي للبحوث الرياضية التي نشرت حتى الآن منذ ظهور المجلات يقدر بحوالي مليون ونصف مليون بحث، وأن نصف هذه البحوث نشر خلال العشرة أعوام الماضية. وبعبارة أخرى ستكون كمية البحوث الرياضية التي ستصدر خلال العشرين سنة القادمة مكافئة لمجموع الكميات التي نشرت قبل عام 2000.

إن جميع هذه البحوث تصدر ضمن مجلات متخصصة في مختلف فروع الرياضيات، التي يقدر عددها بـ 3000 مجلة. ولعل القارئ يعتقد أن الرياضيات ممثلة في بضعة فروع (هندسة، جبر، إحصاء، حساب). لكن العارفين وزّعوا فروع الرياضيات إلى عدة آلاف : بلغ الآن حوالي 4000 فرع. فلا غرابة، إذن، أن يصدر 70000 بحث رياضي كل سنة، أي ما لا يقلّ عن 70000 نظرية جديدة كل سنة يشترك في تأليفها الرياضيين عبر كافة جامعات العالم (في القارات الخمس) بنسب متفاوتة. وعلينا ألا نندهش كثيرا في ضخامة هذا العدد لأن النتائج الجديدة تعمم عادة النظريات السابقة، وبالتالي فإن تداخل النظريات مع تعميماتها اللاحقة يقلّص كثيرا عدد النظريات الجديدة.

النشر الإلكتروني : تلك هي نظرة إحصائية على حالة البحوث الرياضية اليوم، تسوقنا إلى طرح العديد من الأسئلة، مثل : كيف يمكن مسايرة هذا التزايد الضخم في الإنتاج الرياضي؟ هل تستطيع المجلات التقليدية "الورقية" مواصلة استيعاب كل هذه البحوث؟ لقد بدأت تظهر في الجامعات المختلفة مجلات إلكترونية متخصصة لتعوّض المجلات الورقية تخفيفا لعبء الطبع والتوزيع، وإسهاما في النشر السريع للنظريات والنتائج الجديدة.



9

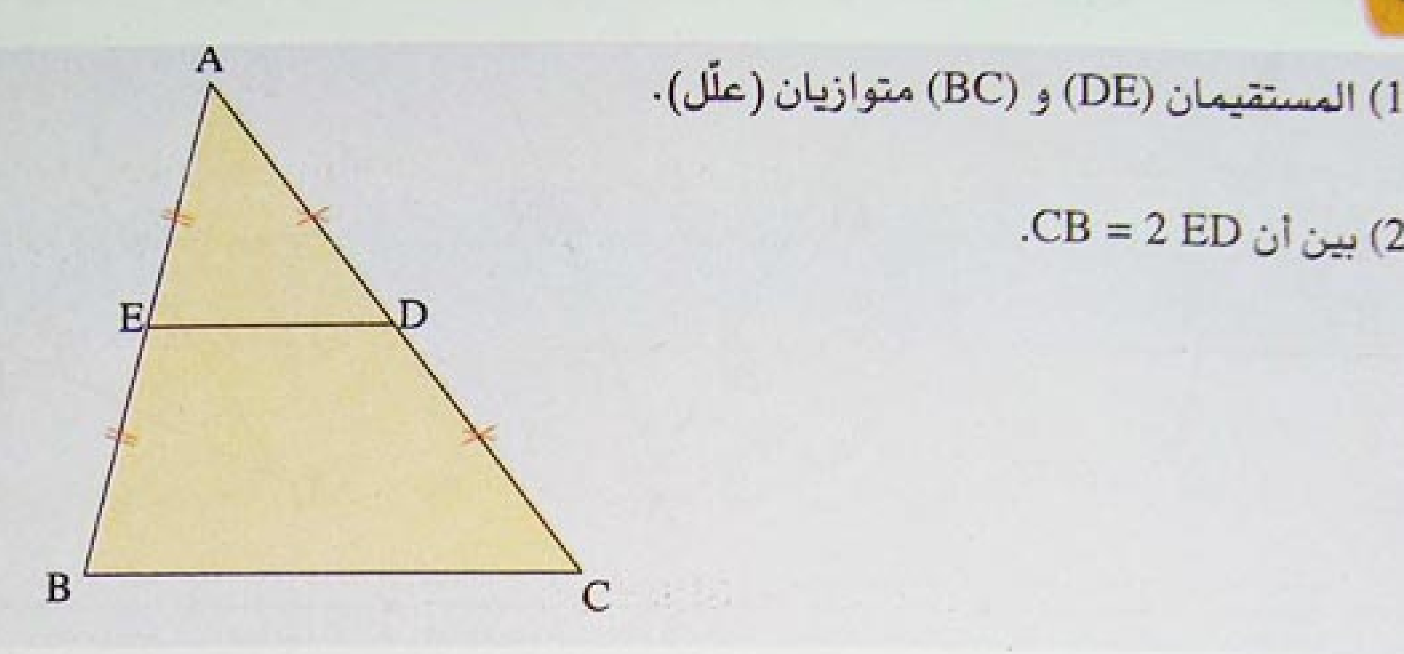
نظرية طالس

تمهيد

1

1) المستقيمان (DE) و (BC) متوازيان (علّل).

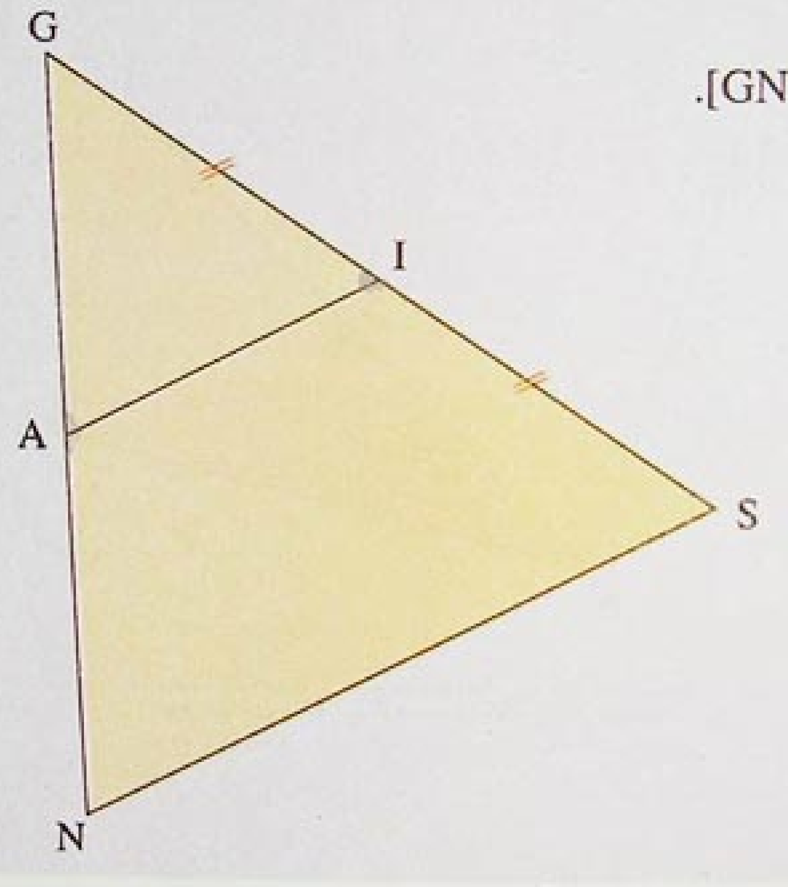
2) بين أن $CB = 2\ ED$.



2

بين أن النقطة A منتصف [GN].

.(IA) // (SN)



3

وحدة الطول هي السنتيمتر.

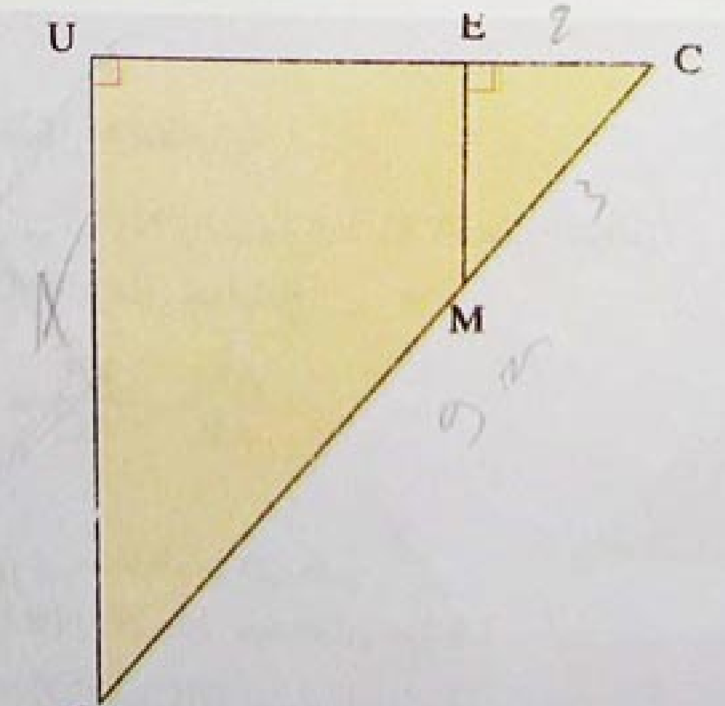
$OC = 9$

$OU = 7$

$CM = 3$

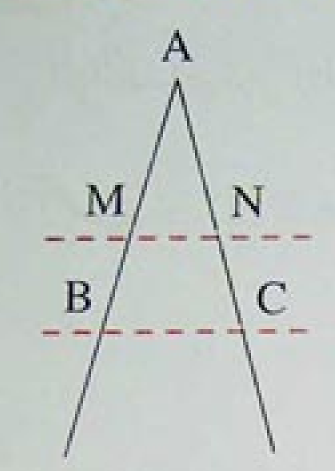
$CE = 2$

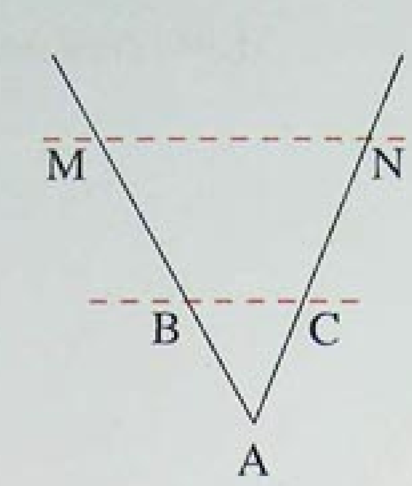
1) احسب UC، ME.

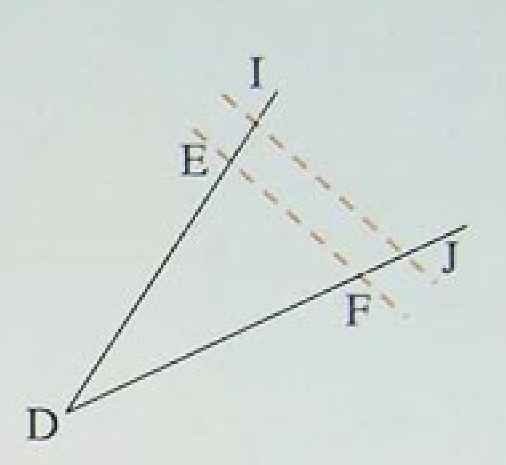




المستقيمان المعينان بخطوط متقطعة في كل من الأشكال التالية متوازيان. اكتب النسب المتساوية :

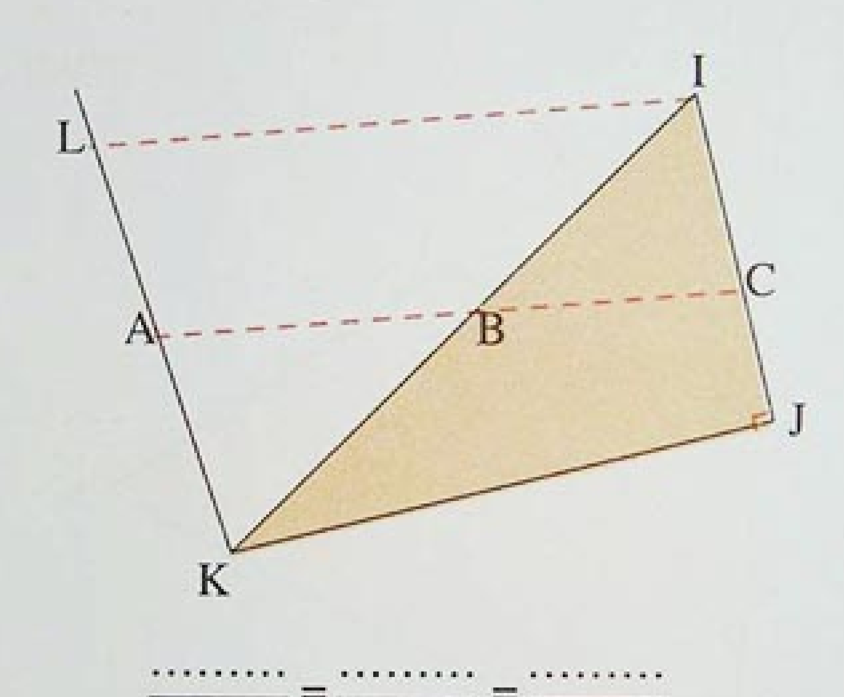






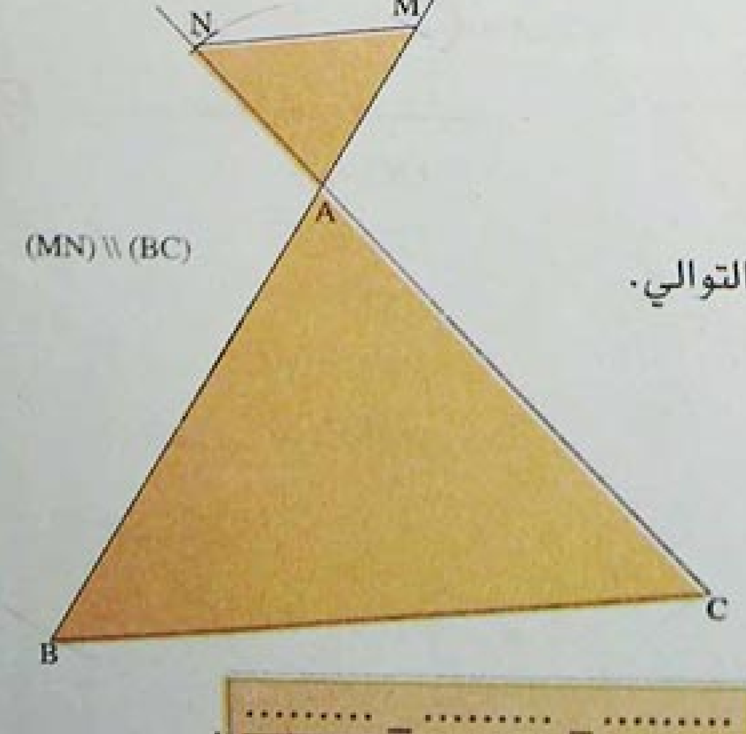


$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ • $\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ • $\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$



$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$





1 انقل في دفترك الشكل المقابل.

أنشىء 'M و 'N نظيرتي M وN بالنسبة للنقطة A على التوالي.

ما نوع الرباعي 'NMN'M (علّل جوابك).

2 استنتج ان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{NM}{BC}$.

أكمل ما يلي :

(AB) و(AC) مستقيمان متقاطعان في A،

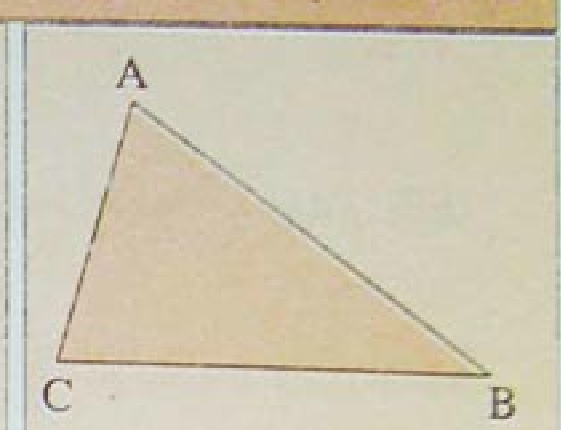
$M \in (AB)$ و $N \in (AC)$ (N وM مختلفان عن A).

إذا كان المستقيمان (MN) و (BC) ....، فإن

$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$.

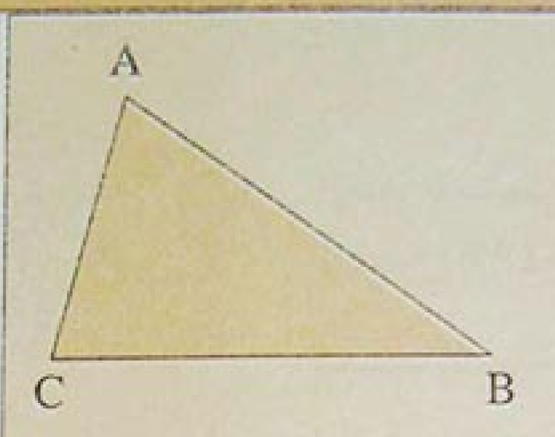
3

1 ABC مثلث بحيث AB = 4 cm ، AC = 2,5 cm. عين النقطتين M و N في كل حالة :



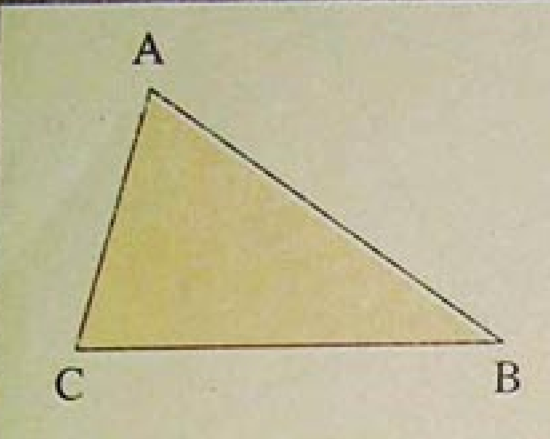
AM = 3,2 cm ؛ M ∈ [AB].

AN = 2 cm ؛ N ∈ [AC].



AM = 3,2 cm ؛ M ∈ [AB].

AN = 2 cm ؛ N ∉ [AC] ؛ N ∈ (AC).



AM = 3,2 cm ؛ M ∉ [AB] ؛ M ∈ (AB).

AN = 2 cm ؛ N ∉ [AC] ؛ N ∈ (AC).

احسب النسبتين $\frac{AM}{AB}$ و $\frac{AN}{AC}$ وقارنها.

هل المستقيمان (BC) و (MN) متوازيان ؟ تحقق من ذلك بالأدوات الهندسية.

2 ABC مثلث بحيث AB = 4,2 cm ، AC = 5,6 cm.

- عين النقطة M بحيث M ∈ [AB] و AM = 3 cm.
- عين النقطة N بحيث N ∈ [AC] و AN = 4,8 cm.

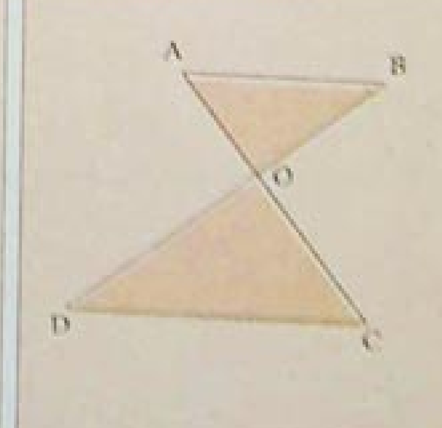
احسب النسبتين $\frac{AM}{AB}$ و $\frac{AN}{AC}$ وقارنهما.

هل المستقيمان (BC) و (MN) متوازيان ؟

اعتمادا على نتائج النشاط 3، اذكر الشروط الكافية لتوازي المستقيمين (NM) و(BC).

4

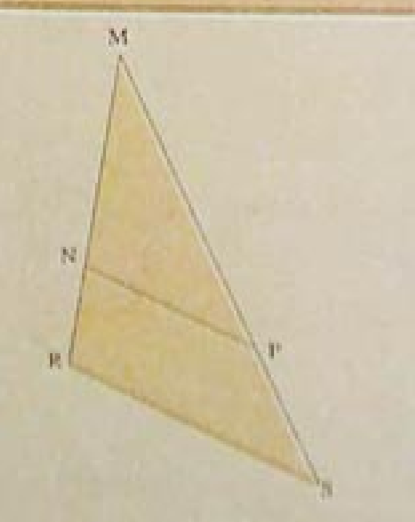
في كل شكل من الأشكال التالية، احسب الطول x :



علما أن : (AB) // (DC) ؛

OC = 3cm ؛ OB = 2,4cm ؛

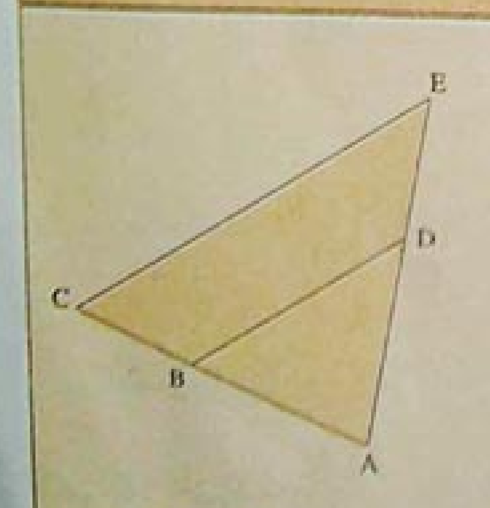
OA = 2cm ؛ BD = xcm.



علما أن : (NP) // (RS) ؛

MR = 6cm ؛ MS = 9cm ؛

MP = xcm ؛ MN = 4cm.



علما أن : (CE) // (BD) ؛

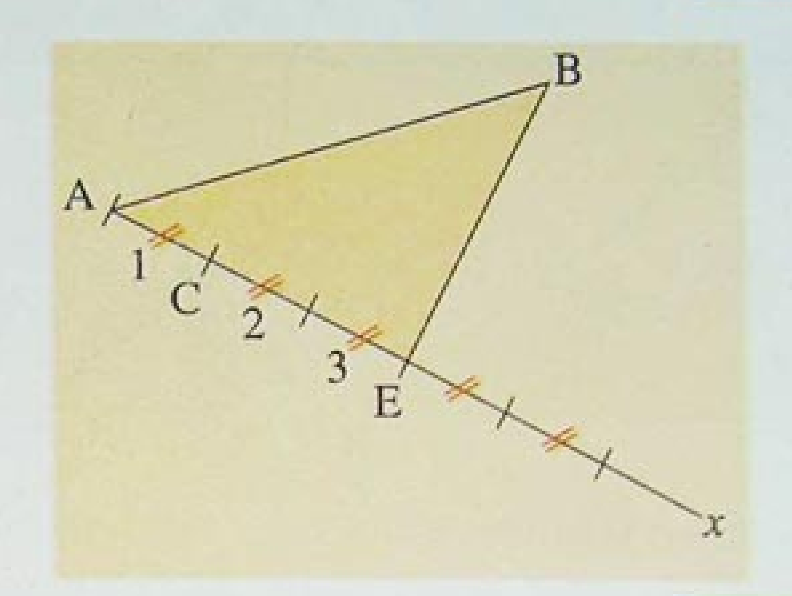
AB = 3cm ؛ BC = 2cm ؛

CE = xcm ؛ BD = 4cm.






[AB] قطعة مستقيم. [Ax) نصف مستقيم مدرج تدريجا منتظما.



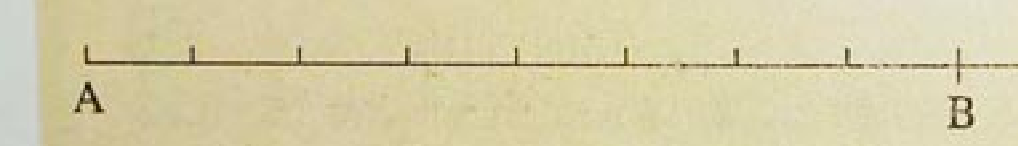
- ارسم مستقيما يشمل النقطة C ويوازي (EB) ويقطع [AB] في D.
- احسب النسبة $\frac{AD}{AB}$ ، ثم اكتب AB بدلالة AD.
- قسم القطعة [AB] إلى 3 قطع متقايسة.



تمعن في الشكل، ثم أكمل الجدول :

A M B — $\frac{MA}{AB}=$ .... ؛ $\frac{MA}{MB}=$ ....

A M B — $\frac{MA}{AB}=$ .... ؛ $\frac{MA}{MB}=$ ....



$\frac{MA}{AB}=$ .... ؛ $\frac{MA}{MB}=$ ....

A M B — $\frac{MA}{AB}=$ .... ؛ $\frac{MA}{MB}=$ ....

A M B — $\frac{MA}{AB}=$ .... ؛ $\frac{MA}{MB}=$ ....

أكمل ما يلي :

إذا كان $\frac{MA}{MB}=1$ ، فإن M .... [AB].

إذا كان $\frac{MA}{MB}<1$ ، فإن M أقرب إلى .... منه إلى ....

إذا كان $\frac{MA}{MB}>1$ ، فإن M أقرب إلى .... منه إلى ....

1 نظرية طالس

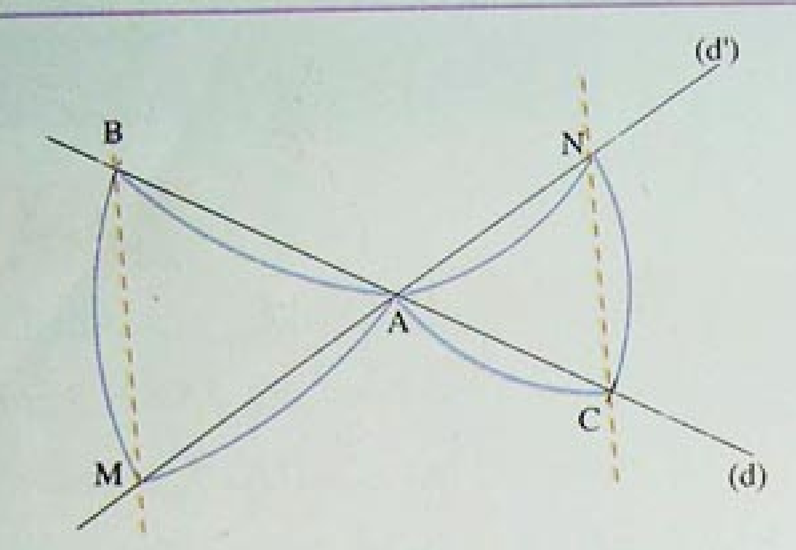
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

B و C نقطتان من (d) تختلفان عن A.

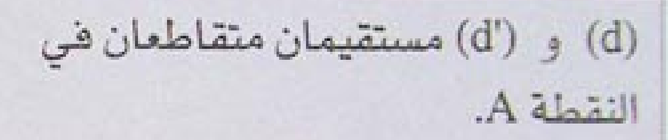
M و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان (BM) و (CN) متوازيين،

فإن $\frac{MB}{CN} = \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$.



2 النظرية العكسية لنظرية طالس



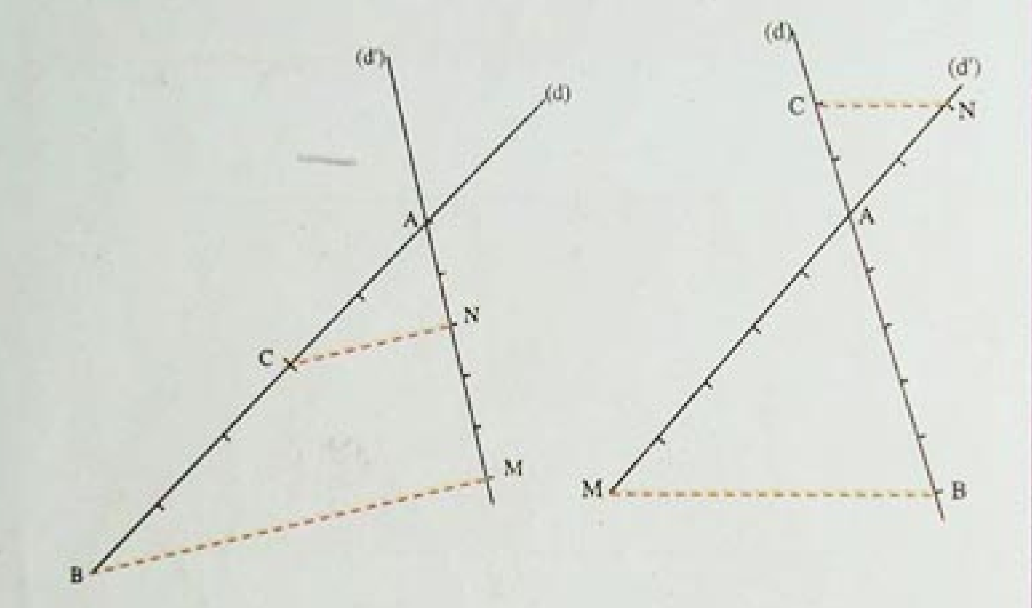
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

C و B نقطتان من (d) تختلفان عن A.

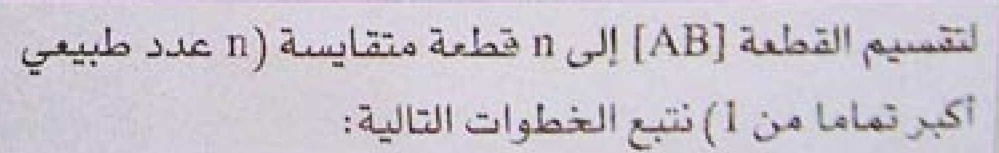
M و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان $\frac{AC}{AB} = \frac{AN}{AM}$

والنقاط A ،N ،M و A ،C ،B بنفس الترتيب، فإن (CN) و (MB) متوازيان.

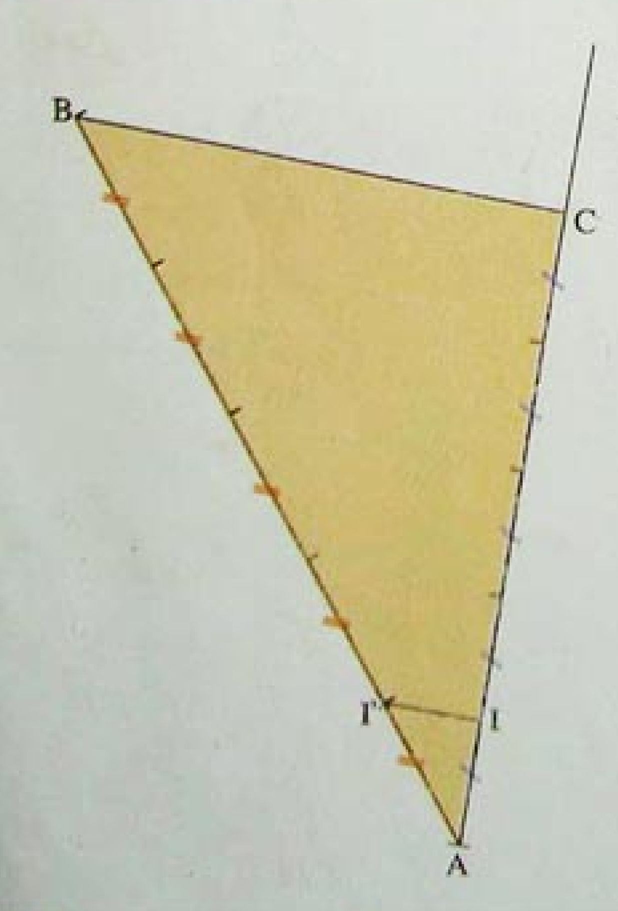


3 تقسيم قطعة مستقيم هندسيا (بالمدور والمسطرة غير المدرجة)



لتقسيم القطعة [AB] إلى n قطعة متقايسة (n عدد طبيعي أكبر تماما من 1) نتبع الخطوات التالية:

- ننشىء نصف مستقيم مبدؤه A وحامله يختلف عن المستقيم (AB).
- على نصف المستقيم هذا ننشئ نقطة C بحيث AC = n.
- ننشىء المستقيم (BC).
- من القطعة [AC] نأخذ نقطة I .
- ننشىء (D) المستقيم المار من I والموازي للمستقيم (BC).
- نسمي I' نقطة تقاطع (D) و (AB).
- نقسم القطعة [AB] إلى قطع متقايسة طولها AI' باستعمال المدور.



حساب طول قطعة مستقيمة

طريقة استعمال نظرية طالس.

تمرين

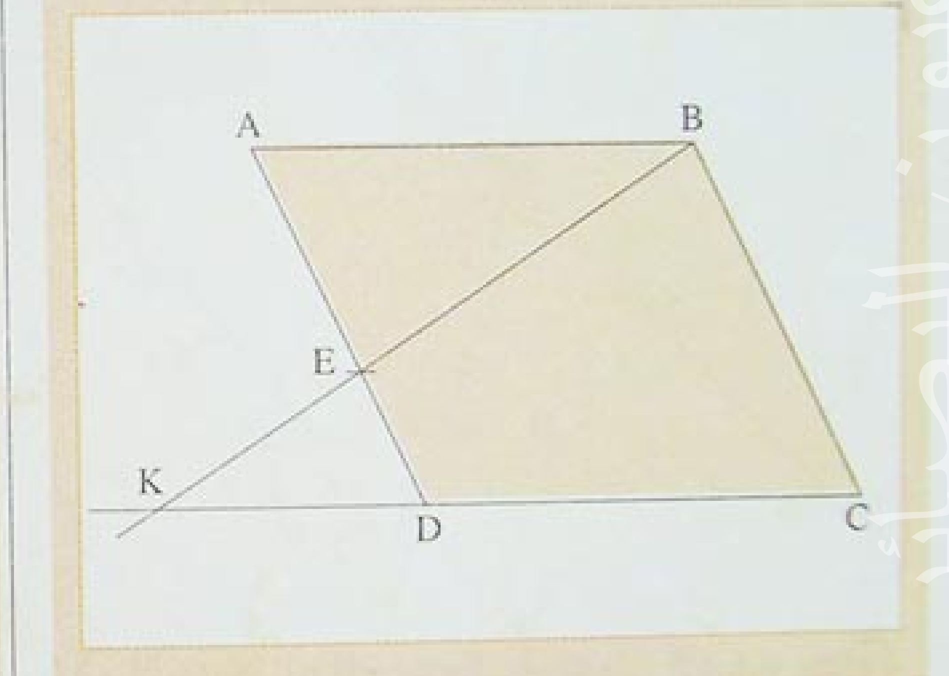
ABCD متوازي أضلاع بحيث :

$BC = 4\ cm$ و $AB = 5\ cm$.

E نقطة من [AD] بحيث $AE = 2,5\ cm$.

المستقيم الذي يشمل النقطتين B و E يقطع (DC) في النقطة K.

احسب DK.



الحل

بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن $(DC) // (AB)$.

تعلم أن : $K \in (DC)$. إذن $(KD) // (AB)$.

(AB) و(KD) متوازيان.

حسب نظرية طالس :

$$\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EK} = \frac{AB}{KD}$$

يعني :

$$\frac{2,5}{1,5} = \frac{EB}{EK} = \frac{5}{KD}$$

من $\frac{2,5}{1,5} = \frac{5}{KD}$ نستنتج أن $KD = \frac{1,5 \times 5}{2,5}$.

أي : $KD = 3\ CM$.

كيف نبين أن مستقيمين متوازيان

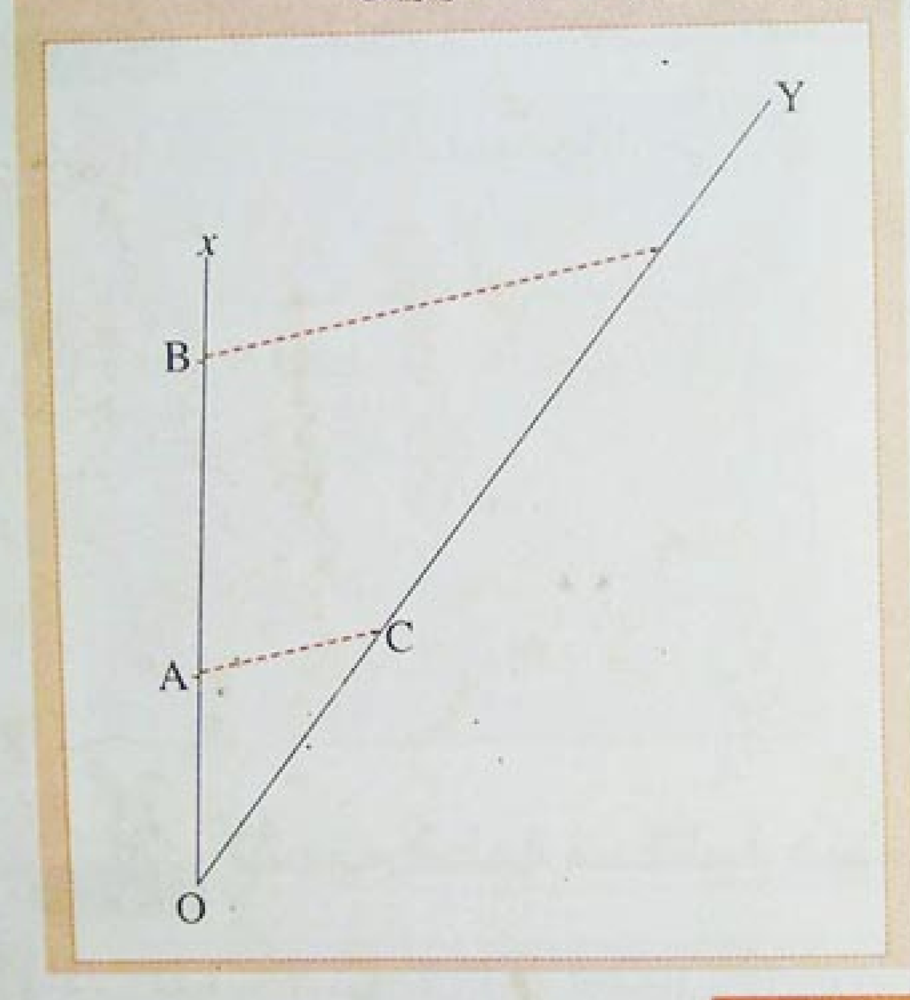
طريقة استعمال النظرية العكسية لطالس.

تمرين

عين النقطتين A و B من $[Ox)$ بحيث $OA = 2\ cm$ و $AB = 3\ cm$.

عين النقطتين C و D من $[Oy)$ بحيث $OC = 3\ cm$ و $CD = 4,5\ cm$.

بين أن (AC) و (BD) متوازيان.



الحل

نحسب النسبتين $\frac{OC}{OD}$ و $\frac{OA}{OB}$.

$\frac{OC}{OD} = \frac{3}{7,5}$ أي $\frac{OC}{OD} = \frac{2}{5}$.

و $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{5}$.

لدينا النقط O، A، B بنفس الترتيب O، C، D

و $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$.

حسب النظرية العكسية لطالس :

(AC) و (BD) متوازيان.

إثبات إستقامية ثلاث نقط

طريقة خاصية مستقيمين متوازيين مشتركين في نقطة.

تمرين

ABC مثلث.

E نقطة من [AB] بحيث $AE = \frac{2}{3}AB$.

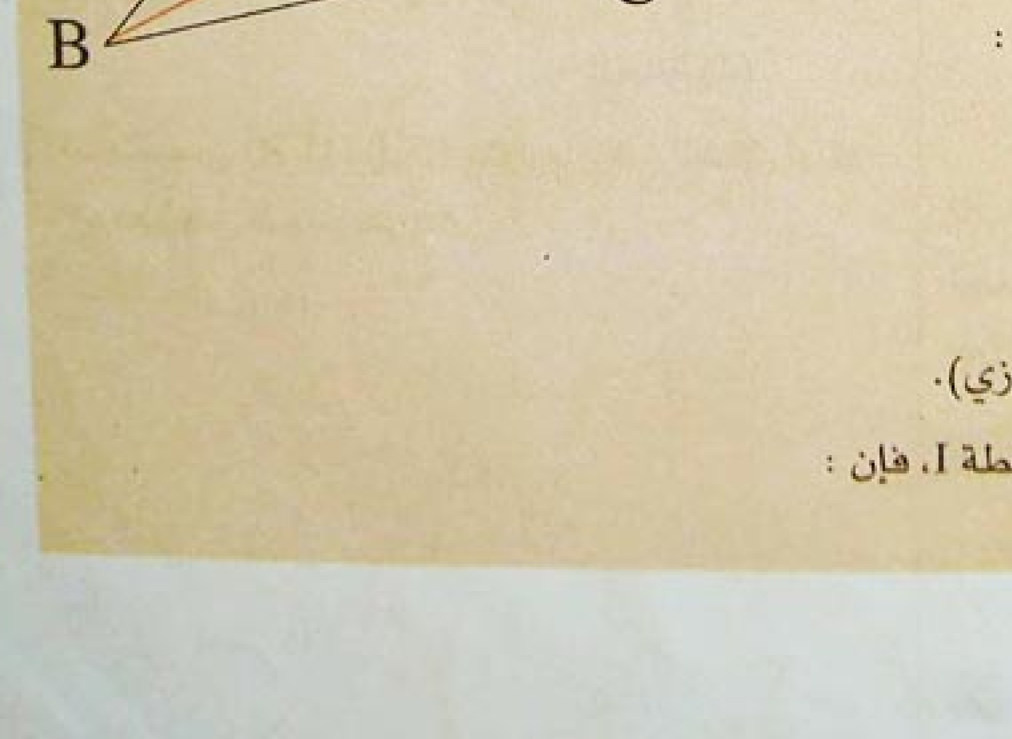
I نقطة من [AC] بحيث $IC = \frac{1}{3}AC$.

أنشىء النقطة M التي يكون من أجلها الرباعي BIMC متوازي أضلاع.

بين أن النقط E، I، M في استقامية.

الحل

طريقة تقسيم قطعة مستقيم إلى قطع لها نفس الطول



لدينا :

- ABC مثلث.

E نقطة من [AB] و I نقطة من [AC] بحيث :

$\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ و $\frac{IC}{AC} = \frac{1}{3}$

ومنه :

$\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ و $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$

إذن : $\frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AC}$

وبالتالي نستنتج، حسب النظرية العكسية لطالس :

المستقيمان (EI) و (BC) متوازيان.

- الرباعي BIMC متوازي أظلاع ومنه :

(IM) و(BC) متوازيان.

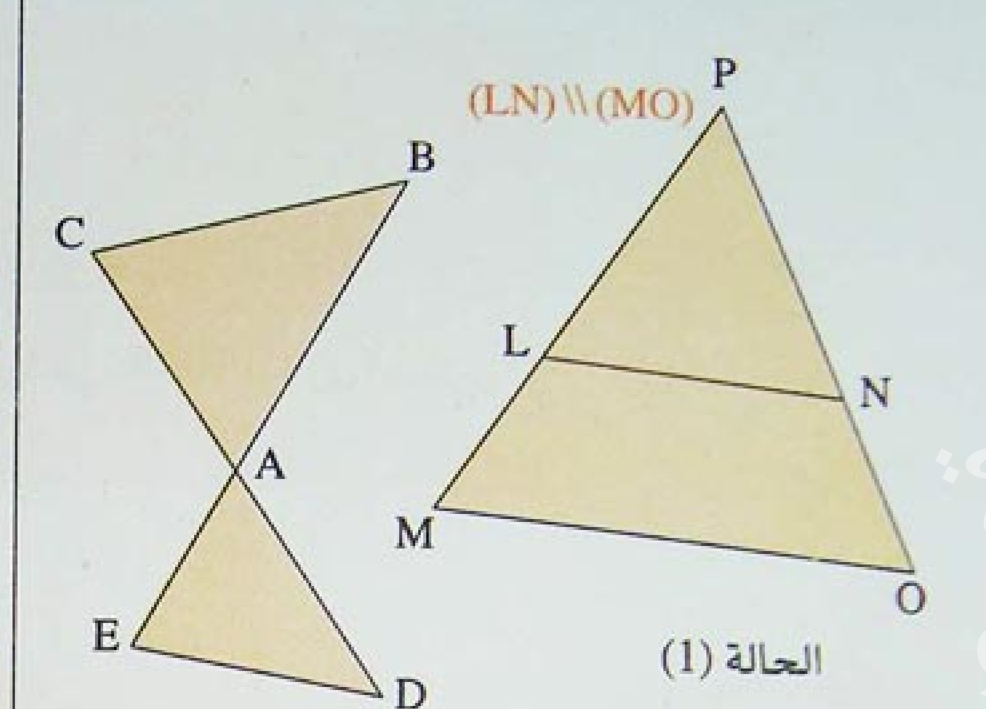
- نستنتج أن (IM) و(EI) متوازيان (خواص التوازي).

- بما أن (IM) و(EI) متوازيان ويشتركان في النقطة I، فإن : النقط E، M، I في استقامية.



نظرية طالس

1 هل يمكن تطبيق نظرية طالس في كل حالة من الحالات التالية ؟ لماذا ؟



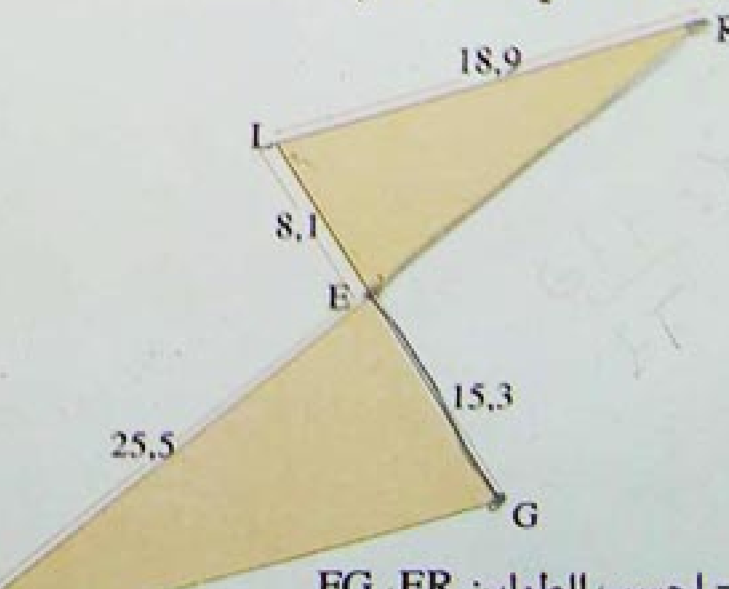
الحالة (1)

الحالة (2)

الحالة (3)

الحالة (4)

2 المستقيمان (LR) و(FG) متوازيان في الشكل أدناه (الوحدة هي السنتيمتر).



- احسب الطولين ER، FG.

نظرية طالس العكسية

3 ABC مثلث بحيث :

$AC = 6\ cm$ ، $AB = 9\ cm$.

$M \in [AB]$ و $MB = 3\ cm$.

$N \in [AC]$ و $CN = 2\ cm$.

• بين أن $(BC) // (MN)$.

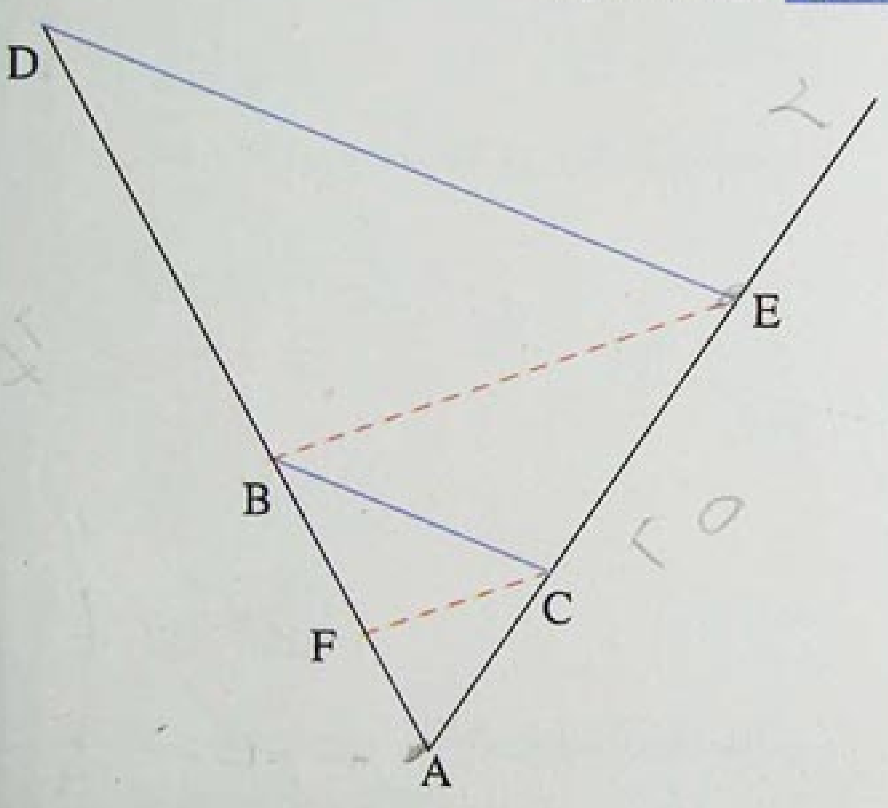
4 EFG مثلث.

$I \in [FG]$ و $FI = \frac{1}{3} FG$.

(D) يشمل I ويوازي (EG) ويقطع (FE) في S.

- احسب النسبة $\frac{ES}{EF}$.

5 إليك الشكل :



$AE= 50$ ؛ $AD= 75$ ؛ $AF= 12$ ؛ $AC= 20$ ؛ $AB= 30$

المستقيمان (CB) و(ED) متوازيان.

بين أن المستقيمين (EB) و(FC) متوازيان.

6 أنشىء قطعة [AB] طولها 13 cm.

- عين بدقة النقطة E من [AB] بحيث $\frac{AE}{AB} = \frac{5}{9}$.

(اشرح طريقة الانشاء).

7 ارسم القطعة [SR] بحيث $SR = 12\ cm$.

- عين النقطة C من (SR) بحيث $\frac{CS}{CR} = \frac{2}{5}$.

تمارين

1 ABC مثلث بحيث $AB = 7,2\ cm$ ؛ $AC = 9\ cm$.
- D نقطة من [AB] بحيث $AD = 2,4\ cm$.
- E نقطة من [AC] بحيث $AE = 3\ cm$.
– بين أن المستقيمان (BC) و (DE) متوازيان.

2 ABC مثلث قائم في B.
$AC = 9\ cm$ و $AB = 4,5\ cm$.
– E نقطة من [AB] بحيث $AE = 2\ cm$.
– المستقيم العمودي على (AB) والذي يشمل E يقطع [AC] في F.
1- بين أن المستقيمين (EF) و (BC) متوازيان.
2- احسب طول القطعة [AF].

3 ABCD مستطيل فيه $AB = 12\ cm$، $AD = 7\ cm$.
_ M نقطة من [BC] بحيث $MB = 5\ cm$.
1- احسب AM.
– المستقيم (AM) يقطع (CD) في N.
2- احسب MN، NC.

4 [EF] قطعة مستقيم طولها 10 cm.
1- ارسم نصف دائرة (C) قطرها [EF].
2- عين النقطة A من نصف الدائرة (C) بحيث $EA = 9\ cm$.
3- عين النقطة M من [EA] بحيث $EM = 8,4\ cm$.
4- أنشىء (D) الذي يشمل M ويعامد (EA) ويقطع (EF) في B.
5- بين أن $(AF) // (MB)$.
6- احسب EB.

5 أنشىء المثلث ABC بحيث أن :
$AB = 3\ cm$ و $AC = 2,4\ cm$ و $BC = 4,2\ cm$.
- E نقطة من [AB) بحيث $BE = 5,5\ cm$.
F نقطة من [AC) بحيث $CF = 4,4\ cm$.
1- بين أن المستقيمين (EF) و (BC) متوازيان.
2- احسب الطول EF.

6 ABC مثلث قائم في A و $AB = 3\ cm$ و $AC = 4\ cm$.
1- احسب BC.
2- ارسم (C) الدائرة ذات المركز B ونصف القطر [AB] تقطع [BC] في E.
3- أنشىء مستقيما يشمل E ويعامد [AC] في K.
- احسب الطولين EK، CK.

7 ABCD رباعي محدب قطراه يتقاطعان في I.
- المستقيم الذي يشمل I ويوازي (BC) يقطع [AB] في M.
- المستقيم الذي يشمل I ويوازي (CD) يقطع [AD] في N.
- بين أن (MN) يوازي (BD).

8 ABC مثلث بحيث $BC = 6\ cm$.
M منتصف [BC].
عين النقطة P من [BC] بحيث $BP = 2\ cm$.
المستقيم الذي يشمل P ويوازي (AC) يقطع (AM) في S و (AB) في R.
بين أن $\frac{RP}{AC} = \frac{1}{3}$ و $\frac{PS}{AC} = \frac{1}{3}$.
- استنتج أن P منتصف [RS].

9 ABC مثلث و O منتصف [BC]. المستقيم العمودي على (OA) ويشمل B يقطع (OA) في E.
المستقيم العمودي على (OA) ويشمل C يقطع (OA) في F.
1- بين أن O منتصف [EF].
2- بيّن نوع الرباعي ECFB.

10 ARMS رباعي قطراه [SR] و [AM] يتقاطعان في النقطة O بحيث :
$OM = 6\ cm$، $OA = 4\ cm$ ، $OR = 3,2\ cm$،
$OS = 4,8\ cm$.
1- بين أن المستقيمين (AR) و (SM) متوازيان.
2- هل المستقيمان (AS) و(RM) متوازيان ؟ (علل ذلك).

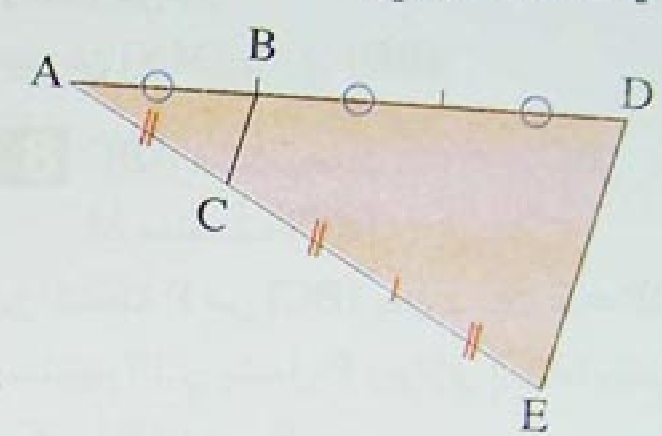
11 AMSI مستطيل بحيث :
$AM = 12\ cm$ و $AI = 9\ cm$.
1) عين النقطتين E و K بحيث :
$E \in [AM]$ و $AE = 2\ cm$.
$K \in [MS]$ و $SK = 1,5\ cm$.
2) بين أن $AS = 15\ cm$.
3) بين أن $(AS) // (EK)$.
4) احسب EK.



12 مساحة المثلث ADE هي $54\ cm^2$.

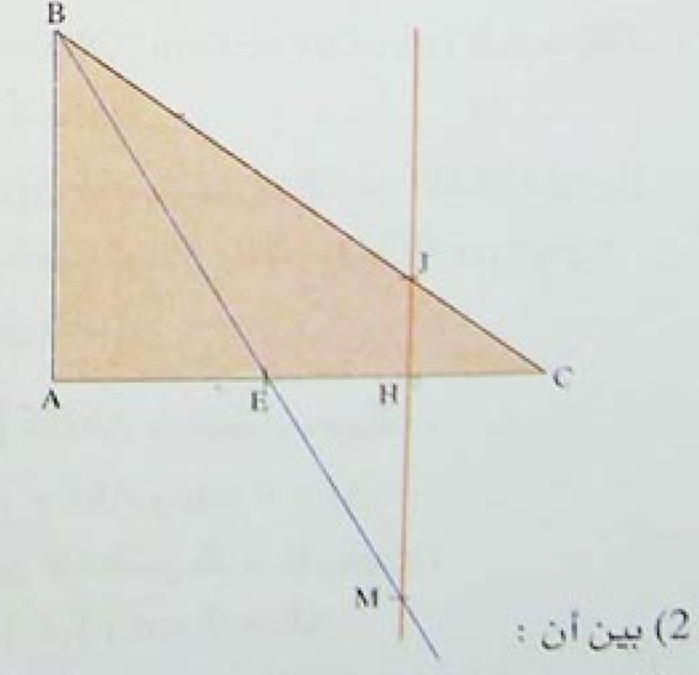
- B نقطة من [AD] بحيث $AB = \frac{1}{3} AD$.

- C نقطة من [AE] بحيث $AC = \frac{1}{3} AE$. (كما هو مبين في الشكل الموالي)



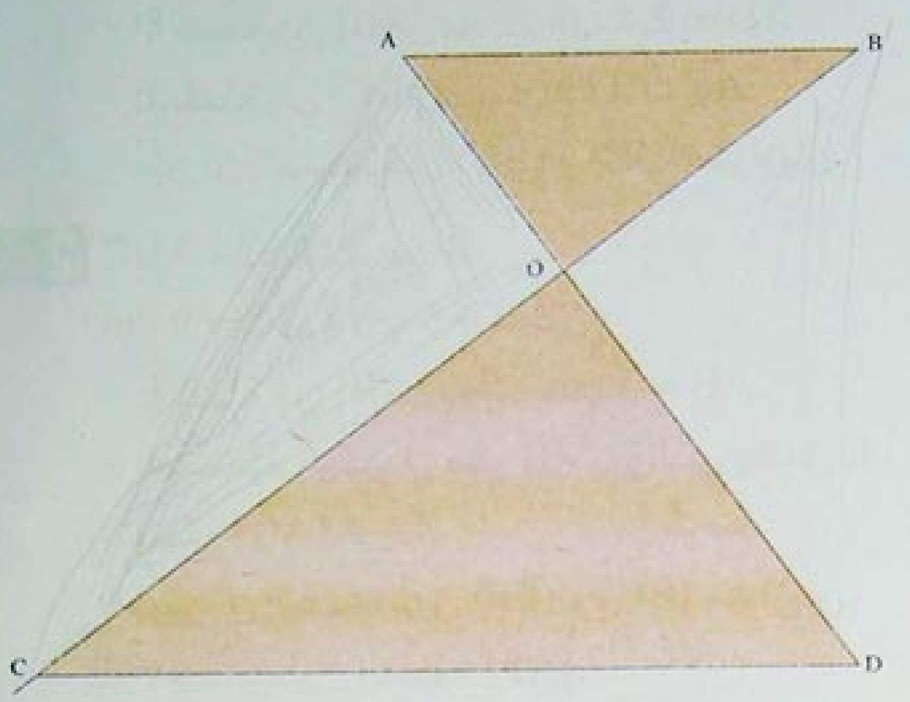
1) بين أن المستقيمين (BC) و (DE) متوازيان.
- المثلث ABC هو تصغير لمثلث ADE.
2) ما هو سلم التصغير المستعمل ؟
3) احسب مساحة المثلث ABC.

13 ABC مثلث بحيث $AB = 5$، $AC = 7$،
$BC = \sqrt{74}$ (وحدة الطول هي السنتيمتر).
1) ما نوع المثلث ABC.
- E نقطة من [AC] بحيث $AE = 3\ cm$.
- محور القطعة [EC] يقطع [EC] في H و [BC] في J و [BE] في M (كما هو مبين في الشكل).



2) بين أن :
- المستقيمين (JH) و(AB) متوازيان.
- طول [HC] يساوي 2 cm.
3) احسب طول القطعة [JH] (أعط القيمة المضبوطة).
4) احسب HM.

14 إليك الشكل :

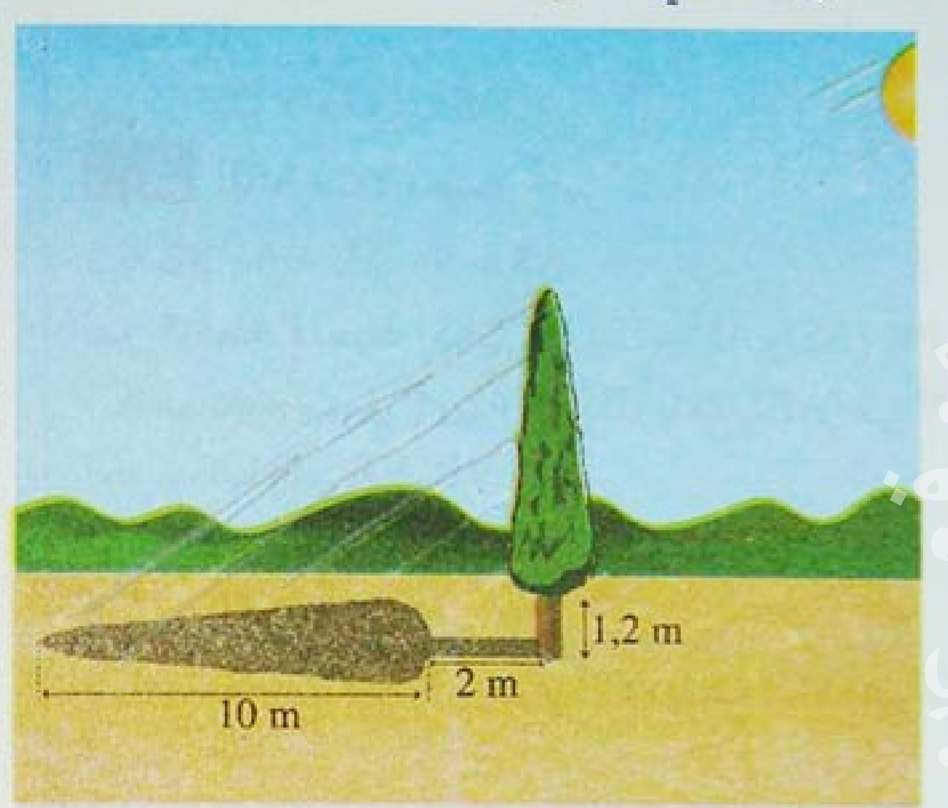


$CD = 15\ dm$، $OC = 12\ dm$، $OD = 9\ dm$، $OA = 5\ dm$.
1) احسب الطولين OB، AB علما أن المستقيمين (AB) و(CD) متوازيان.
(أعط الناتج على شكل كسر).
2) بين أن المستقيمين (BC) و (AD) متعامدان.
3) احسب $\cos \widehat{OCD}$.
4) استنتج القيمة المدورة للزاوية $\widehat{OCD}$ إلى درجة بالنقصان.

15 إليك الشكل :
$EN = 9\ cm$ ؛ $\widehat{ENR} = 60°$ ؛ $RN = 10,6\ cm$.
انقل الشكل على كراسك بدقة.
1) بين أن $AN = 4,5\ cm$.
2) احسب EA
(أعط مدورها إلى $10^{-1}\ cm$ بالنقصان).
3) احسب AR.
4) احسب TA
(أعط مدورها إلى $10^{-1} cm$ بالنقصان).
5) احسب $\widehat{ERA}$ (أعط مدورها إلى 1 درجة).

16 تمعّن في الشكل الآتي :

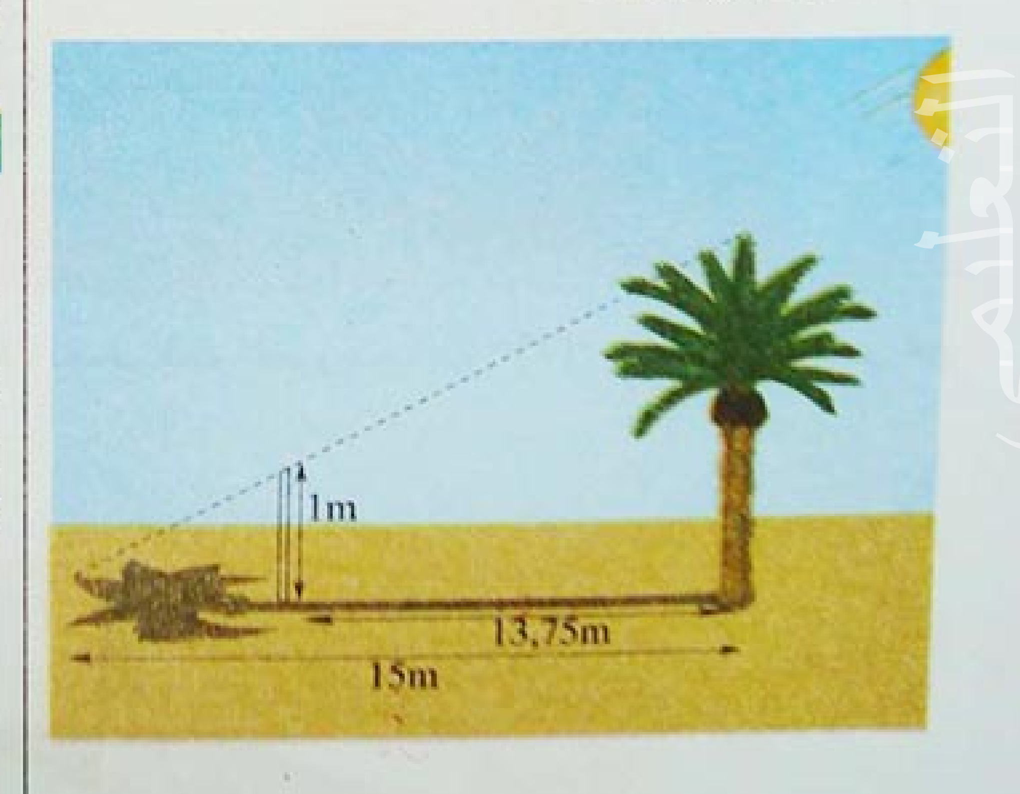
- اوجد طول شجرة السّرو باستعمال المعطيات الموضحة في الشكل :



17 يريد حامد حساب طول نخلة وذلك بوضع عصا طولها 1 m شاقوليا في ظل النخلة ومماسة لضوء الشمس المار من أعلى النخلة كما هو موضح في الشكل :

1) ما هو طول النخلة ؟

2) في رأيك، لماذا استعمل حامد هذه الطريقة لحساب طول النخلة ؟



18 ABC مثلث بحيث :

.AB = 4 cm ؛ AC = 5 cm ؛ BC = 6 cm

- N نقطة من [AB] بحيث BN = 3 cm.

- المستقيم الذي يشمل N ويوازي (AC) يقطع (BC) في D.

1) احسب الطولين BD، DN.

– M منتصف [AC].

– H نقطة تقاطع المستقيمين (BM) و(ND).

2) احسب HD.

19 STA مثلث بحيث AT = 12، ST = 9، AS = 6 (وحدة الطول هي السنتيمتر).

- R نقطة من [AS] بحيث SR = 2.

- المستقيم الذي يشمل R ويوازي (AT) يقطع (ST) في D.

1) احسب الأطوال SD، DT، RD.

- المستقيم الذي يشمل R ويوازي (ST) يقطع (AT) في E.

2) احسب الطول AE.

- K منتصف [AT].

3) برهن أن (SK) // (ED).

20 ABC مثلث بحيث :

- (D) مستقيم يشمل النقطة C ويوازي (AB).

- منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ يقطع (BC) في I والمستقيم (D) في E.

1) بيّن أن المثلث ACE متساوي الساقين.

2) بيّن أن $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$

1 ROI مثلث بحيث :

$RO = 8\ cm$ ، $RI = 7\ cm$ ، $OI = 3\ cm$.

M نقطة من [RO].

أنشىء الموازي للمستقيم (OI) من النقطة M الذي يقطع (RI) في N. نضع $x = RM$ مع $0 \leq x \leq 8$.

1) عبّر عن الطولين MN و RN بدلالة x.

2) بين أن المحيط P_1 للمثلث RMN يساوي $\frac{9}{4}x$.

3) بين أن المحيط P_2 للشبه المنحرف MOIN يساوي $18 - \frac{3}{2}x$.

4) اوجد قيمة x حتى يكون $P_2 = P_1$.

2 $x\hat{o}y$ زاوية حادة.

A ، B نقطتان من [ox].

(D)، (D') مستقيمان متوازيان يشملان النقطتين A و B على الترتيب ويقطعان [oy] في النقطتين N و M على الترتيب.

(C) مستقيم يشمل M ويوازي (BN) ويقطع [ox] في النقطة E.

بين أن $OB^2 = OA \times OE$.

3 ASE مثلث بحيث :

$AS = 8$ ؛ $AE = 6$ ؛ $SE = 5$.

عين النقطة P بحيث $P \in [AS)$ و $AP = 12$ و $P \notin [AS]$.

(C) مستقيم يشمل P ويوازي (ES) يقطع (AE) في V.

احسب الطولين VE ، VP.

U نقطة من [VP] بحيث $VU = 5$.

بين أن $(SU) // (AV)$.

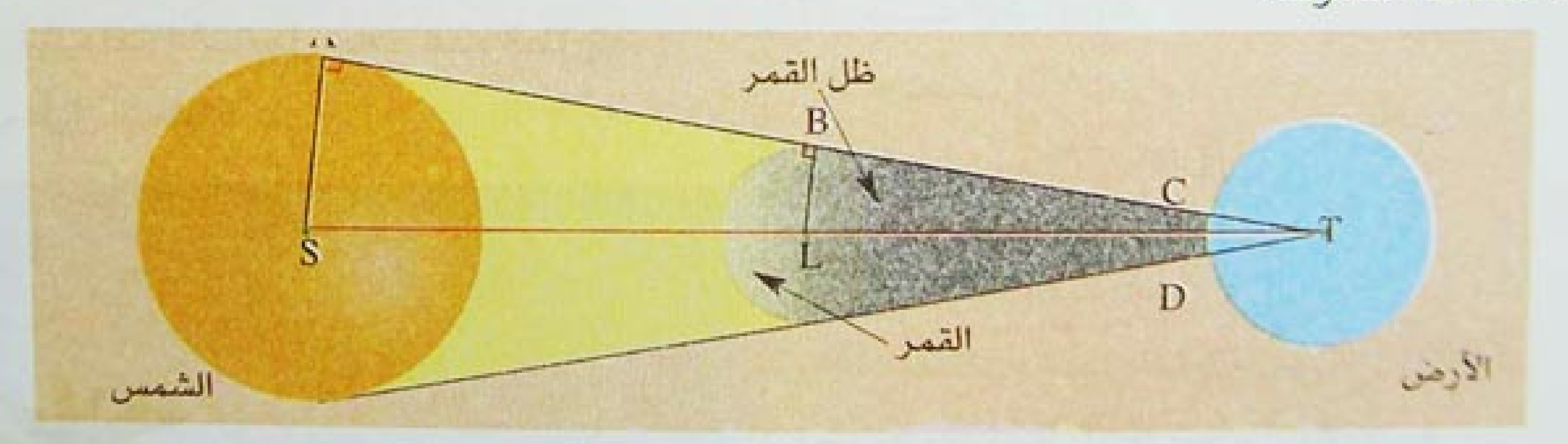
(C') مستقيم يشمل V ويوازي (SP) يقطع (SU) في T.

احسب TU.

4 الكسوف هو ظاهرة تحجب فيها الشمس بمرور القمر بين الأرض والشمس، وهي ظاهرة تحدث كل 6 أشهر، إلاّ أنها تلاحظ في أماكن معينة من الكرة الأرضية.

في 03 أكتوبر 2005 حدث كسوف كلي بالجزائر (كسوف حلقي).

إليك مخطط الكسوف.



إذا علمت أنّ : نصف قطر الشمس هو 695000 Km ، نصف قطر القمر هو 1736 Km، بعد مركز الشمس عن مركز الأرض هو 150000000 Km.

1) ما هو بعد مركز القمر عن مركز الأرض ؟

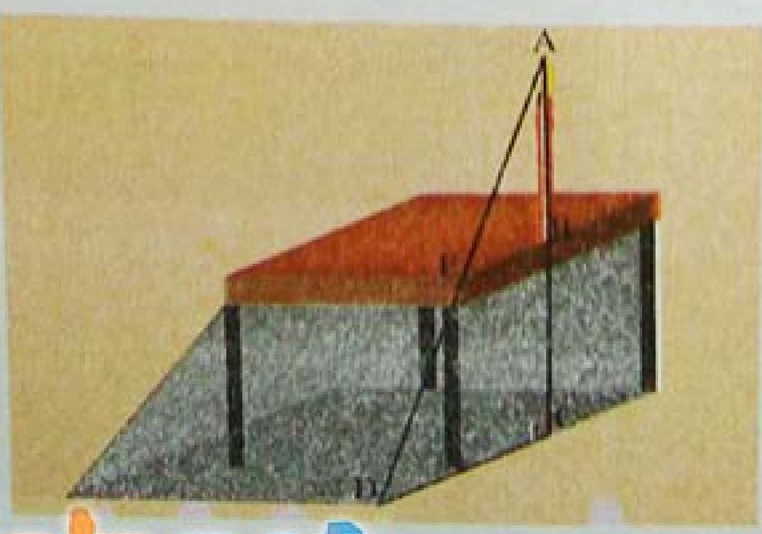
5 نضع شمعة فوق طاولة فيشكل ظل كما هو موضح في الشكل، حيث :

$AB = 15\ cm$

$BE = 20\ cm$

$DC = 1\ m$.

ما هو إرتفاع الطاولة BC عن الأرض ؟



من التاريخ

الملك المهندس المؤتمن بن هود (توفي عام 477 هـ/ 1085 م)

حياته : المؤتمن بن هود هو أبو عامر يوسف بن أحمد بن المنذر. وكان المؤتمن شابا متميزا بسعة اطلاعه في شتى أنواع العلوم. ثم صار ثالث ملوك عائلة بن هود التي حكمت ناحية سرقسطة بالأندلس ما بين 430هـ/1039م و 540هـ/1146م. ويعتبر المؤتمن - الذي حكم تلك المنطقة في الفترة الممتدة من 433هـ/1081م إلى 477هـ/1085م - من الملوك القلائل الذين انشغلوا بالرياضيات وأسهموا في تطويرها. ورغم ذلك لم يرد كثيرا ذكر المؤتمن على لسان المؤرخين حيث اكتفوا بإشارات إلى أعماله العلمية.

وفي هذا السياق يستشف من أقوال المؤرخين القدماء أن بعض العلوم، مثل الطب والفلسفة والرياضيات لم تكن ذات شأن كبير في الأندلس حتى منتصف القرن الثالث هجري/التاسع ميلادي. ولم يبرز وينتشر الاهتمام بتلك العلوم إلا بعد أن جلبت كتب ومؤلفات علمية مشرقية.

كتاب الاستكمال : لقد اشتهر المؤتمن بكتاب عنوانه "الاستكمال" ونوّه به العديد من العلماء المغاربيين. وكان هذا الكتاب متداولا لدى العلماء خلال القرون الوسطى. فابن منعم العبدري (المتوفى عام 626هـ/ 1228م) يؤكد في كتابه "فقه الحساب" أن كتاب "الاستكمال" ذاع صيته واستخدم في الغرب الإسلامي. وكان ابن منعم ذاته قد استخدم قضايا واردة في هذا الكتاب. كما أشار ابن البنّاء المراكشي (654هـ/1256م-721هـ/1321م) إلى أن "الاستكمال" كان يدرّس آنذاك بالمغرب، مع العلم أن ابن البنّاء استند إليه في بعض مؤلفاته كمرجع هام.

وتحدث ابن خلدون عن المؤتمن ومؤلفات في كتاب "العبر" فقال " وهلك أحمد المقتدر سنة أربع وسبعين لتسع وثلاثين سنة من ملكه، فولى بعده ابنه يوسف المؤتمن. وكان قائما على العلوم الرياضية، وله فيها تآليف مثل "الاستكمال" و"المناظر"، ومات سنة ثمان وسبعين وهي السنة التي استولى فيها النصارى على طليطلة من يد القادر بن ذي النون".

إسهامه : يتناول كتاب الاستكمال العديد من المواضيع : نظرية الأعداد، ونظرية المقادير الصماء، وهندسة الأشكال المستوية القابلة للإنشاء، وهندسة الأشكال الكروية، وهندسة المخروطات. وقد أبدع المؤتمن في كتابه حيث توصل إلى حلّ مسائل قديمة باستخدام طرق جديدة أبسط من البراهين السابقة، فاستعمل مثلا في حلّ نوع من أنواع المعادلات الجبرية طريقة هندسية مبنية على دراسة ما يسمى بالقطوع المخروطية (وهي القطع الزائد، الناقص، المكافئ).

والملاحظ أن استخدام تقاطع الدوائر بالقطوع المخروطية في حلّ مثل تلك المعادلات لم يرد ذكره قبل المؤتمن. ومن أعمال المؤتمن الأصيلة نجد أيضا دراسته للنتيجة الهندسية المعروفة لدى الرياضيين المعاصرين وتلاميذ الثانويات بـ"نظرية سيفا"، وجيوفاني سيفا هو رياضي إيطالي ظهرت نظريته لأول مرة عام 1088هـ/ 1678م. ويتضمّن كتاب "الاستكمال" برهانا دقيقا لها قدّمه المؤتمن قبل ستة قرون ونصف من وفاة سيفا. ولذا يحقّ لنا - كما قال أحد المؤرخين - أن نسمّي هذه النظرية بـ"نظرية المؤتمن" بدل "نظرية سيفا".

ومهما تكن عبقرية المؤتمن، فلا بد من الإشارة إلى أنه لم يكن منعزلا في الحقل العلمي حيث درست في ذلك الوقت المنحنيات المنبثقة عن تقاطع الكرات والمخروطات والاسطوانات ومجسمات أخرى. لكنه تبيّن فيما بعد أن الموضوع الذي وجد فيه هذا الملك المهندس صعوبة كان يتطلب ظهور مفاهيم رياضية جديدة لم تكن متوفرة آنذاك، ولم يتوصّل إليها الرياضيون الغربيون إلا بعد وفاة المؤتمن بعدة قرون !



الرياضيات تتقدم

من بيبرباخ إلى ريمان

13 = 385 : المخمّنة في الرياضيات هي نتيجة ("نظرية") يعلن عنها أحد الرياضيين الكبار دون التمكّن من صحتها لعجز منه. ومن ثمّ يهتمّ بها الرياضيون الآخرون محاولين البرهان عليها أو تفنيدها. والرياضيات تزخر بالمخمنات، منها ما تمّ البت فيها، ومنها ما ينتظر. لقد ذاع صيت الرياضي الأمريكي لويس دي برنجس عام 1984 عندما برهن على صحة مُخمّنة الألماني لودويغ بيبرباخ (1886–1982) المطروحة منذ 1916. والآن تجاوز دي برنجس سن السبعين ورغم ذلك، لازال يسعى سعيا حثيثا لحل المسألة المعلقة منذ حوالي قرن ونصف، وهي تلك المسماة فرضية (الألماني جورج) ريمان (1826–1866).

من المعلوم أن ما يرهق الرياضيين كثيرا هو قراءة أبحاث زملائهم، والإطلاع عليها من أجل تقييمها والبت في صحة نتائجها. وكان دي برنجس قد قدّم مخطوطا يقع في 385 صفحة مرقونة كبرهان على مخمّنة بيبرباخ! ولذا كان طول البرهان من العوائق التي حالت دون تمكّن المختصين من مراقبة صحة ما جاء فيه. ولم يصدّق هؤلاء أنهم أمام برهان صحيح سيدخل سجل التاريخ من بابه الواسع.

لكن دي برنجس العنيد كان محظوظا عندما قام بزيارة علمية لجامعة لنينرغاد (في روسيا حاليا) قدّم خلالها عرضا أمام جمع من الرياضيين، فمكنتهم المناقشات حول موضوع البرهان من تخفيض عدد صفحاته من 385 صفحة إلى ... 13 صفحة لا أكثر! وعندما نشرت هذه الصفحات الثلاث عشرة اطلع عليها جميع المعنيين بمخمّنة بيبرباخ ... ونال، بعد ذلك، صاحبها شهرة طالما حلم بها عدد كبير من الرياضيين!

مخمّنة ريمان : ابتدع ريمان هندسة غير مألوفة (غير إقليدية) عرفت باسمه؛ وهي تعتمد على المسلّمة القائلة إن مجموع زوايا المثلث لا يساوي 180 درجة بل هو. أزيد من ذلك! وتقول هذه الهندسة أنه لا يمكن، انطلاقا من نقطة معيّنة، تمرير أيّ مستقيم يوازي مستقيما معطى! لم يعرف ريمان بهذه الفكرة الجديدة فحسب، بل اشتهر أيضا بمخمّنته الشهيرة المعروفة بـ "فرضية ريمان". فهي مسألة لا زالت مطروحة إلى اليوم، ولم يتمكن كبار الرياضيين من تأكيد تخمين ريمان ولا تفنيده.

صوفية يوسف : الطريف أن أخبار 1997 طالعتنا بأن الطفلة الموهوبة صوفية يوسف (التي لم يكن عمرها يتجاوز الثانية عشرة) قد قبلت كطالبة بجامعة أكسفورد البريطانية نظرا لمواهبها الخارقة. وسجّلت صوفية في قسم الرياضيات على الرغم من أنها لم تدرس في المتوسط ولا في الثانوي. ولما سئلت هذه الطفلة عن نوع المسائل التي تريد حلها، أجابت: "فرضية ريمان"!

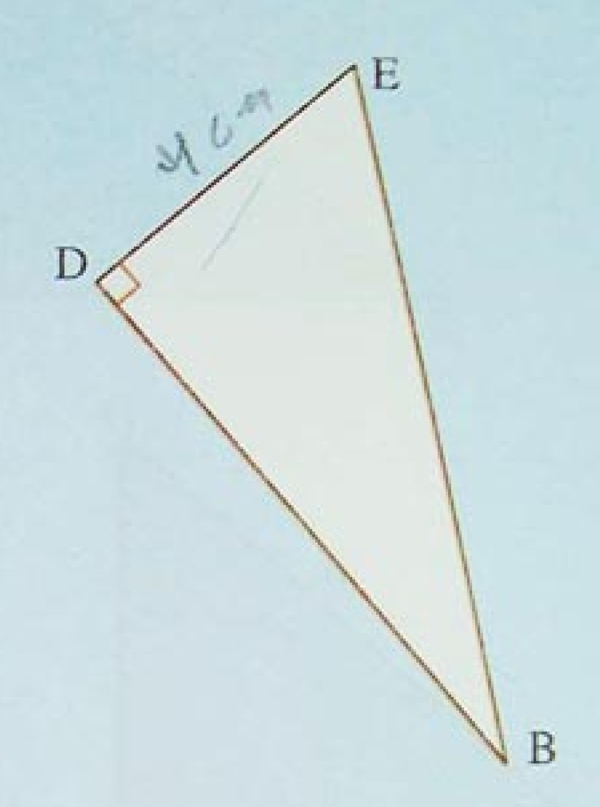
الصبر جميل : كانت فرضية ريمان من المسائل التي اهتم بها دي برنجس منذ الخمسينيات من القرن العشرين. ويشير بهذا الصدد إلى أن البرهان على مخمنة بيبرباخ كان تمهيدا للمضي قدما في البحث عن حل هذه المسألة. ويلاحظ دي برنجس بهذا الشأن أن المطلوب من الرياضي التحلي بالصبر للمواظبة على القيام بحسابات واستدلالات رياضية تتمادى في إعطاء نتائج سلبية . إلى أن نصل إلى النتيجة المبتغاة. ولذا لم يتوقف دي برنجس – رغم تقدم سنه – عن البحث في فرضية ريمان.



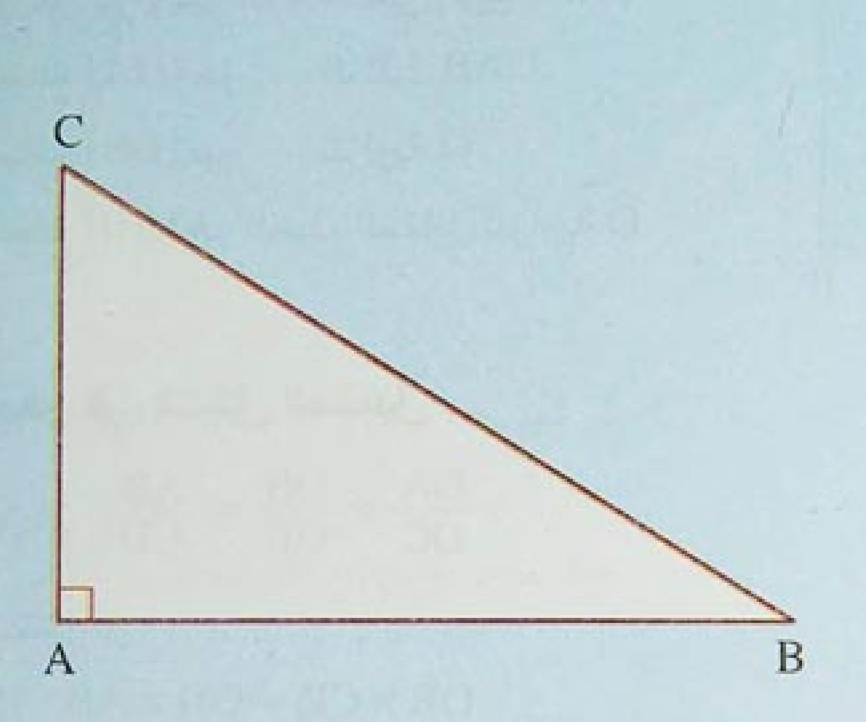
10 النسب المثلثية في مثلث قائم

تمهيد

1 اعتمادا على الشكل. اكتب النسبة المثلثية التي تعبر عن $\cos \widehat{B}$ في كل من الحالتين.



$\cos \widehat{B} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$



$\cos \widehat{B} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

2 أعط مدورًا إلى 10^{-2} بالنقصان لـ :

$\cos 80°$ ؛ $\cos 56°$ ؛ $\cos 12°$.

3 أعط تدويرًا إلى الوحدة من الدرجة للعدد x في كل من الحالتين :

$\cos x = 0{,}561$ ؛ $\cos x = 0{,}985$.

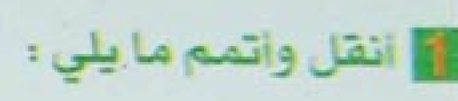
4 ABC مثلث قائم في A بحيث $AC = 3cm$ ، $BC = 4cm$.

– احسب قيس الزاوية $\widehat{C}$ (أعط مدورًا إلى الوحدة من الدرجة بالنقصان).

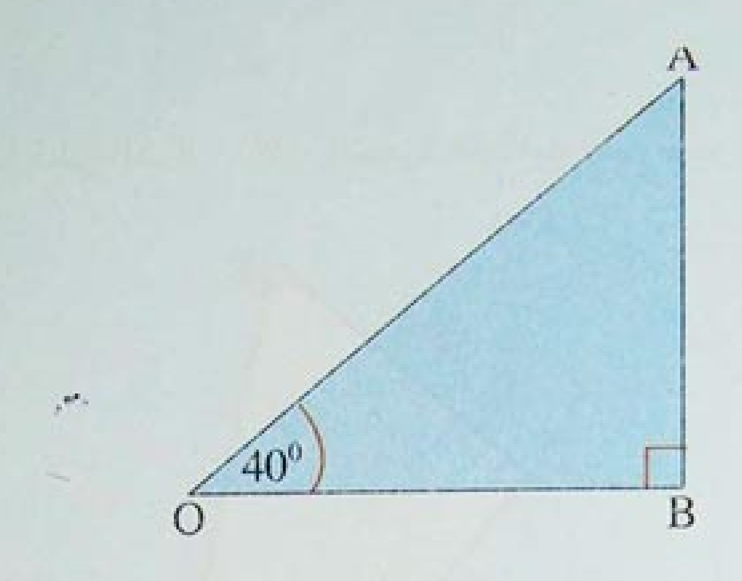
5 EDF مثلث قائم في E بحيث : $DE = 4cm$ ، $\widehat{EDF} = 60°$.

– احسب كلا من DF و EF.

1 تعريف جيب وظل زاوية حادّة في مثلث قائم



1 انقل وأتمم ما يلي :



المثلث OAB ..... في B.

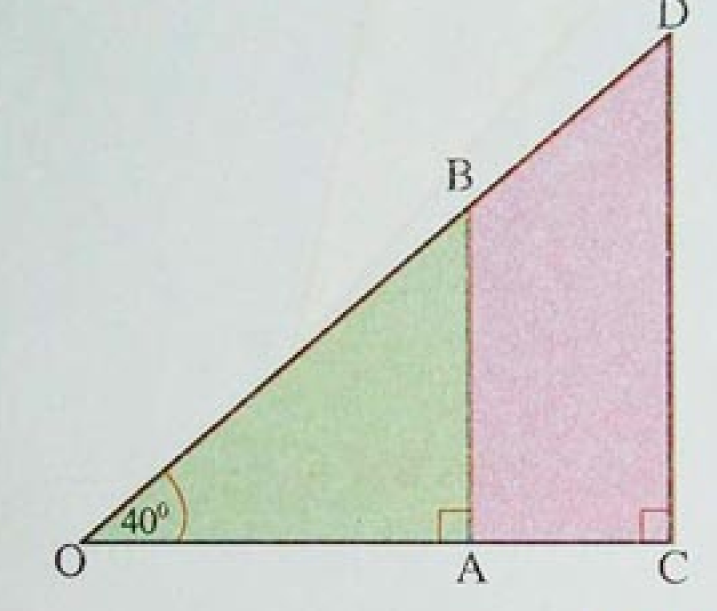
كل من الزاويتين $\widehat{O}$ و $\widehat{A}$ هي زاوية ..... .

الضلع [OA] هو .... المثلث OAB.

الضلع [OB] هو .... للزاوية $\widehat{O}$.

الضلع [AB] هو الضلع المقابل للزاوية $\widehat{O}$.

2 تمعن في الشكل المقابل :



بين أن $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$.

استنتج أن :

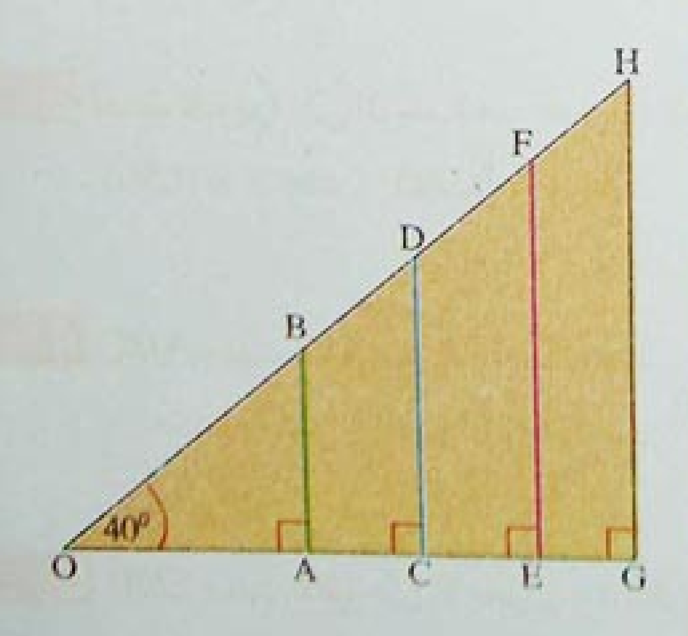
$OB \times CD = OD \times AB$ (1)

$OC \times AB = OA \times CD$ (2)

هل المساواتان $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}$ و $\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC}$ صحيحتان ؟

3 انقل، ثم املأ الجدول الآتي، بعد أن تعين الأطوال المطلوبة :

أعط لهذه القياسات القيم التقريبية إلى 10^{-1}.



المثلث	OAB	OCD	OEF	OGH
طول الضلع المقابل للزاوية 40°				
طول الضلع المجاور للزاوية 40°				
طول الوتر				
$\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 40°}{\text{طول الوتر}}$				
$\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 40°}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 40°}$				

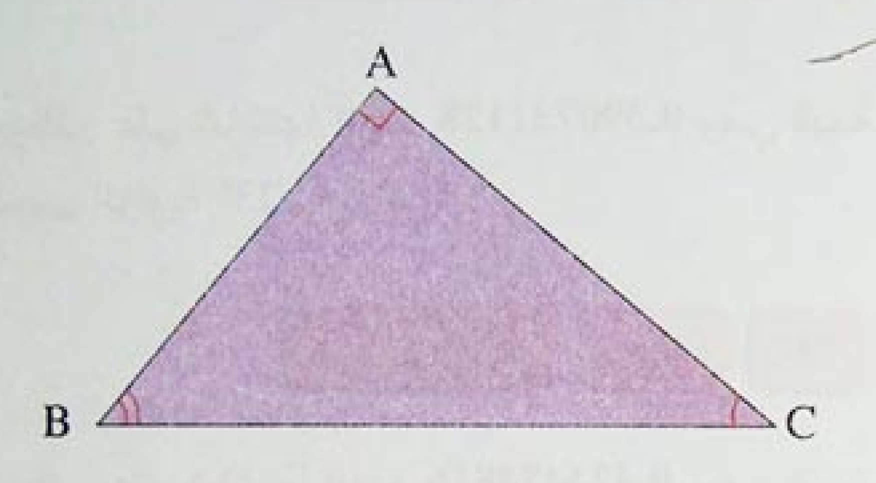
– ماذا تلاحظ ؟

النسبة $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 40°}{\text{طول الوتر}}$ ثابتة. تسمى جيب الزاوية $40°$.

نرمز لها بالرمز : $\sin 40°$. ما هي قيمة $\sin 40°$ ؟

النسبة $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 40°}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 40°}$ ثابتة. تسمى ظل الزاوية $40°$.

نرمز لها بالرمز $\tan 40°$. ما هي قيمة $\tan 40°$ ؟



4 انقل واتمم :

في المثلث القائم ABC:

$\widehat{\tan} B = \frac{.....}{.....}$ ؛ $\widehat{\sin} B = \frac{.....}{.....}$.

$\widehat{\tan} C = \frac{.....}{.....}$ ؛ $\widehat{\sin} C = \frac{.....}{.....}$.

2

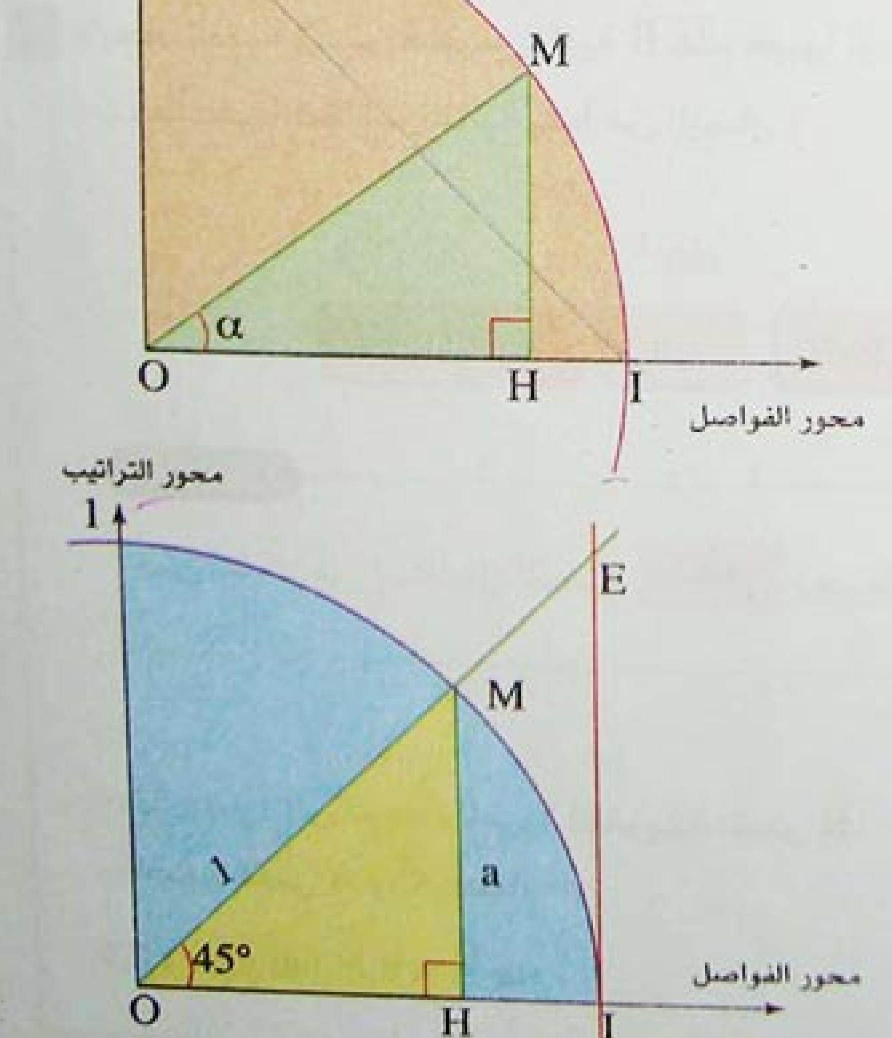
1 تمعن في الشكل المقابل :

يتكون هذا الشكل من معلم متعامد ومتجانس، وربع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 و M نقطة من ربع الدائرة.

1- بين أن في المثلث OMH، العدد $\sin \alpha$ يساوي ترتيب النقطة M.

2- ارسم مماسا للدائرة في النقطة I ويقطع (OM) في النقطة E.

3- بين أن في المثلث OIE ، $\tan \alpha = IE$.



2 احسب قيمة a، ثم استنتج ترتيب M.

– ما هي قيمة $\sin 45°$ ؟

– احسب قيمة IE، ثم استنتج قيمة $\tan 45°$.

3 استعمال الحاسبة

1 يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لايجاد قيمة مقربة لجيب أو ظل زاوية. مثلا : $\sin 23°$ و $\tan 23°$.

اضغط أولا على اللمسة DRG حتى يظهر الرمز DEG في أعلى الشاشة، ثم اضغط على اللمسات التالية بدءاً من اليسار :





ويظهر على شاشتها العدد **0.390731128** وهي قيمة مقربة لجيب الزاوية $23°$.

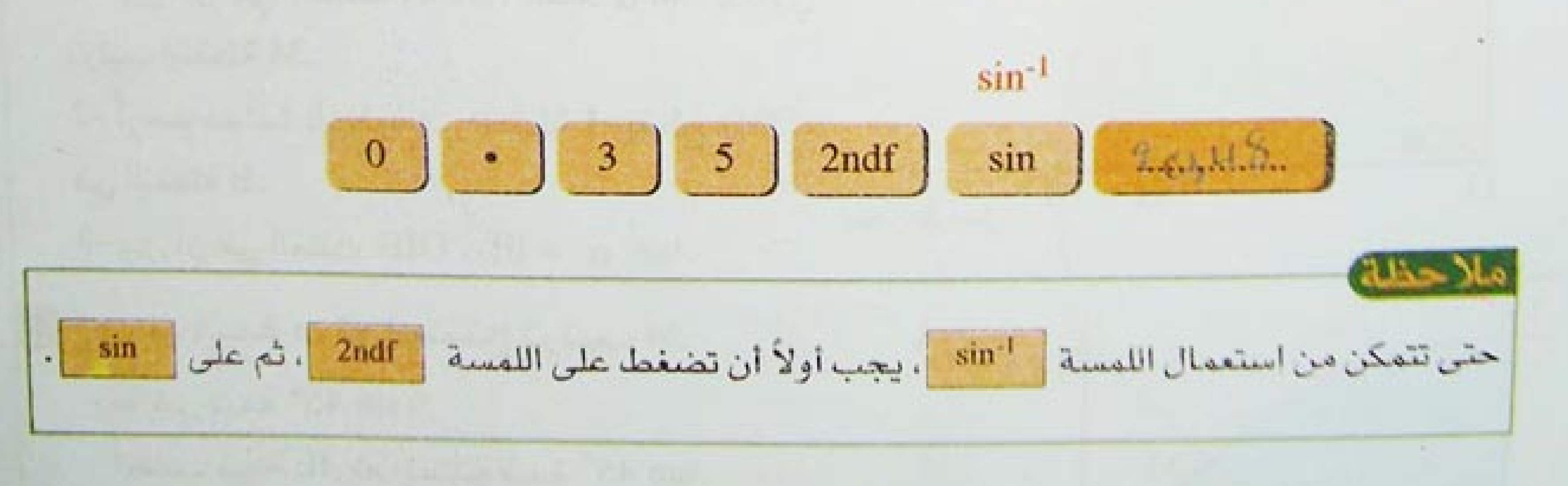
2 | 3 | tan

ويظهر على شاشتها العدد **0.424474816**، وهي قيمة مقربة لظل الزاوية $23°$.

- باستعمال الآلة الحاسبة، أعط القيمة المقربة إلى 0,01 لكل من :
$\tan 46°$ ، $\tan 80°$ ، $\tan 51°$ ، $\sin 46°$ ، $\sin 80°$ ، $\sin 51°$.

2 لايجاد القيمة المقربة لقيس زاوية $\widehat{B}$ علّم جيبها أو ظلها. مثلا : $\sin \widehat{B} = 0,35$.

اضغط على اللمسات التالية بدءا من اليسار :



ملاحظة

حتى تتمكن من استعمال اللمسة $\sin^{-1}$ ، يجب أولاً أن تضغط على اللمسة 2ndf ، ثم على sin .

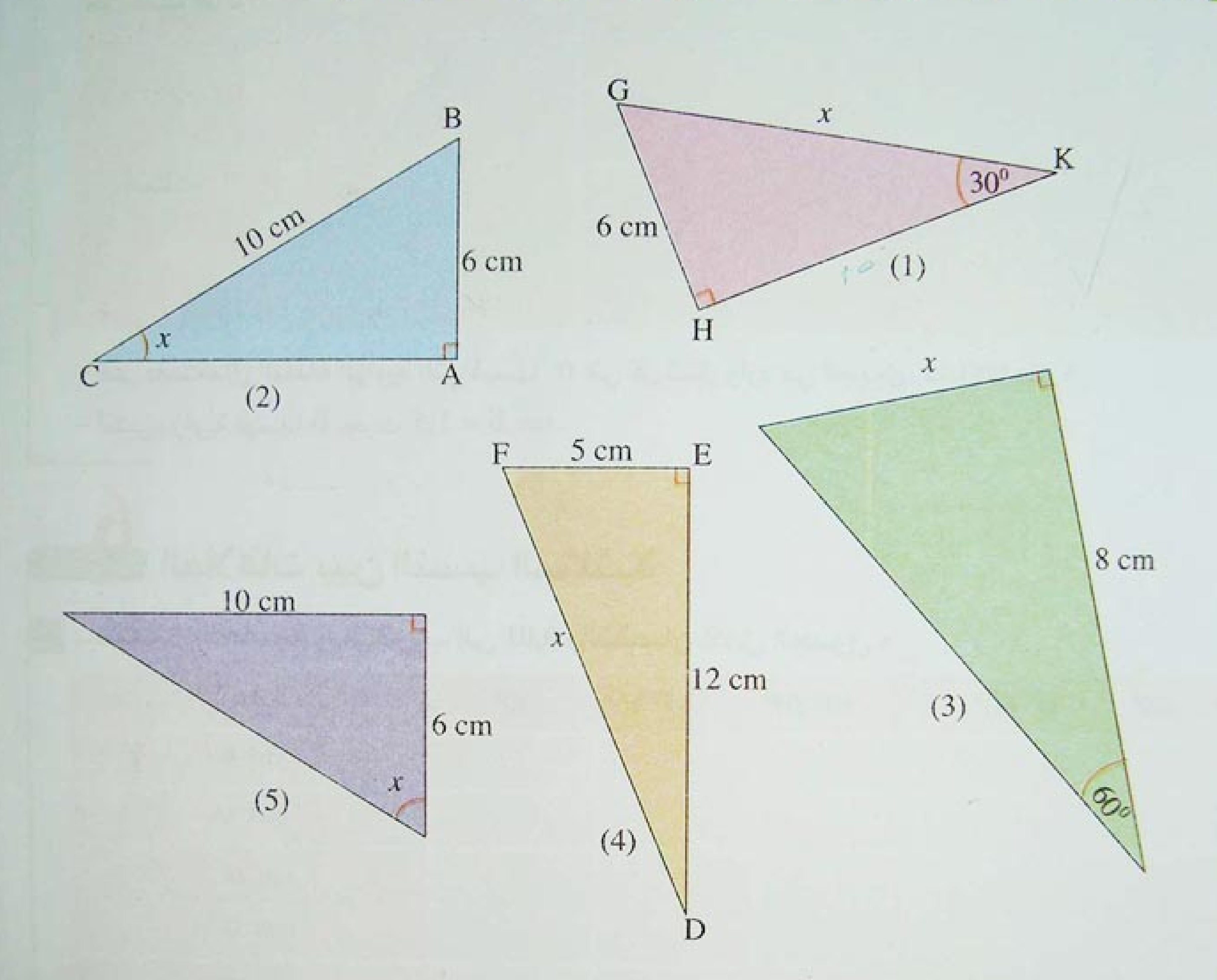
أعط مدوراً إلى الوحدة للقيمة التقريبية لقيس $\widehat{B}$.

- احسب قيس $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ بحيث :

$\sin \widehat{A} = 0,5$. $\tan \widehat{C} = 1,73$.

4 حساب زوايا وأطوال

1 احسب العدد x (بالتدوير إلى الوحدة) في كل شكل من الأشكال الآتية :



5 إنشاء زاوية بمعرفة إحدى نسبها المثلثية هندسيا

1 α قيس زاوية حيث $\sin\ \alpha = 0,6$.

لاحظ أن : $\sin\ \alpha = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

– احسب α باستعمال الحاسبة.

– أنشىء مثلثا قائما وتره $5a$ وطول أحد ضلعي الزاوية القائمة هو $3a$ حيث (a طول معلوم).

a	1	1,5	2
طول الوتر			
طول الضلع القائم			
المثلث			

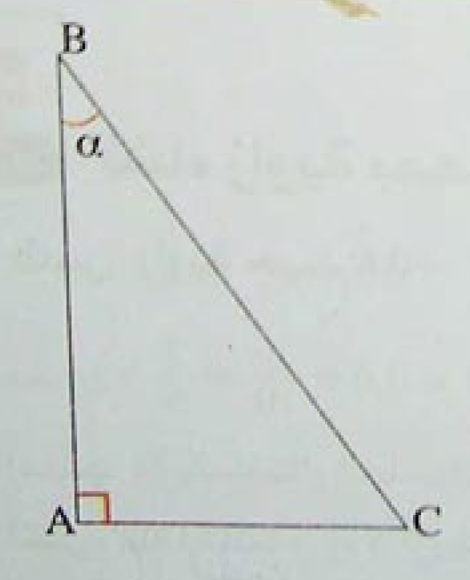
- قس باستعمال المنقلة الزاوية التي قيسها α في كل شكل وارد في الجدول. ماذا تلاحظ ؟
- أنشىء زاوية قيسها β بحيث $\tan \beta = 1,5$.

6 العلاقات بين النسب المثلثية

1 باستعمال الحاسبة وبالتقريب إلى 0,01 بالنقصان أكمل الجدول :

α	30°	45° 45°	50° 30°	α 60°	68°
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$					
$\tan \alpha$					
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$					

ماذا تلاحظ ؟



2 لاحظ الشكل المقابل واتمم ما يلي :

$\sin \alpha = \frac{.....}{.....}$ ، $\cos \alpha = \frac{.....}{.....}$ ، $\tan \alpha = \frac{.....}{.....}$.

بين أن $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

3 ABC مثلث قائم في B بحيث :

$\sin \widehat{A} = \frac{2}{3}$. احسب $\cos \widehat{A}$ ، $\tan \widehat{A}$.

1 جيب زاوية حادّة

تعريف

في مثلث قائم،
جيب زاوية حادّة يساوي النسبة $\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$.

A, B, C

الضلع المقابل لـ $\widehat{C}$

الضلع المجاور لـ $\widehat{C}$

الوتر

$\sin \widehat{C} = \frac{AB}{CB}$.

$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{CB}$.

انتبه

جيب زاوية حادة محصور بين العددين 0 و 1 لأن طول الوتر أكبر من طولي كل من الضلعين الآخرين.

2 ظل زاوية حادة

تعريف

في مثلث قائم،
ظل زاوية حادّة يساوي النسبة $\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور لها}}$.

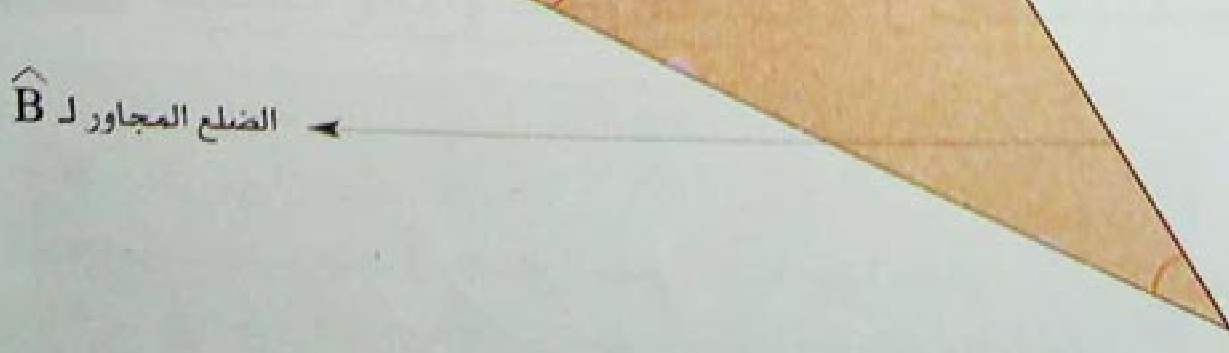
A, C

الضلع المقابل لـ $\widehat{B}$

$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$.

$\tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC}$.

الضلع المجاور لـ $\widehat{B}$



3 استعمال الحاسبة

يمكن ايجاد القيمة المضبوطة أو القيم التقريبية للعدد $\sin \widehat{B}$ باستعمال اللمسة **sin** وللعدد $\tan \widehat{B}$ باستعمال اللمسة **tan** .

ولإيجاد قيس $\widehat{B}$، نستعمل اللمسة **$\sin^{-1}$** ، إذا علّم العدد $\sin \widehat{B}$ واللمسة **$\tan^{-1}$** إذا علّم العدد $\tan \widehat{B}$.

قبل استعمال كل من اللمسات يجب أولا، الضغط على اللمسة **DRG** .

قبل استعمال اللمستين **$\sin^{-1}$** و **$\tan^{-1}$** يجب الضغط على اللمسة **2ndf** أو **Shift** أو **Inv** حسب ما هو موجود في الآلة الحاسبة.

مثال :

1) حساب $\sin 40°$

نضغط بدءا من اليسار على : **sin** **0** **4** نقرأ : **0.642787609**

إذن : $\sin 40° \approx 0{,}64$ أو $\sin 40° \approx 0{,}6$.

2) حساب $\tan 40°$.

نضغط بدءا من اليسار على : **tan** **0** **4** نقرأ : **0.839099631**

إذن : $\tan 40° \approx 0{,}83$ أو $\tan 40° \approx 0{,}8$.

3) حساب قيس $\widehat{B}$ علما أن $\sin \widehat{B} = 0{,}5$.

sin ($\sin^{-1}$) **2ndf** **5** **·** **0** نقرأ : **30**

إذن : $\widehat{B} = 30°$.

4 حساب زوايا أو أطوال باستعمال نسبة مثلثية

لحساب زاوية أو طول نتبع الخطوات التالية :

- التحقق من أن المثلث قائم.
- تحديد الضلع المقابل والضلع المجاور لزاوية حادة والوتر.
- تطبيق إحدى المساويات التي تعطي النسب المثلثية لزاوية حادة.

مثال : ABC مثلث قائم في A بحيث :

$CB = 5\text{ cm}$ و $\sin\widehat{B} = \dfrac{4}{5}$ و $\tan\widehat{C} = \dfrac{3}{4}$.

لنحسب الطولين AC و AB.

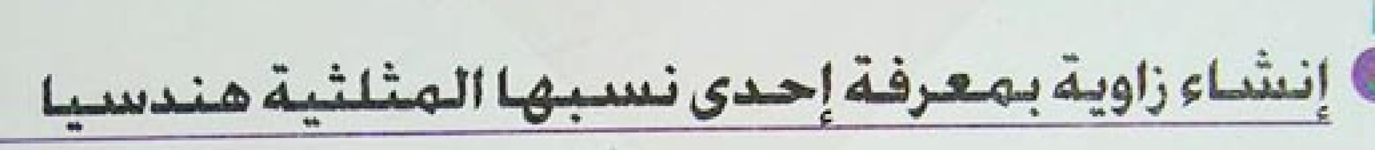


الحل

لدينا :

$\sin\widehat{B} = \dfrac{AC}{CB}$ ، ومنه $AC = \sin\widehat{B} \times CB$ ، أي $AC = \dfrac{4}{5} \times 5$. إذن $AC = 4\text{ cm}$.

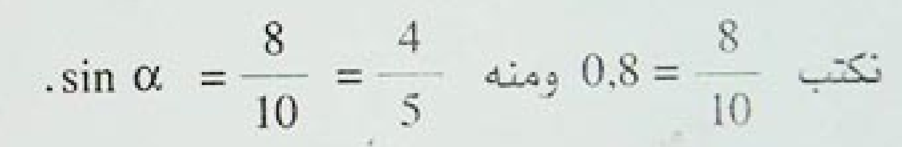
$\tan\widehat{C} = \dfrac{AB}{AC}$ ، ومنه $AB = \tan\widehat{C} \times AC$ ، أي $AB = \dfrac{3}{4} \times 4$. إذن $AB = 3\text{ cm}$.



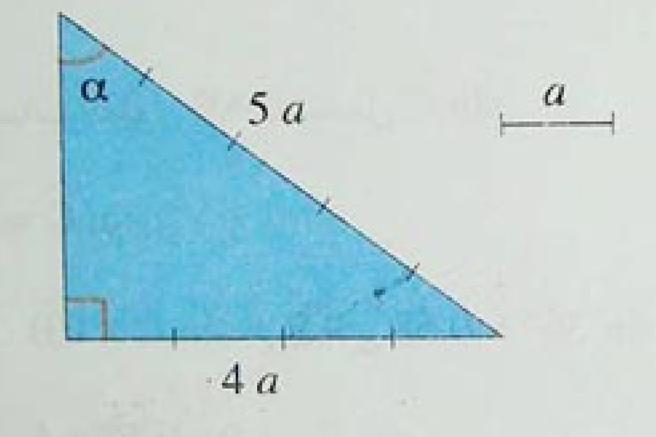
5 إنشاء زاوية بمعرفة إحدى نسبها المثلثية هندسيا



مثلا : لإنشاء زاوية قيسها α حيث $\sin\alpha = 0{,}8$.



نكتب $0{,}8 = \dfrac{8}{10}$ ومنه $\sin\alpha = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.



ثم ننشئ مثلثا قائما وتره 5a وطول أحد ضلعي الزاوية القائمة هو 4 a (a طول معطى).



6 العلاقات بين النسب المثلثية

> في مثلث قائم،
> مهما يكن العدد x قيس زاوية حادة، فإن $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

مثلا : $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ و $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ومنه $\tan 30° = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. أي $\tan 30° = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. إذن $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. ومنه $\sin^2 30° + \cos^2 30° = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$.

إذن $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$.



طرائق وتمارين محلولة

حساب زوايا أو أطوال

طريقة توظيف النسب المثلثية في مثلث قائم.

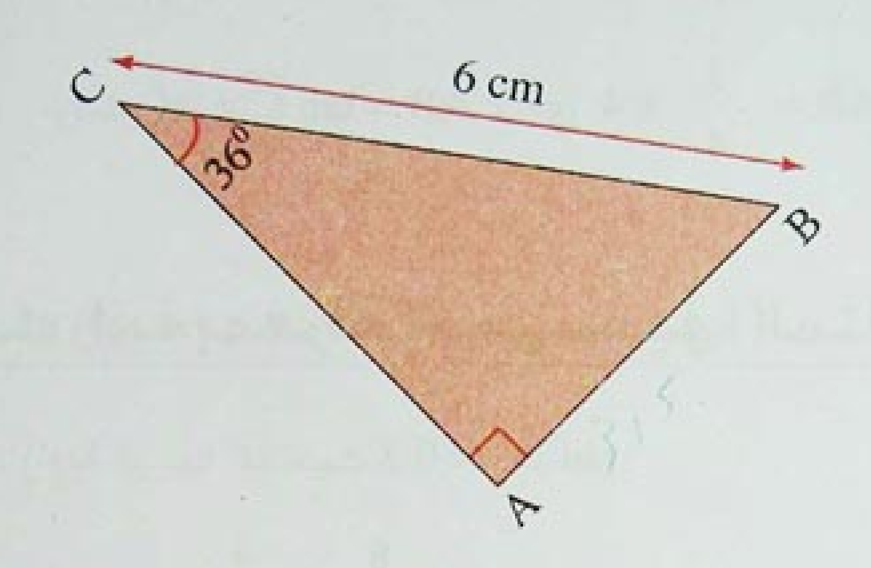
تمرين

ABC مثلث قائم في A بحيث :

$\widehat{ACB} = 36°$ ، BC = 6 cm

– احسب الطولين : AB ، AC (يعطى الناتج بالتدوير إلى 0,1cm) بالنقصان.

الحل



– لحساب الطول AB نستعمل $\sin \widehat{C}$.

$\sin \widehat{C} = \frac{AB}{CB}$.

ومنه : $AB = \sin \widehat{C} \times CB$ و $\sin 36° \approx 0{,}58$،

فيكون $AB \approx 0{,}58 \times 6$،

إذن $AB \approx 3{,}52$ أو $AB \approx 3{,}5$ cm.

– لحساب الطول AC نستعمل $\cos \widehat{C}$ أو نظرية فيتاغورس.

$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{CB}$.

ومنه $AC = \cos \widehat{C} \times CB$ و $\cos 36° \approx 0{,}84$،

فيكون $AC \approx 0{,}809 \times 6$،

إذن $AC \approx 4{,}85$ cm أو $AC \approx 4{,}9$ cm.

(فيتاغورس)

$CB^2 = AB^2 + AC^2$.

ومنه $AC^2 = CB^2 - AB^2$،

أي $AC^2 \approx 36 - 9$،

إذن $AC^2 \approx 23{,}75$،

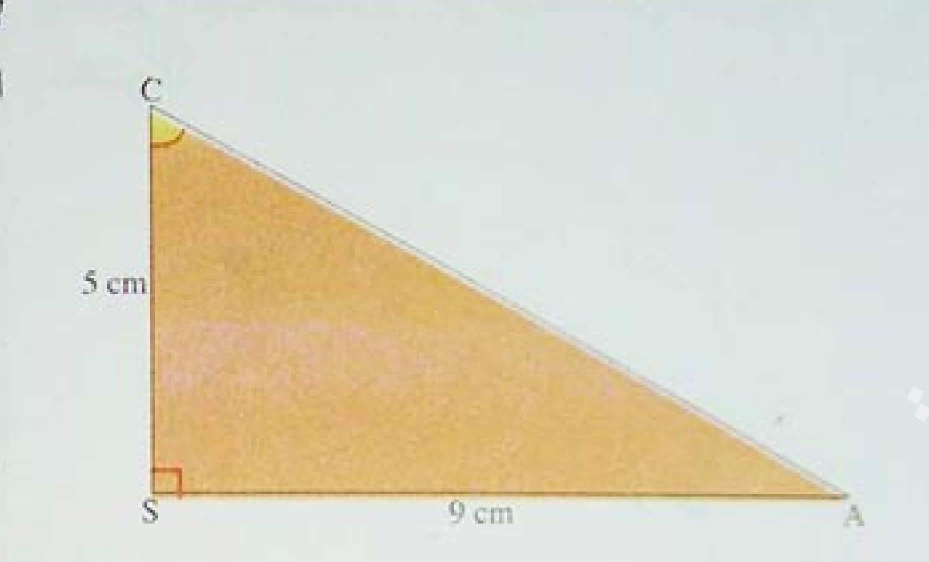
وبالتالي $AC \approx 4{,}87$ cm أو $AC \approx 4{,}9$ cm.



طرائق وتمارين محلولة

تمرين

أنشىء المثلث SAC القائم في S بحيث $SC = 5\ cm$ ، $SA = 9\ cm$.
احسب القيمة التقريبية للزاوية $\widehat{C}$ (أعط مدوّر إلى الوحدة للقيمة التقريبية لـ $\widehat{C}$).



لاحظ أن : طول الضلع المقابل لـ $\widehat{C}$ معلوم وطول الضلع المجاور لـ $\widehat{C}$ معلوم.

إذن : لحساب $\widehat{C}$ نستعمل $\tan\widehat{C}$.

نكتب :

$\tan\widehat{C} = \dfrac{SA}{SC}$ ، $\tan\widehat{C} = \dfrac{9}{5}$ ، $\tan\widehat{C} = 1{,}8$.

بالآلة الحاسبة : نضغط على $\boxed{\tan}$ ($\tan^{-1}$) $\boxed{2ndf}$ $\boxed{1{,}8}$.

تظهر على الشاشة : 60.9453959، ونكتب $\widehat{C} \approx 61°$.

إنشاء زاوية بمعرفة القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية

لإنشاء زاوية حادة $\widehat{xoy}$ حيث $\sin\widehat{xoy} = a$ (a عدد معطى) نعلم أن جيب زاوية حادة محصور بين 0 و 1.

- إذا كان $a < 0$ فالإنشاء غير ممكن.
- إذا كان $a > 1$ فالإنشاء غير ممكن أيضا.
- إذا كان $0 < a < 1$ فالزاوية $\widehat{xoy}$ يمكن إنشاؤها.

تمرين أنشىء زاوية قيسها ß حيث $\sin ß = 0{,}75$.

طريقة اكتب العدد 0,75 على شكل كسر عشري.

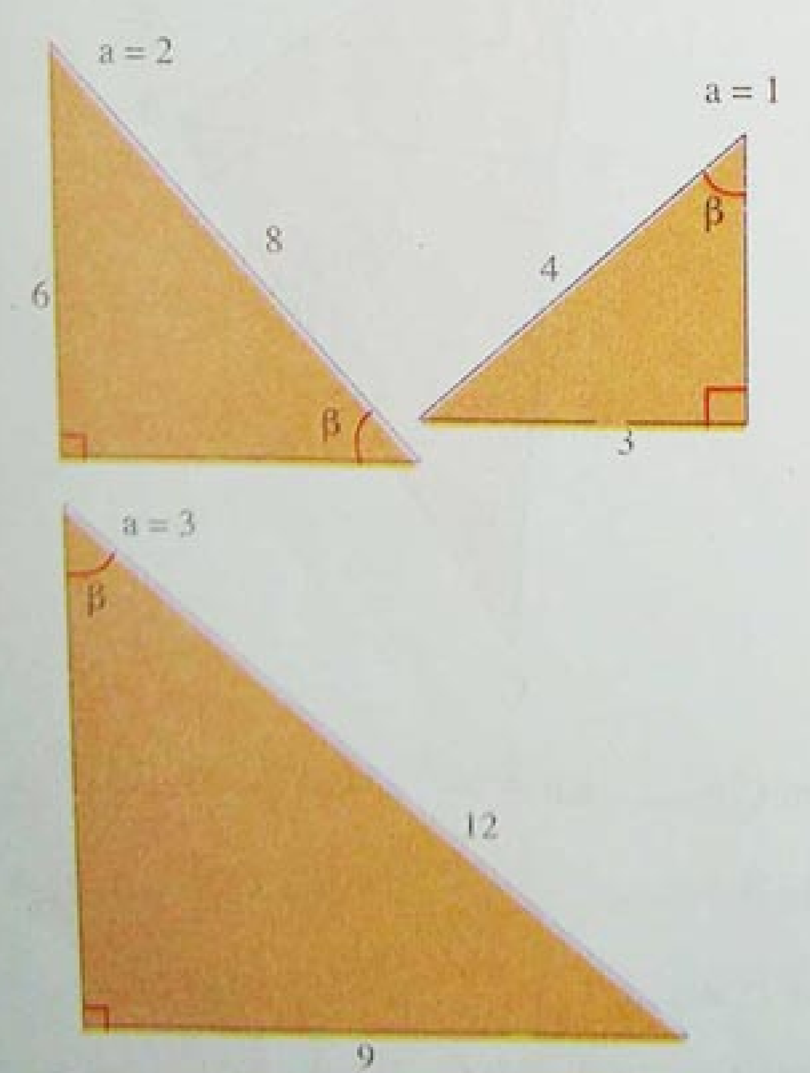
$$\sin ß = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

ماذا يمثل كل من الطولين في البسط والمقام؟

البسط يمثل طول الضلع المقابل للزاوية ß.

المقام يمثل طول الوتر في المثلث القائم الذي إحدى زواياه الحادة ß.

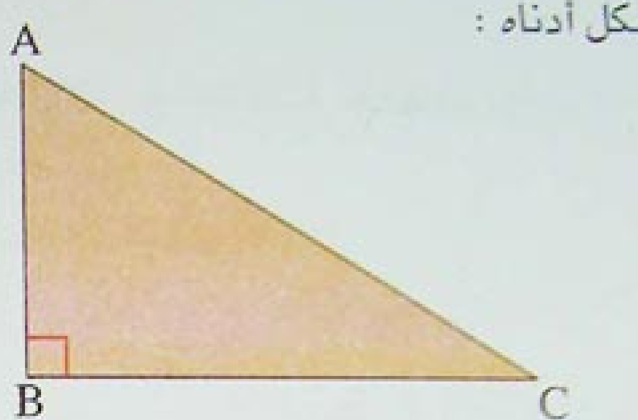
نرسم مثلثا قائما وتره a 4، وطول إحدى ضلعي الزاوية القائمة هو a 3.



ملاحظة : الزاوية ß في كل شكل من الأشكال السابقة لها نفس القيس

جيب وجيب تمام وظل زاوية حادة

1 انقل، ثم أتمم المساويات التالية مستعينا بالشكل أدناه :

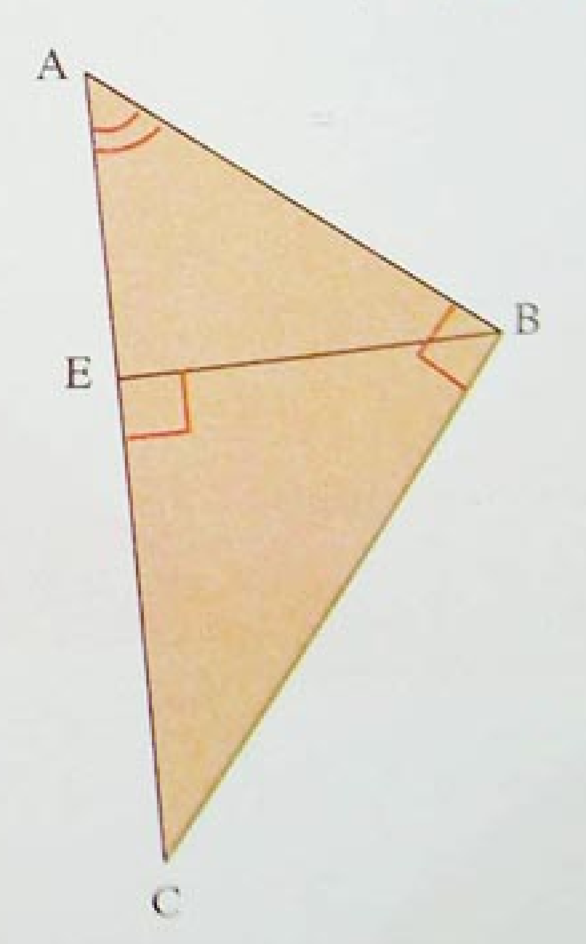


$\frac{AB}{AC} = \sin .... = \cos .....$.

$\frac{BC}{AC} = \sin .... = \cos .....$.

$\frac{AB}{BC} = ...$ ، $\frac{BC}{AB} = ...$.

2 انقل، ثم أتمم :



في المثلث القائم ABC : $\sin \hat{A} = \frac{.....}{.....}$ ، $\sin \hat{C} = ...$.

في المثلث القائم ABE : $\sin \hat{A} = ...$.

في المثلث القائم BEC : $\sin \hat{C} = ...$.

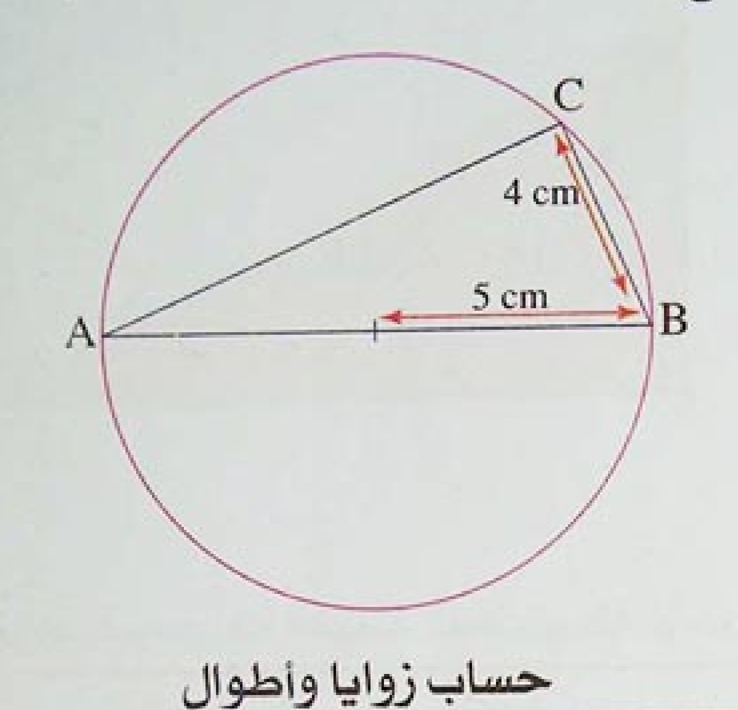
عبر عن : $\tan \hat{C}$ ، $\cos \hat{A}$ ، $\cos \hat{C}$ ، $\tan \hat{A}$ بطريقتين مختلفتين.

3 اعتمادا على الشكل الموالي :

- احسب $\sin \hat{A}$ ، $\tan \hat{B}$.
- احسب قيس الزاوية $\hat{A}$ ،

(بتدوير القيمة المقربة إلى الوحدة من الدرجة).

استنتج $\hat{B}$.



حساب زوايا وأطوال

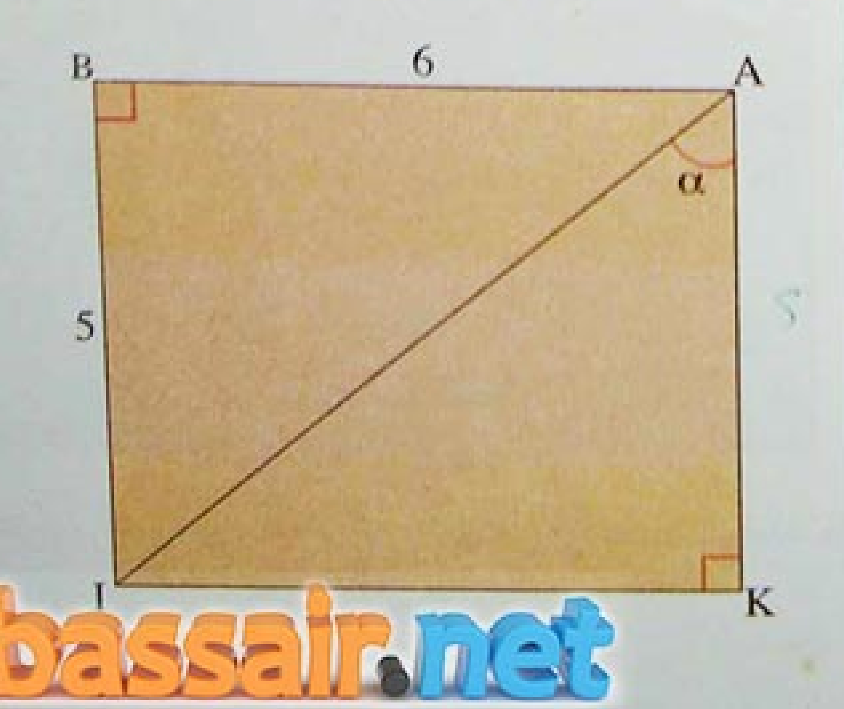
4 إعتماداً على الشكل أدناه. احسب AB في كل حالة :

1- إذا كان $AC = 2$ cm.

2- إذا كان $AC = 2\sqrt{3}$ cm.

(تعطى النتيجة بتدوير القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10}$).

5 احسب الزاوية α في الشكل الموالي :



تمارين للتطبيق المباشر

6 ABC مثلث قائم في C بحيث :
$AB = 24\ cm$ ، $\sin \widehat{A} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.
- احسب CB.

7 MNT مثلث قائم في M بحيث :
$NM = 3\sqrt{3}$ ، $\tan N = \frac{1}{3}$.
- احسب MT.

8 أعط مدوّرًا إلى 10^{-2} لقيمة x في كل حالة :
أ) $\cos 81° = \frac{8}{x}$ ، $\cos 17° = \frac{x}{25}$.
ب) $\sin 37° = \frac{x}{12}$ ، $\tan 28° = \frac{x}{9}$.

9 باستعمال الآلة الحاسبة، أعط تدويرا إلى 10^{-3} للقيمة المقربة لـ $\sin\ \alpha$، $\cos\ \alpha$، $\tan\ \alpha$ في كل حالة :

α	14°	30°	39°	45°	57°	60°	84°
$\sin\ \alpha$							
$\cos\ \alpha$							
$\tan\ \alpha$							

10 أعط مدورا إلى الوحدة من الدرجة للقيمة المقربة للزاوية $\widehat{B}$ في كل حالة :
أ) $\sin B = 0{,}9$ ، $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $\sin B = 0{,}836$.
ب) $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ، $\cos B = \frac{1}{3}$ ، $\cos B = 0{,}5$.
جـ) $\tan B = \sqrt{10}$ ، $\tan B = \frac{5}{3}$ ، $\tan B = 1$.

إنشاء زاوية حادة

11 أنشىء الزاوية الحادة $\widehat{A}$ حيث :
$\sin \widehat{A} = \frac{5}{7}$ ، $\sin \widehat{A} = \frac{2}{5}$ ، $\sin \widehat{A} = \frac{3}{4}$

12 أنشىء الزاوية الحادة $\widehat{B}$ في كل حالة :
$\tan \widehat{B} = 0{,}6$ ، $\tan \widehat{B} = 2$ ، $\tan \widehat{B} = \frac{5}{4}$.

العلاقة بين النسب المثلثية

13 إذا علمت أن : $\sin x = \frac{5}{13}$ و $\tan x = \frac{5}{12}$.
احسب القيمة المضبوطة لـ $\cos x$. ثم تحقق أن :
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

14 باستعمال العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
احسب $\cos x$، إذا علمت أن $\sin x = 0{,}6$.

15 نفس السؤال، إذا علمت أن $\sin x = 0{,}72$.

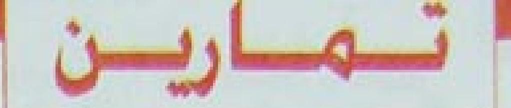
16 باستعمال العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
احسب $\sin x$ إذا علمت أن $\cos x = \frac{2}{5}$.

17 احسب $\tan x$ ، إذا علمت أن :
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos x = \frac{1}{2}$.

18 α هو قيس زاوية حادة.
احسب $\sin \alpha$ ، $\tan \alpha$ في كل من الحالات الآتية :
$\cos\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos\ \alpha = \frac{1}{4}$ ، $\cos\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

19 γ قيس زاوية حادة حيث $\tan\ \gamma = 0{,}5$.
احسب $\sin\ \gamma$ ، $\cos\ \gamma$.

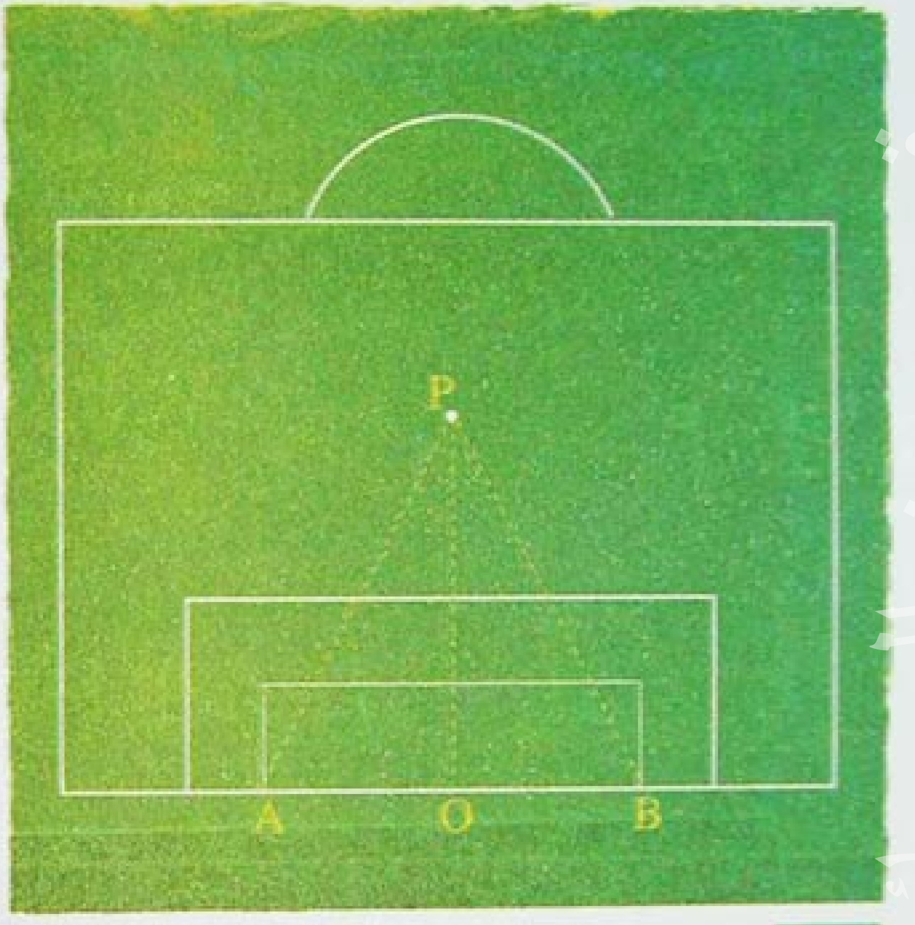




1 تقع نقطة ضربة الجزاء P لكرة القدم على مسافة 11 m من خط المرمى (AB) حيث :
$AB = 7,32\ m$.

- احسب بالدرجات قيس زاوية القذف $\widehat{APB}$ في حالة ضربة جزاء.

(توجيه : احسب أولا : $\widehat{APO}$ في المثلث AOP).



2 RST مثلث قائم في R بحيث :
$ST = 16\ cm$ ، $RS = 10\ cm$.

- ما هو القيس بالدرجات للزاويتين $\widehat{STR}$ و $\widehat{RST}$ ؟

3 EFG مثلث قائم في E بحيث :
$EF = 2,4\ cm$ ، $FG = 5,2\ cm$.

احسب قيس الزاوية $\widehat{GFE}$ بالتقريب إلى الوحدة من الدرجة.

4 ABC مثلث قائم في A بحيث :
$AC = 7,4\ cm$ و $\widehat{ABC} = 55°$.

- احسب BC بالسنتيمتر (cm).

5 EFG مثلث قائم في E بحيث :
$EG = 6,7\ cm$ و $\widehat{EFG} = 23°$.

- احسب EF بالتقريب إلى الوحدة من المليمتر (mm).

6 ABC مثلث قائم في A.

احسب المدور إلى mm للطول المطلوب في كل حالة :

1) $\widehat{ABC} = 22°$ ، $AB = 6\ cm$ ، $AC \approx ......$.

2) $\widehat{ACB} = 65°$ ، $AB = 7\ cm$ ، $BC \approx ......$.

3) $\widehat{ACB} = 45°$ ، $BC = 14,8\ cm$ ، $AB \approx ......$.

4) $\widehat{ACB} = 28°$ ، $BC = 3,5\ cm$ ، $AB \approx ......$.

5) $\widehat{ACB} = 10°$ ، $AC = 5\ cm$ ، $AB \approx ......$.

7 ABC مثلث قائم في A.

احسب المدور إلى الوحدة من الدرجة لقيس الزاوية في كل حالة مما يلي :

1) $AC = 2,5\ cm$ ، $AB = 6,1\ cm$ ، $\widehat{ABC} \approx ......$.

2) $BC = 17\ cm$ ، $AB = 9\ cm$ ، $\widehat{ACB} \approx ......$.

3) $BC = 5,4\ cm$ ، $AC = 3,7\ cm$ ، $\widehat{ACB} \approx ......$.

8 ABC مثلث قائم في A بحيث :
$AC = 9.6\ cm$ ، $AB = 14,6\ cm$.

- احسب قيس الزاوية $\widehat{BCA}$ (أعط مدوراً إلى 10^{-1} من الدرجة).

9 أصحيح أم خاطئ ؟

ضع العلامة X في الخانة المناسبة.

1 - ABC مثلث قائم في C. $\cos \widehat{B}$ مساو لـ

أ) ☐ $\frac{AC}{AB}$ ، ب) ☐ $\frac{AB}{BC}$ ، جـ) ☐ $\frac{BC}{AB}$.

2 - مهما تكن الزاوية الحاد α

فإن قيمة $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

أ) ☐ متعلقة بـ α ،

ب) ☐ مساوية دائما لـ 1، جـ) ☐ مساوية دائما لـ2 .

3 - مهما تكن الزاوية الحاد ß فإن tan ß مساو لـ :

أ) ☐ $\frac{\cos ß}{\sin ß}$ ، ب) ☐ $\frac{\sin ß}{\cos ß}$ ،

جـ) ☐ $(\sin ß)(\sin ß)$.

تمـــاريـــن

10 عيّن من بين الأعداد الحقيقية، الأعداد التي يمكن أن تكون جيوب تمام لزوايا حادة :

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\frac{1}{3}$ ؛ 1,3 ؛ $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ؛ 3 ؛ $\frac{5}{2}$ ؛ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11 هل يمكن أن يكون العدد $\frac{2\sqrt{13}}{9}$ جيب زاوية ؟
علمًا أن $\sqrt{13} \approx 3,6$.

12 ABC مثلث قائم في A بحيث :
$AB = 5\text{ cm}$ و $\cos \widehat{ABC} = \frac{20}{39}$.
احسب BC و AC .

13 ABC مثلث قائم في A بحيث :
$BC = 12\text{ cm}$ و $\sin \widehat{ACB} = \frac{3}{4}$.
– احسب كلا من : AB ، AC ، $\cos \widehat{ACB}$ ، $\tan \widehat{ACB}$.

14 ABC مثلث قائم في A بحيث :
$AC = 4\text{ cm}$ و $\tan \widehat{ACB} = \frac{13}{5}$.
احسب كلا من : AB ، BC ، $\cos \widehat{ACB}$ ، $\sin \widehat{ACB}$.

15 تحلق طائرة على ارتفاع 1200m .
ما هو بعدها عن برج المراقبة، إذا كانت تشاهد من برج إرتفاعه 10 m بزاوية قيسها °15؟

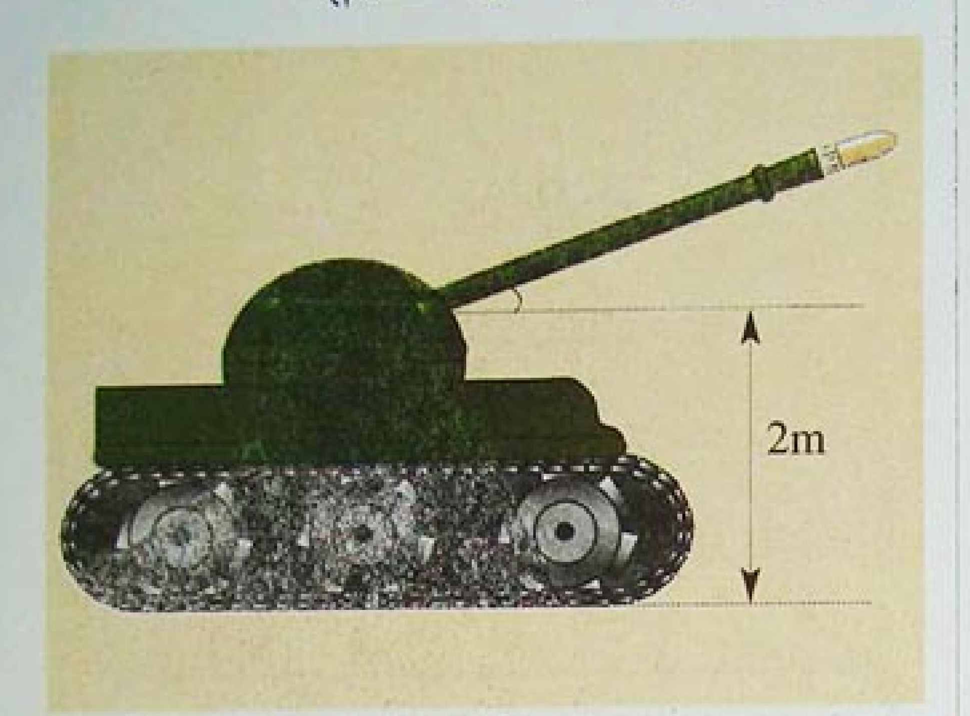
16 α هو قيس زاوية حادة.
عين α بالدرجات في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\sin \alpha = 0,9210$ 2) $\cos \alpha = 0,8192$

3) $\sin \alpha = 0,7880$ 4) $\tan \alpha = 0,4245$

5) $\tan \alpha = 11,4300$ 6) $\cos \alpha = 0,7714$

17 تطلق دبابة قذيفة بزاوية قدرها °32 .
– ما هو ارتفاع القذيفة على بعد 500 m ؟
(نعتبّر أن مسار القذيفة هو مستقيم).



18 STR مثلث قائم في S بحيث :
$\widehat{T} = 52°$ ، $ST = 12$.
[SA] ارتفاع في المثلث STR.
[SB] المتوسط في المثلث STR.
احسب الأطوال SA ، TR ، AR ، AT ، SB.

19 أعط تدويرا إلى الوحدة من الدرجة للزاوية α في كل حالة :.

أ) $\sin \alpha = 0,467$ ، $\sin \alpha = 0,743$ ، $\sin \alpha = 0,836$.

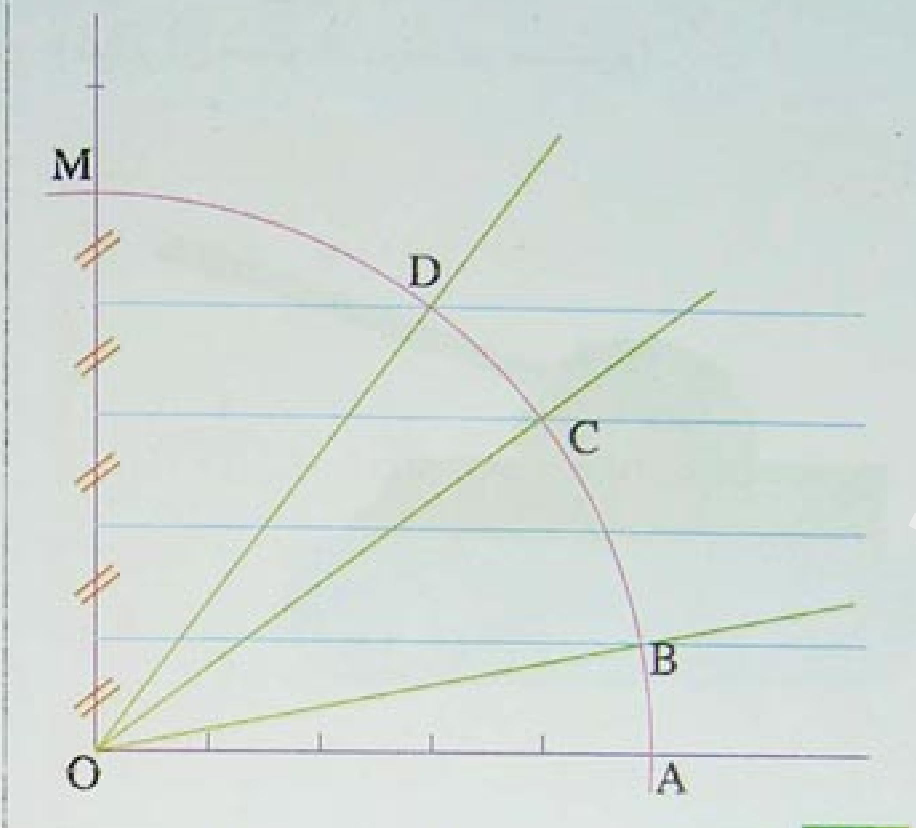
ب) $\tan \alpha = 1$ ، $\cos \alpha = 0,86$ ، $\cos \alpha = 0,5$.

جـ) $\tan \alpha = \frac{5}{3}$ ، $\sin \alpha = 0,9$ ، $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

20 ABCD شبه منحرف قائم في A و D بحيث :
$\widehat{ABD} = 60°$ ، $\widehat{CBD} = 90°$ ، $AB = 5\text{ cm}$.
احسب BD .
احسب طول كل ضلع من أضلاع شبه المنحرف المعطى.

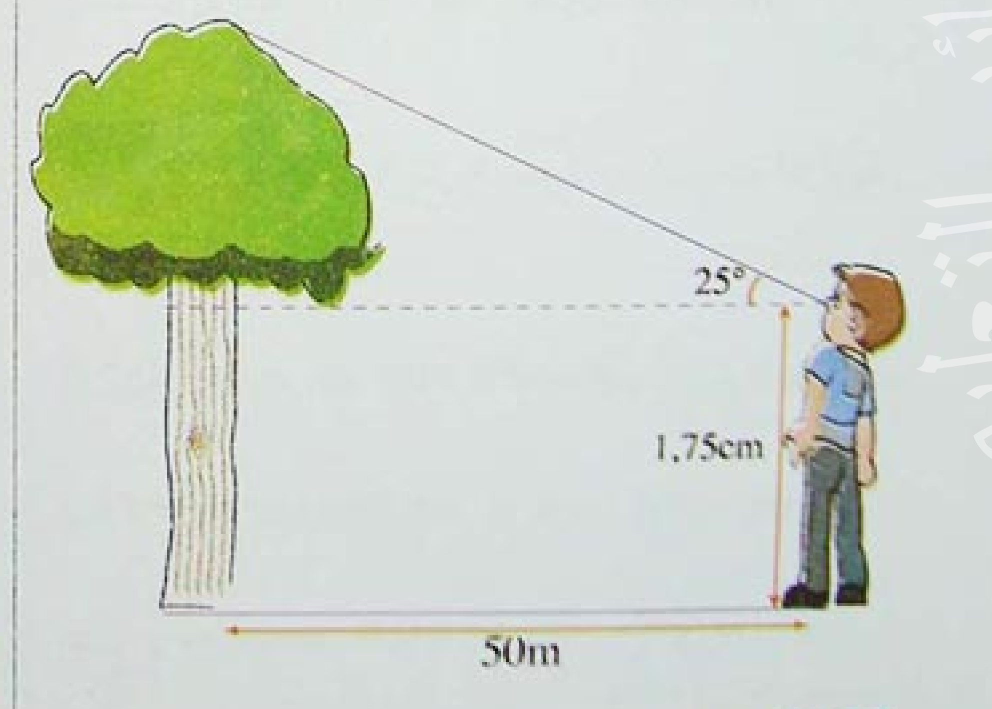
21 باستعمال الشكل :

احسب $\sin \widehat{AOB}$ ، $\sin \widehat{AOC}$ ، $\sin \widehat{AOD}$.



22 يقف رجل في نقطة A على مسافة 50 m من جذع شجرة. ينظر هذا الرجل إلى عصفور في أعلى تلك الشجرة بزاوية $25°$.

- احسب علّو هذه الشجرة.



23 PMN مثلث قائم في M بحيث :

$PM = 4$ cm ، $MN = 7$ cm.

احسب PN.

احسب كل من : $\sin \widehat{p}$ ، $\cos \widehat{p}$ ، $\tan \widehat{p}$ بتقريب إلى 10^{-2} بالنقصان.

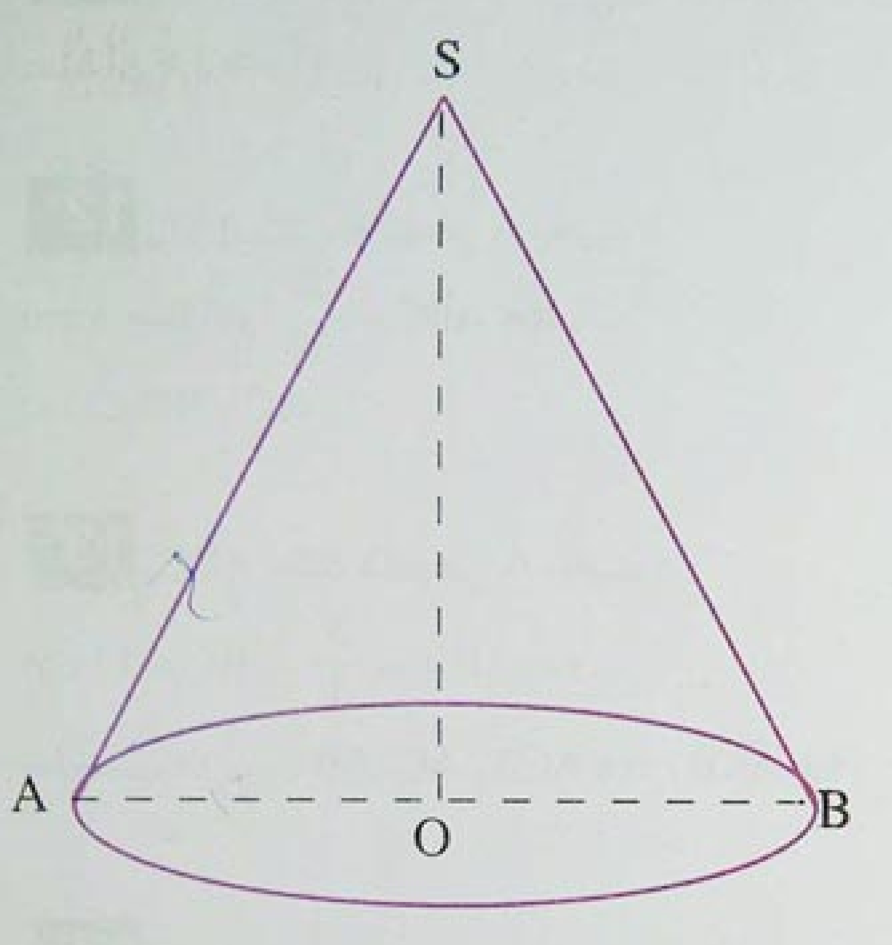
احسب $\widehat{p}$ (بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة).

24 مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص مركزه O ونصف قطره 4cm (كما هو مبين في الشكل).

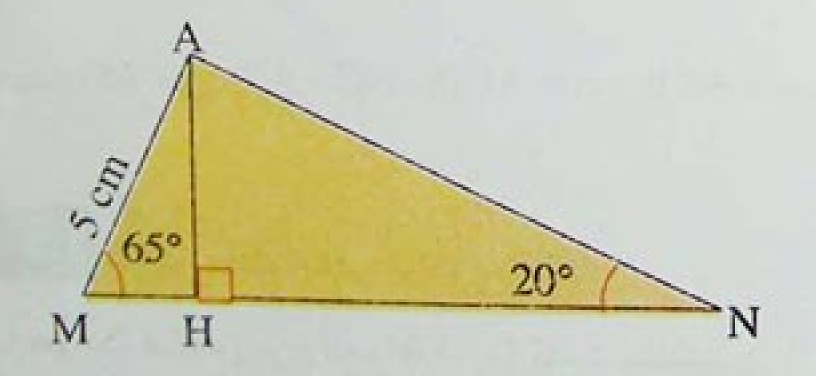
إرتفاعه [SO] بحيث $SO = 2,8$.

1) احسب $\widehat{OSB}$ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة.

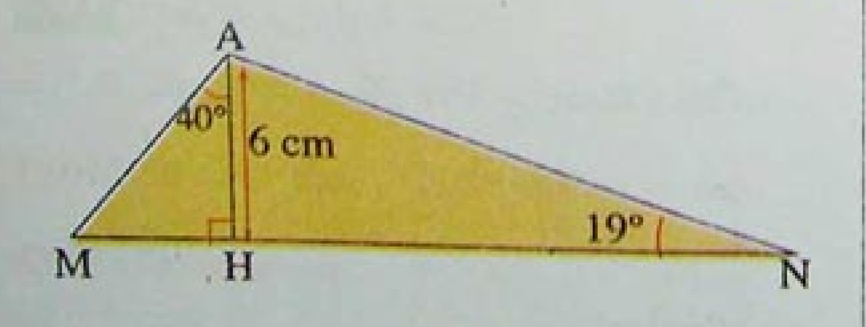
2) احسب حجم هذا الهرم بالتدوير إلى $1cm^3$.



25 احسب MN ، HN ، AN ، AH ، MH.



26 احسب MN ، MH ، AM ، HN ، AN.



مسائل

1 إعتمادًا على الشكل أدناه، احسب α بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة علما أن :

$CD = 7$ ، $AC = 3$ ، $AB = 1$

(الوحدة هي السنتيمتر).

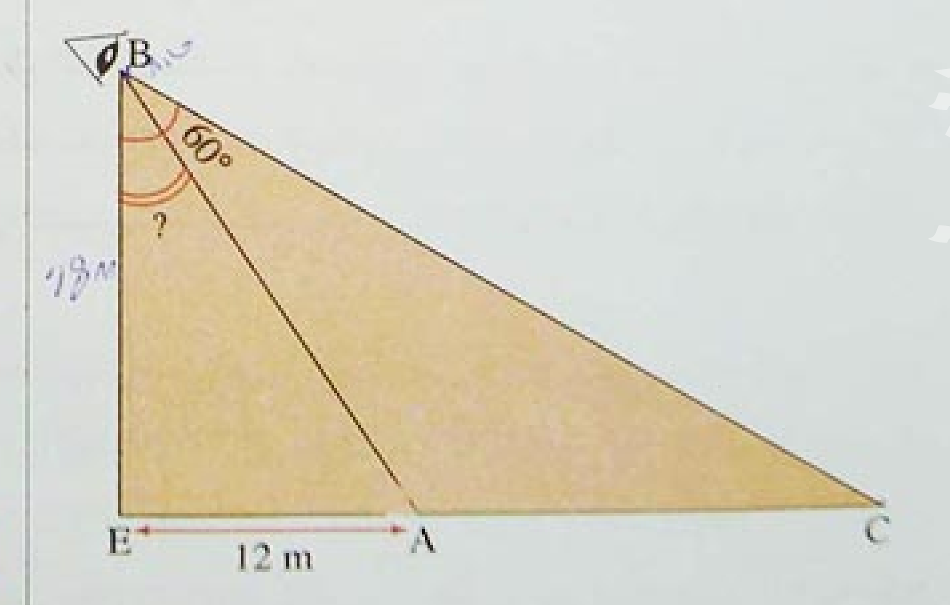
2 ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A

بحيث : $BC = 5cm$ ، $\widehat{A} = 50°$

- أنشىء الشكل.
- احسب طول الإرتفاع المتعلق بالضلع [BC] .
- احسب AB .
- احسب طول قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

3 يقف رجل على سطح منزله الذي يعلو على سطح الأرض بـ 18 m . رأى ولدا في النقطة C بزاوية 60°. كما رأى أيضا كرة في النقطة A على نفس الخط المستقيم الأفقي وعلى مسافة 12 m من المنزل.

(الشكل الموالي).



احسب المسافة بين الولد في النقطة C والمنزل إذا علمت أن ارتفاع عيني الرجل عن المستوى الواقف عليه هو 1,6 m .

احسب الزاوية التي رأى منها الكرة في النقطة A .

احسب المسافة بين الولد والكرة.

4 ABC مثلث قائم في A بحيث :

$AC = 9$ cm ، $AB = 6$ cm .

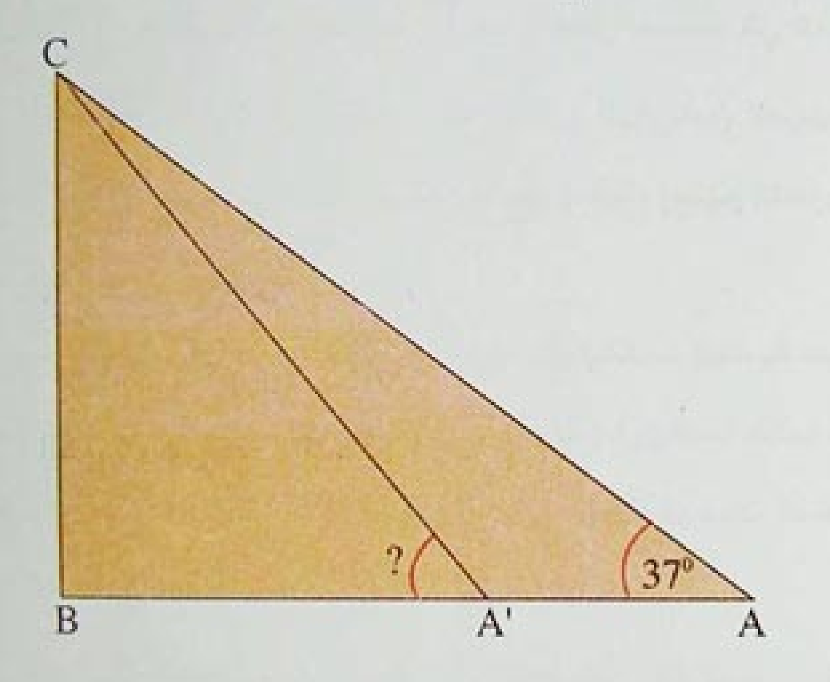
D نقطة من [AC] بحيث $AD = 4$ cm .

- احسب $\tan\widehat{ADB}$, $\tan\widehat{ACB}$, $\cos\widehat{ABD}$.

E منتصف [DC] ، محور [DC] يقطع المستقيم (BD) في G والمستقيم (BC) في F .

- احسب EF ، EG ، GF .

5 رأى راصد من نقطة A على سطح الأرض برجاً يبعد عن A مسافة 60 m وبزاوية قيسها 37° (الشكل الموالي).



الزاوية $\widehat{BAC}$ تسمى زاوية الرصد .

ورأى راصد آخر نفس البرج من نقطة 'A تقع بين A و B وتبعد عن A مسافة 25 m .

- احسب ارتفاع البرج وقيس زاوية الرصد للراصد الثاني.

6 الشكل المقابل يمثل إشارة مرور تحذر من منحدر خطير .



- ماذا تعني الكتابة % 10 ؟
- اوجد زاوية الإنحدار .





من التاريخ

أبو جعفر الخازن (القرن 4هـ/10م)

حياته : هو أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن الخرساني، عالم في الرياضيات وعلم الفلك. إننا لا نكاد نعرف شيئاً بخصوص أحواله الشخصية سوى أنه كان مقرّبا من الأمراء في ذلك الوقت. وقد بدا لعدد من المؤرخين المعاصرين أن هناك شخصين مختلفين هما : أبو جعفر الخازن الذي يكون قد ألف كتبا في الرياضيات ثم محمد بن الحسين الذي يكون قد انشغل بعلم الفلك والتجيم. لكن هذا الزعم سقط عندما عُثِر مؤخرا على مخطوطة تتناول المخروطات نسبت إلى الشخصية الثانية (محمد بن الحسين): غير أن تفحصها بيّن أنها تطابق تلك التي تنسب إلى أبي جعفر الخازن. وجاء ذكر الخازن في كثير من مؤلفات القدماء، ومنهم القفطي الذي قال : "أبو جعفر الخازن ... خبير بالحساب والهندسة والتسيير، عالم بالأرصاد والعمل بها مذكور بهذا النوع في زمانه، وله تصانيف منها كتاب زيّج الصفائح، وهو أجل كتاب وأجمل مصنف في هذا النوع ...".

أعماله : أشار إلى الخازن العديد من المؤرخين الغربيين في مطلع القرن العشرين مشيرين إلى أنه من أولئك الذين حلوا المعادلات التكعيبية بواسطة القطوع المخروطية. ومنهم كاجوري القائل : "إن أبا جعفر أول عربي حلّ المعادلات التكعيبية هندسيا بواسطة قطوع المخروط".

ومن المعلوم أن عهد الخازن كان ثريا بالنشاطات العلمية حيث توسع الجبر في دراسة المعادلات وكثيرات الحدود، وتطوّر حساب المثلثات حتى صار في القرن الحادي عشر فرعا رياضيا قائما بذاته. وفي القرن العاشر اكتشفت نظرية في علم الفلك تدعى "نظرية الجيوب" التي كانت تسمى "الشكل المُغني" لأنها عوّضت النظرية الإغريقية المسماة "الشكل القطّاع" المعمول بها في الحسابات الفلكية.

دوران الشمس : وفي مجال علم الفلك كان بطليموس يعتقد أن الشمس تدور بحركة دائرية منتظمة حول مركز ليس هو الأرض. فعارض الخازن هذا الرأي مبينا أنه لو كان الأمر كذلك لكان القطر الظاهر للشمس يتغيّر عبر شهور السنة، وبما أننا لا نرى تغيّرا في هذا القطر فإن كلام بطليموس باطل. والواقع أن حجة الخازن صحيحة لكن ضعف هذا التغيّر للقطر لا يمكّن من إدراكه بالعين.

واقترح الخازن فكرة أخرى حول النظام الشمسي مفادها أن الشمس تتحرك في دائرة يقع مركزها على الأرض، لكنها حركة غير منتظمة حول المركز، بل انتظامها هو حول مركز آخر.

وقدّم الخازن في مجال الرياضيات إسهامات في الهندسة حيث يذكر أنه يكون قد توصّل إلى حل هندسي لمسألة "تثليث الزاوية" الشهيرة، كما درس خواص المثلثات القائمة وتناول نظرية فيرما (1601 –1665) في الحالة التي يكون فيها الأس يساوي 3. نشير إلى أن هذه النظرية لم يتم البرهان عليها إلا في عام 1994. ويذكر الخازن أن برهان الخجندي لهذه النظرية خاطئ قائلا : "وقد بيّنت أن ما قدّمه الخجندي، رحمه الله، في برهانه على أنه لا يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب فاسد غير صحيح". وأما في نظرية الأعداد فأنشأ الخازن جدولا عدديا ثلاثي المداخل يقدم حلول نوع هام من المعادلات.

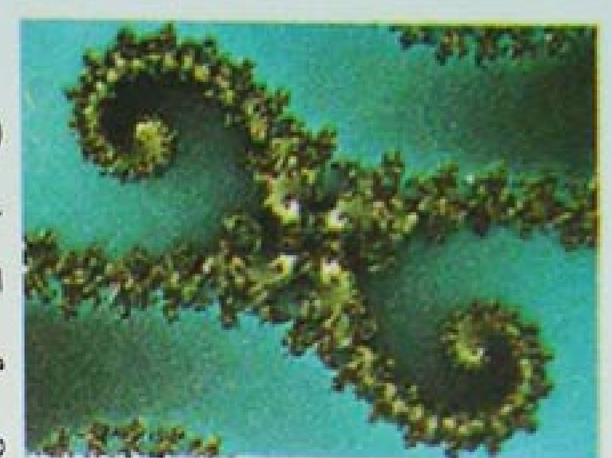
ومن جهة أخرى، ذكر عمر الخيام أن الخازن هو أول من برهن على وجود حل هندسي استخدم تقاطع مخروطين لإحدى المعادلات التكعيبية المشار إليها في كتاب "الكرة والاسطوانة" لأرخميدس. وبهذا الشأن قال عمر الخيام : "وإن فيها (أي صناعة الجبر والمقابلة) أصنافا يُحتاج فيها إلى أصناف من المقدمات معتاصة جدا، متعذر حلها ... فجزم القضاء بأنه ممتنع حتى نبغ أبو جعفر الخازن وحلها بالقطوع المخروطية".



استراحة

الرياضيات تتقدم

الهندسة الكسورية (1)



من المعلوم أن هناك العديد من الهندسات في الرياضيات. ومنها الهندسة الكسورية (هناك من يقول "الأكسورية" أو "الفركتالية") : لقد ظهر مفهوم جديد في القرن التاسع عشر يتمثل في الأشكال الكسورية. وفي بداية الأمر كان المهتمون يدرجونها ضمن الرياضيات المسلّية، وظلت كذلك حتى منتصف القرن العشرين. ولم تكتسب هذه الأشكال مكانتها إلاّ عام 1975 عندما جعل منها الرياضي الفرنسي بينوا مندلبورت اختصاصا رياضيا مستقلا وقائما بذاته، سمّاه الهندسة الكسورية.

تعتمد هذه الهندسة على فكرة "كسر" الأشكال. وقد سمحت بتمثيل كائنات غير سويّة كالجبال ومكوّنات المجرّات في السماء وسواحل البحار والمحيطات. والواقع أن اختيار المصطلح "كسوري" جاء ليميّز بين هذه الأشكال والأشكال الهندسية الأقليدية المألوفة (كالمستقيم والدائرة والمنحنيات والقطوع المخروطية).

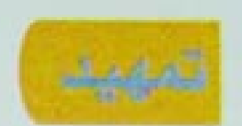
والملاحظ أن الهندسة الكسورية هي أول هندسة تتحدث عن "بعد هندسي" لا يساوي عددا طبيعيا. فلو شاهد أقليدس الأشكال الكسورية (مثل الموجودة على هذه الصفحة) لذعر منها كما ذعر الذين أتوا من بعده ولاعتبرها أشباحا رياضية. ورغم هذا الانطباع الذي نجده عند بعض المختصين فنحن نحصل على شكل من هذا النوع بإجراء تحويلات رياضية محضة تتمثل عموما في إضافة عنصر بسيط، مكررين هذه الإضافة عددا غير منته من المرات فيتولد الشكل الكسوري شيئا فشيئا.

إليك هذا الشكل الكسوري البسيط : إذا قسّمنا قطعة مستقيمة إلى 3 أقسام متساوية وأزلنا جزءها الأوسط. ثم أجرينا نفس العملية على القطعتين المتبقيتين (أنظر الشكل أدناه). ثم قمنا بنفس العملية مع القطع الأربع الناتجة من ذلك التحويل ... وواصلنا بنفس الطريقة لانهائيا فسنحصل على شكل هندسي يسمى غبار كنتور، وهو رياضي ألماني عاش من 1845 إلى1918. ها هو الشكل المحصل عليه بعد أربع عمليات متوالية :

يتبع

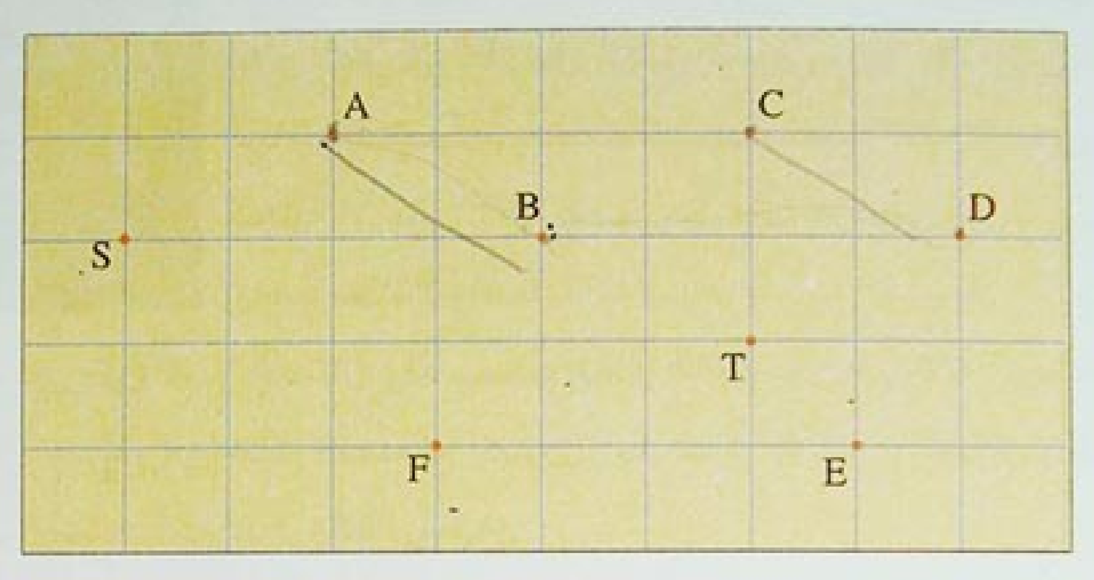


الأشعة والانسحاب



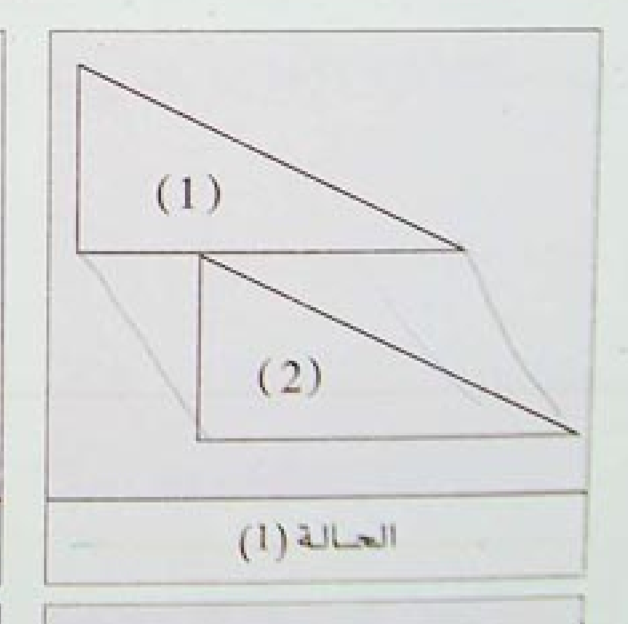
تمهيد

1 تمعن في الشكل الآتي :

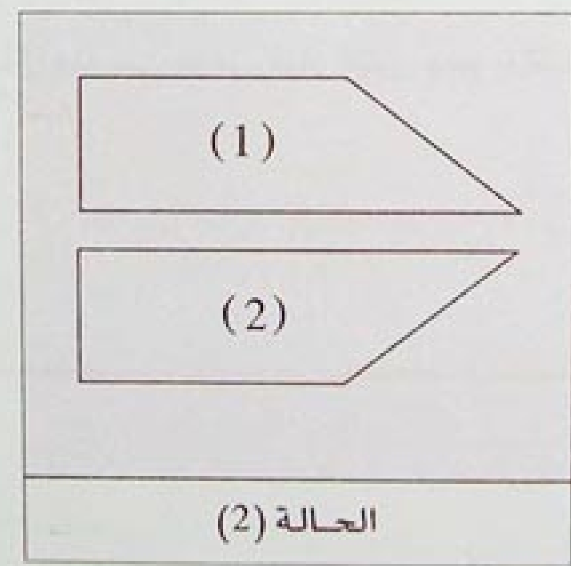


- ما هما صورتا A ، B بالانسحاب الذي يحوّل C إلى D.
- ما هي صورة المستقيم (AT) بالانسحاب الذي يحوّل C إلى D.
- ما هي صورة القطعة [BD] بالانسحاب الذي يحوّل E إلى F.

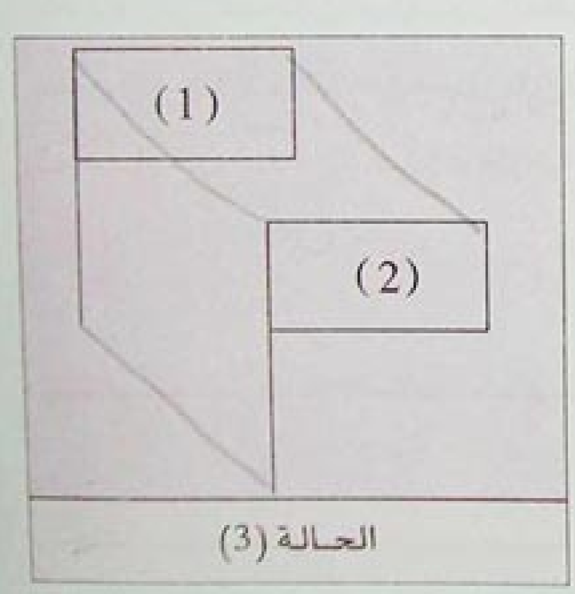
2 ما هي الحالات التي يكون فيها الشكل (1) هو صورة للشكل (2) بانسحاب ؟



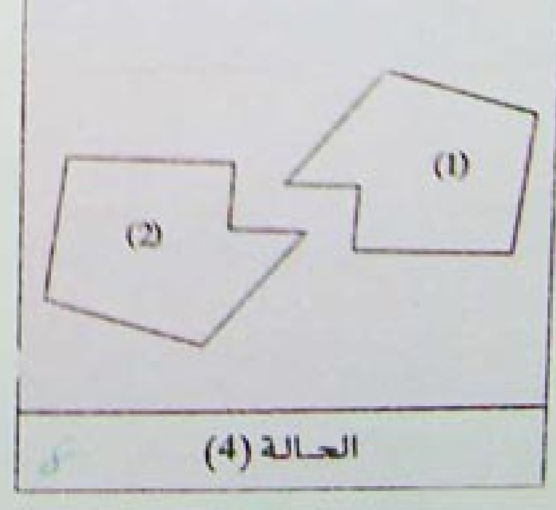
الحالة (1)



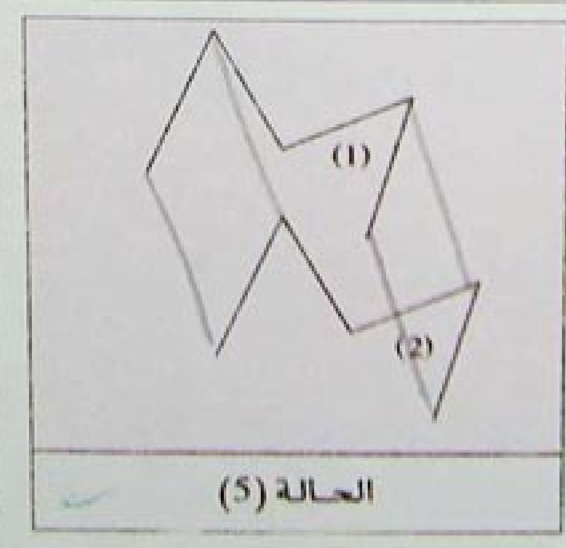
الحالة (2)



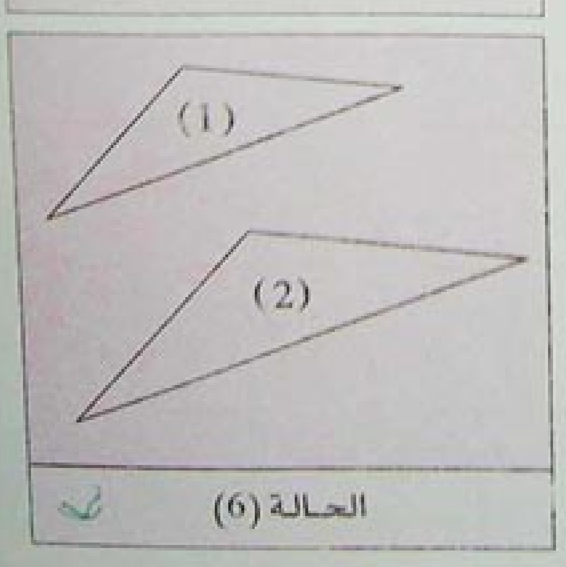
الحالة (3)



الحالة (4)



الحالة (5)



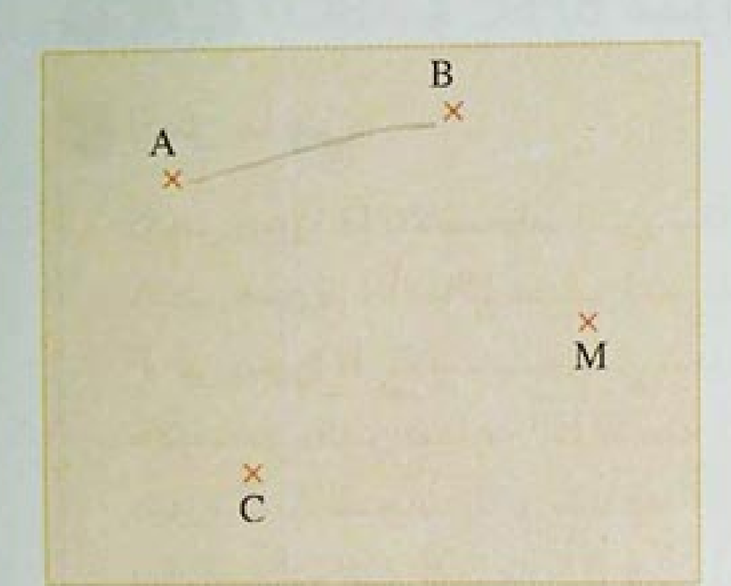
الحالة (6)

1 مفهوم الشعاع

تذكرة

عند إزاحة شكل حيث ننقل كل نقط الشكل على مستقيمات متوازية في نفس الاتجاه بنفس المسافة، نتحصل على صورة هذا الشكل بانسحاب.

أنشىء 'M و 'C صورتي M و C بالانسحاب الذي يحول A إلى B.



نقول إن :

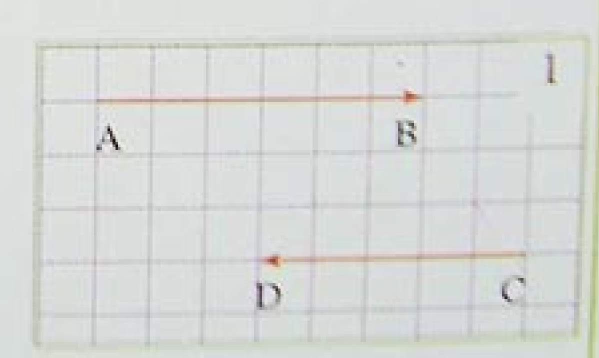
- الانسحاب الذي يحوّل A إلى B هو :
الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

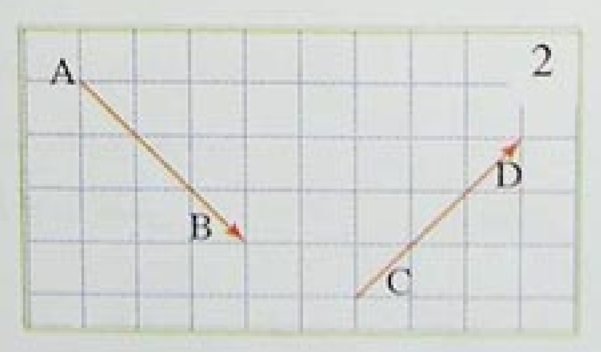
نقول إن :

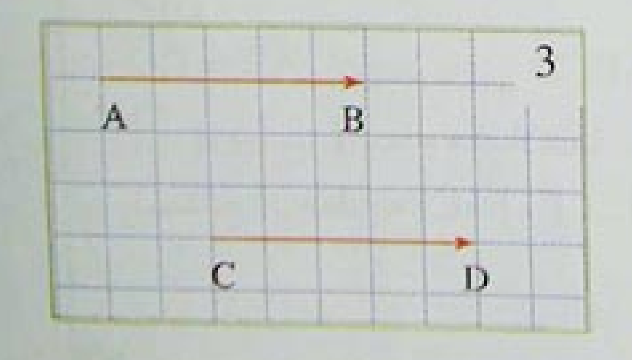
- المستقيمات (AB) ، ('CC) ، ('MM) لها نفس المنحى.
- أنصاف المستقيمات (AB] ، [CC') ، [MM') لها نفس الاتجاه.

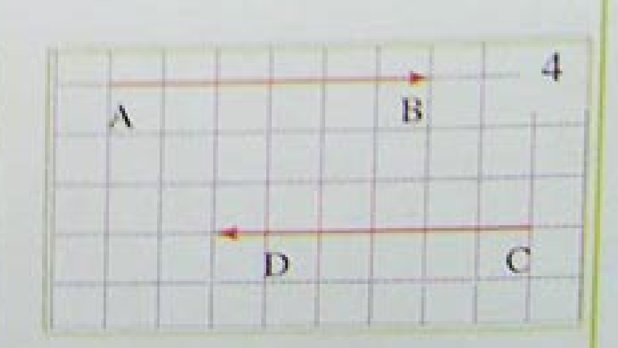
2 تساوي شعاعين

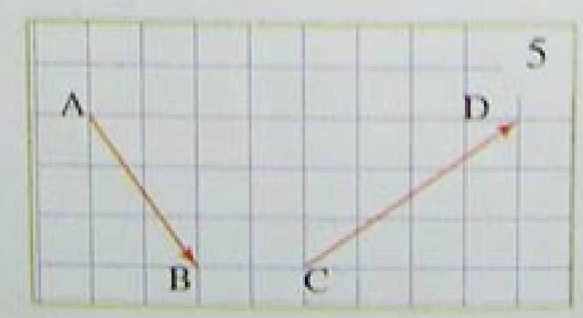
لاحظ الأشكال، ثم انقل الجدول واكمله بصحيح أم خاطئ :

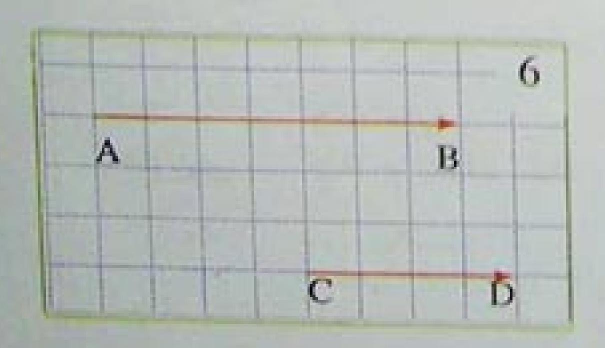








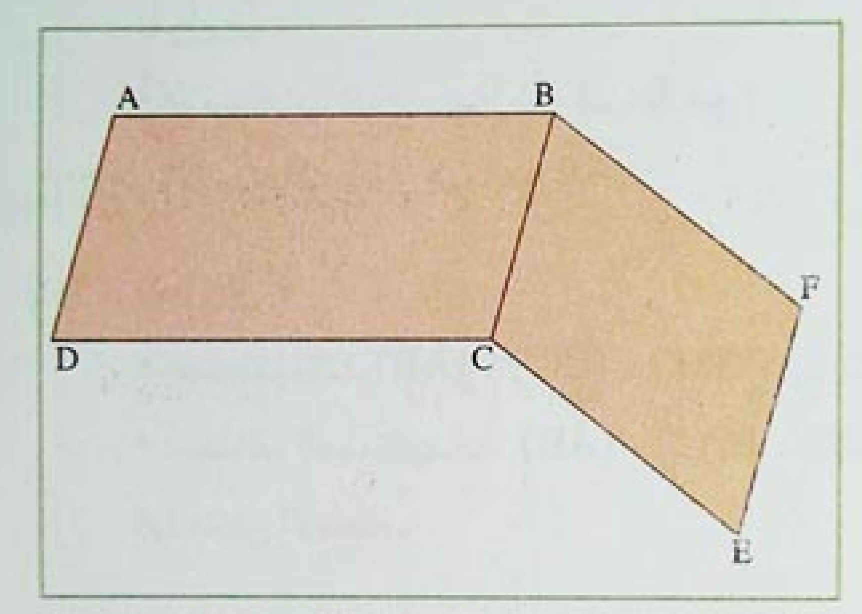






للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)	الشكل (5)	الشكل (6)
نفس المنحى						
نفس الاتجاه						
نفس الطول						

3 ABCD و BFEC متوازيا أضلاع

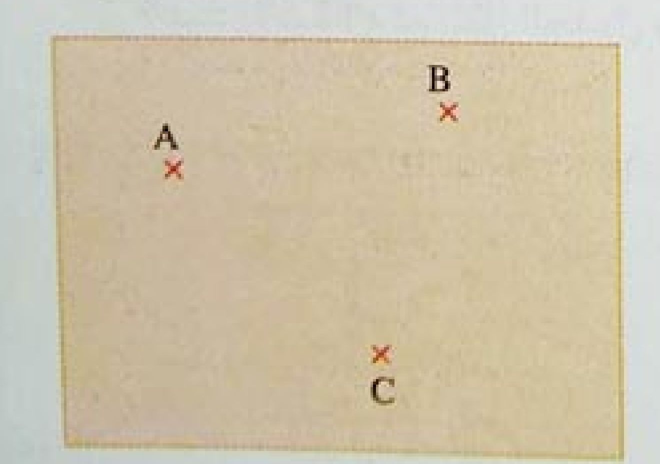


أكمل ما يلي:

C هي صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.
A هي صورة ..... بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$.
F هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه ....
بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EF}$ النقطة B هي صورة ......
صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BF}$ هي ....
وبالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ هي ......

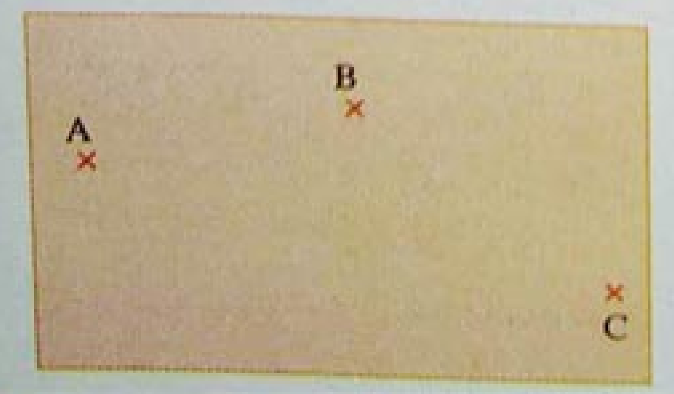
4

1 A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية.



أنشىء النقطة D بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
أكمل :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. إذن الرباعي ABCD له ضلعان متقابلان
[....] و [.....] ..... وحاملاهما ..... فهو ......
نستنتج أن قطريه [AC] و [.....] لهما نفس .....

2 A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية.



أنشىء النقطة D بحيث القطعتان [AC] و [BD] لهما نفس المنتصف.
قارن بين : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$.





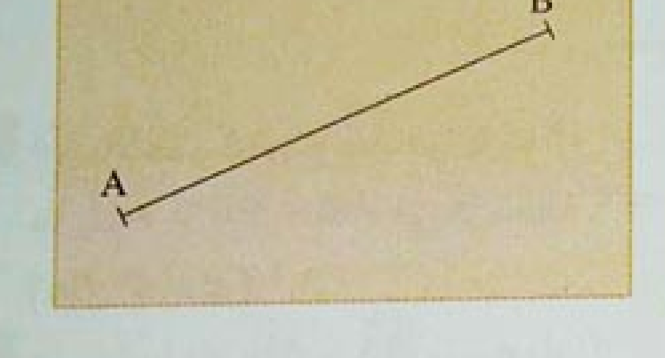


1 أنشىء النقطة M منتصف [AB].

أكمل:

الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MB}$ ....

ونكتب : $\overrightarrow{AM}$ .... $\overrightarrow{MB}$.



2 أنشىء النقطة M بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.

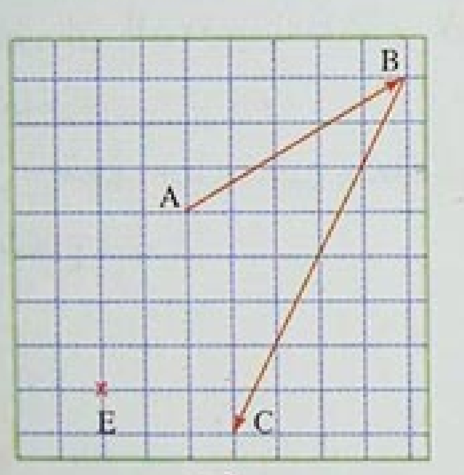
ماذا تمثل النقطة B بالنسبة للقطعة [AM]؟ (برّر جوابك).

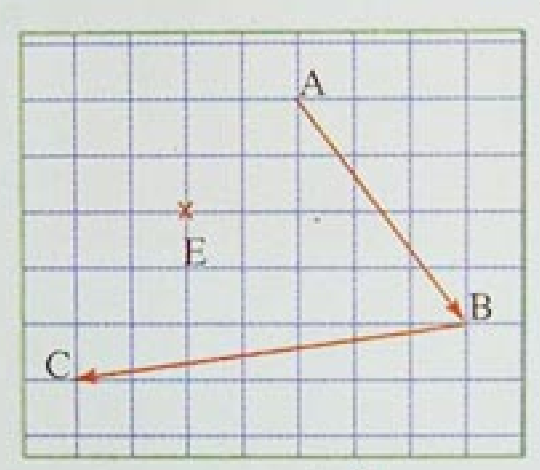


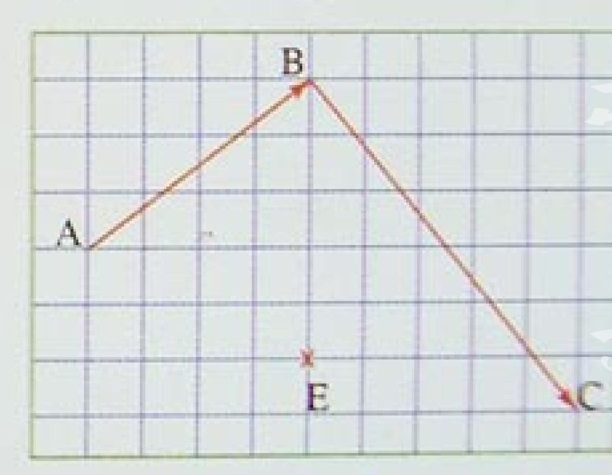
تركيب انسحابين (مجموع شعاعين)

1 أنشىء في كل حالة : النقطة 'E صورة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

النقطة "E صورة 'E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.





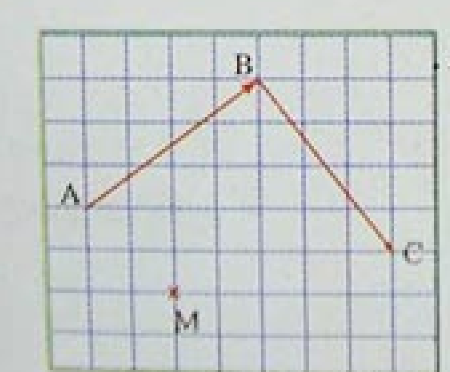


نقول إن "E صورة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوعا بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.

أو "E صورة E بتركيب هذين الانسحابين.

2 أنشىء النقطة 'M صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

"M صورة 'M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.



بين أن :

1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'}$.

2) $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{CM''}$.

3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MM''}$.

نقول إن "M صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.



ملاحظة

الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوعا بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

يسمى الشعاع $\overrightarrow{AC}$ مجموع الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}$.

ونكتب : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ وتسمى علاقة شال.



7 علاقة شال، الشعاعان المتعاكسان

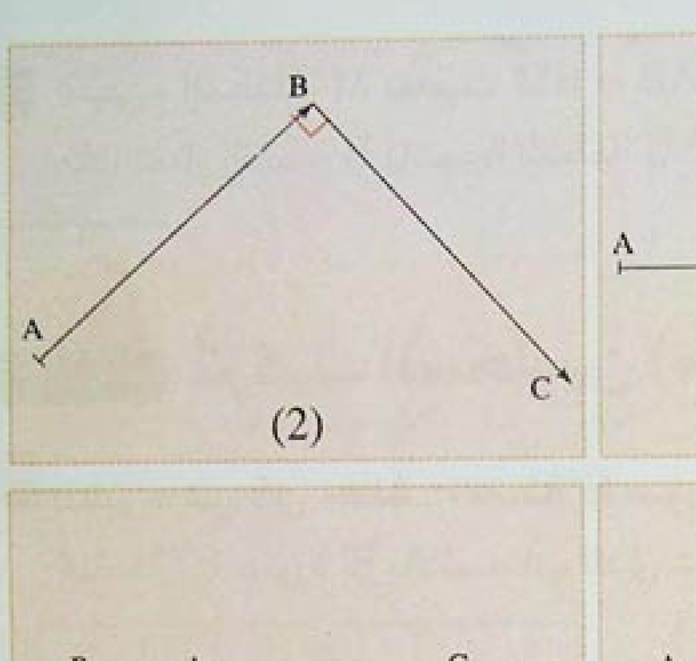
A ، B ، C ثلاث نقط بحيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

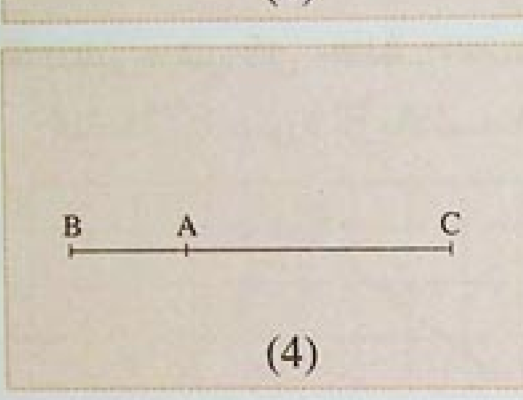
نفس النقطة

1 لوّن بالأحمر الشعاع $\overrightarrow{AC}$ في كل حالة :

هل $AB + BC = AC$ في كل حالة ؟

(علل إجابتك).





2 هل الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متساويان ؟

(علل ذلك).

لدينا حسب علاقة شال :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

* الشعاع $\overrightarrow{AA}$ يسمى الشعاع المعدوم ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{0}$.

* نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان.

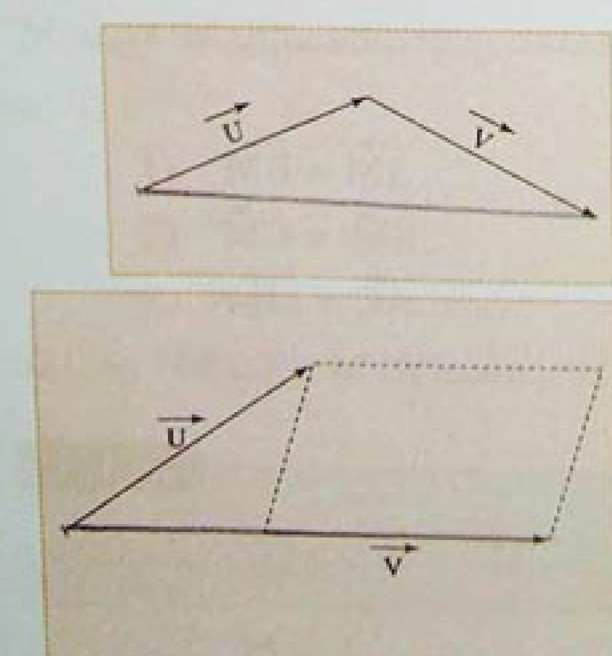
أكمل : مجموع شعاعين متعاكسين هو الشعاع .... .

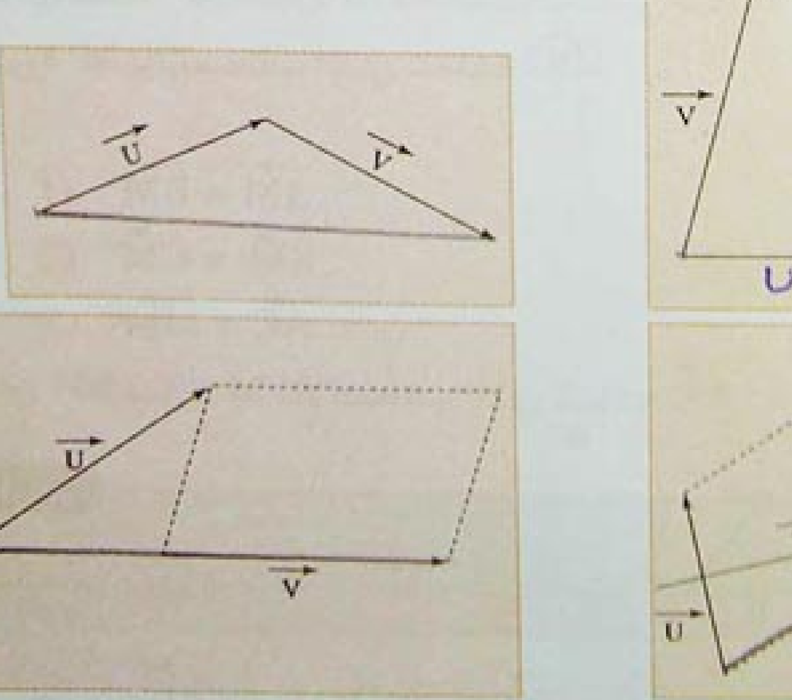
8 تمثيل مجموع شعاعين

$\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$ شعاعان.

1 نشيء ممثلا للمجموع $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ في كل حالة من الحالات الآتية :







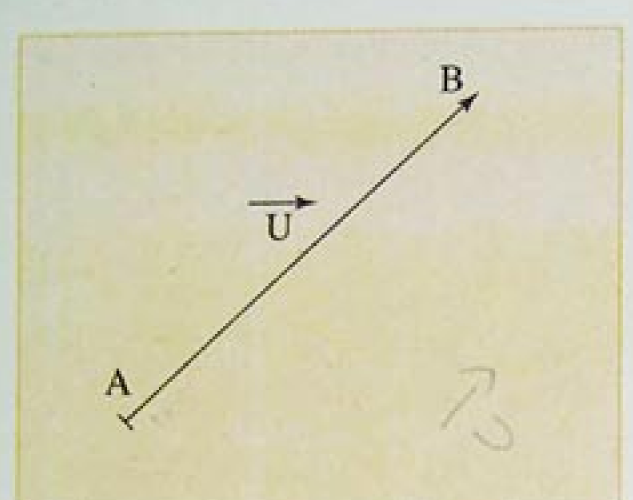
معارف

1 مفهوم الشعاع

A و B نقطتان مختلفتان من المستوي.
الانسحاب الذي يحوّل A إلى B يعرف شعاعا
نرمز له بالرمز $\overrightarrow{U}$ مثلا..



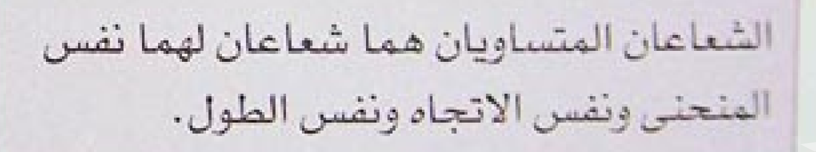
- الثنائية النقطية (A,B) تعين شعاعًا نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$.



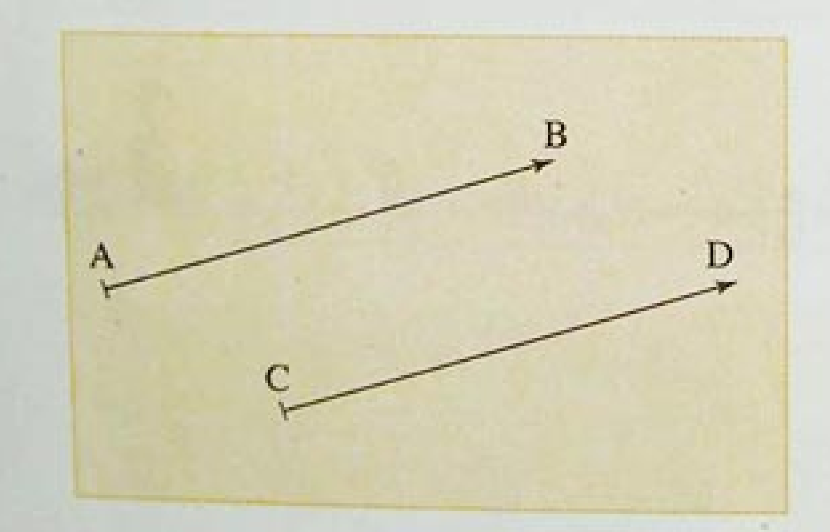
- نقول إن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ممثل الشعاع $\overrightarrow{U}$ ونكتب $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{AB}$.
- الإتجاه من A إلى B هو إتجاه الشعاع $\overrightarrow{U}$.
- منحى المستقيم (AB) هو منحى الشعاع $\overrightarrow{U}$.
- طول القطعة [AB] هو طول الشعاع $\overrightarrow{U}$.

- الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ هو الإنسحاب الذي يحوّل A إلى B.

2 تساوي شعاعين



الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المنحنى ونفس الاتجاه ونفس الطول.



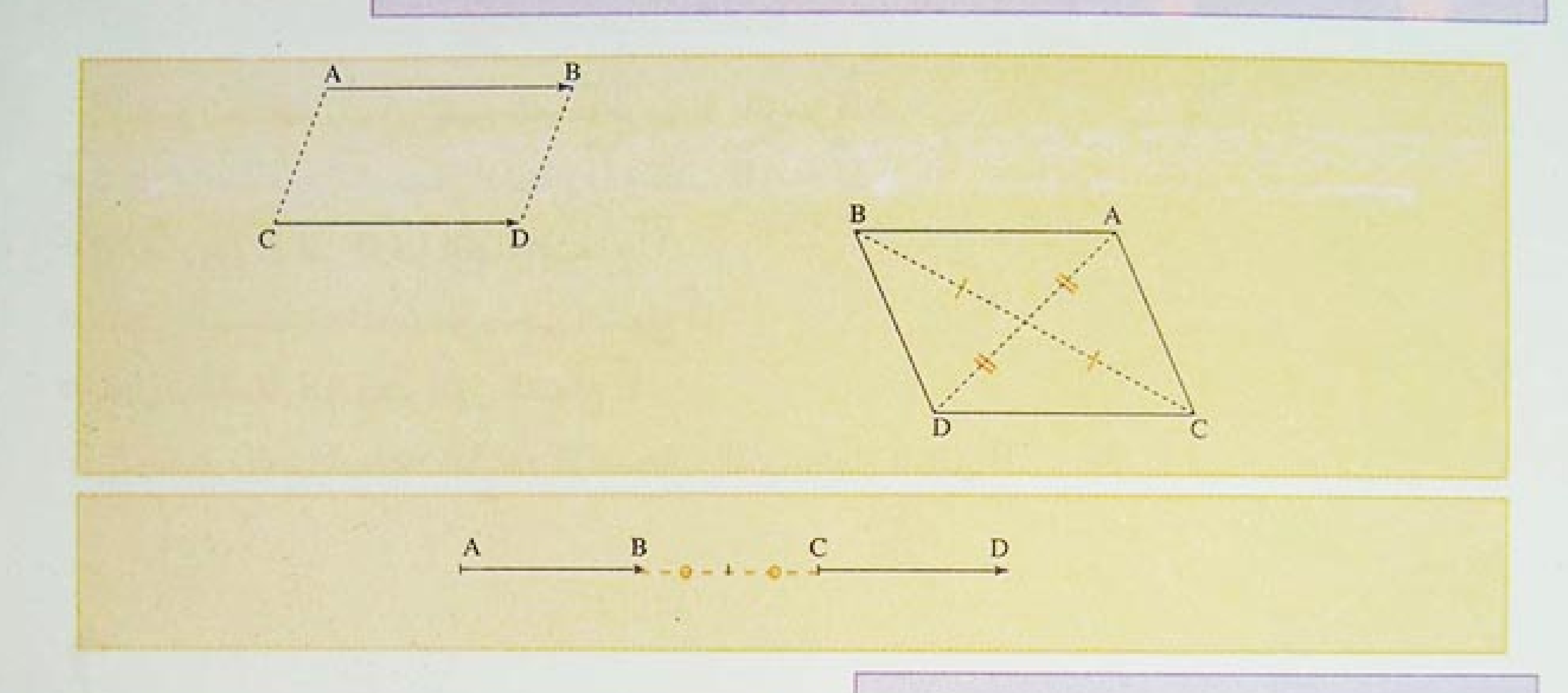


الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان يعني أن :

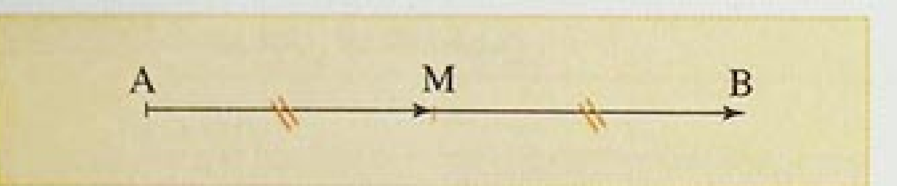
- المستقيمين (AB) و (CD) لهما نفس المنحنى.
- لنصفي المستقيمين [AB) و [CD) نفس الاتجاه.
- $AB = CD$.

ونكتب $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
نقول إن D هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

A و B و C و D أربع نقط من المستوي بحيث أن النقطتين C و D لا تنتميان إلى المستقيم (AB).
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن ABDC متوازي أضلاع.
A و B و C و D أربع نقط من المستوي.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف.



A و B نقطتان مختلفتان.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ يعني M منتصف [AB].



3 تركيب انسحابين (مجموع شعاعين)

A و B و C ثلاث نقط من المستوي.
تركيب الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ متبوعا بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

نقول إن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$. ونكتب :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(هذه العلاقة تسمى علاقة شال).

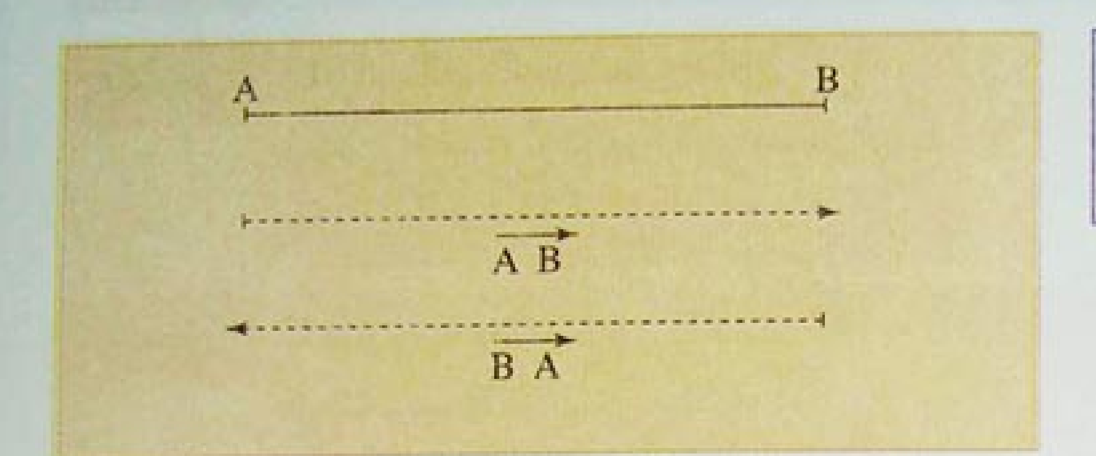




4 الشعاعان المتعاكسان

A و B نقطتان. لدينا $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$.
الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يسمى معاكس الشعاع $\overrightarrow{BA}$.

ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

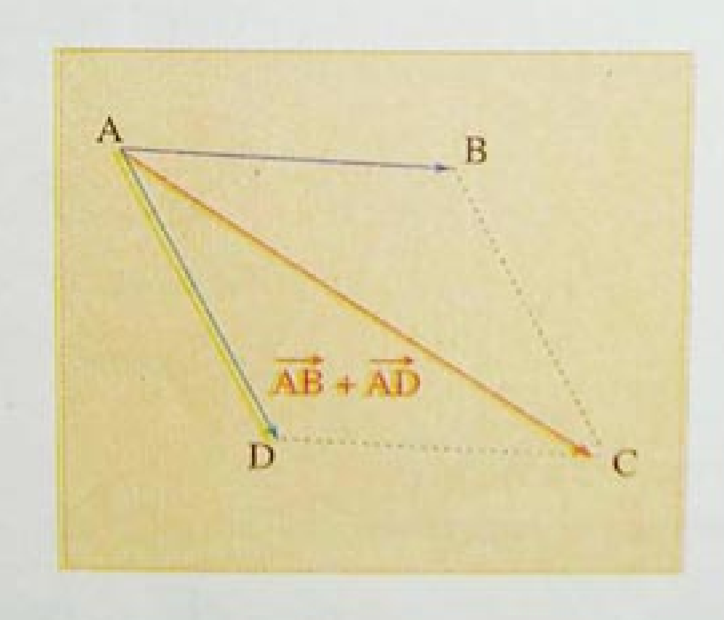


5 تمثيل مجموع شعاعين لهما نفس المبدأ

إذا كان ABCD متوازي أضلاع،
فإن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

التبرير : إذ ا كان ABCD متوازي أضلاع، فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
إذن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

حسب علاقة شال : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



كيف نبرهن أن شعاعين متساويان

طريقة لكي نبرهن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان يكفي أن نثبت أن الرباعي ABDC متوازي أضلاع.

تمرين

SBD مثلث. E منتصف [SD].

أنشىء النقطة C نظيرة B بالنسبة إلى E.

بين أن $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{SB}$.

الحل

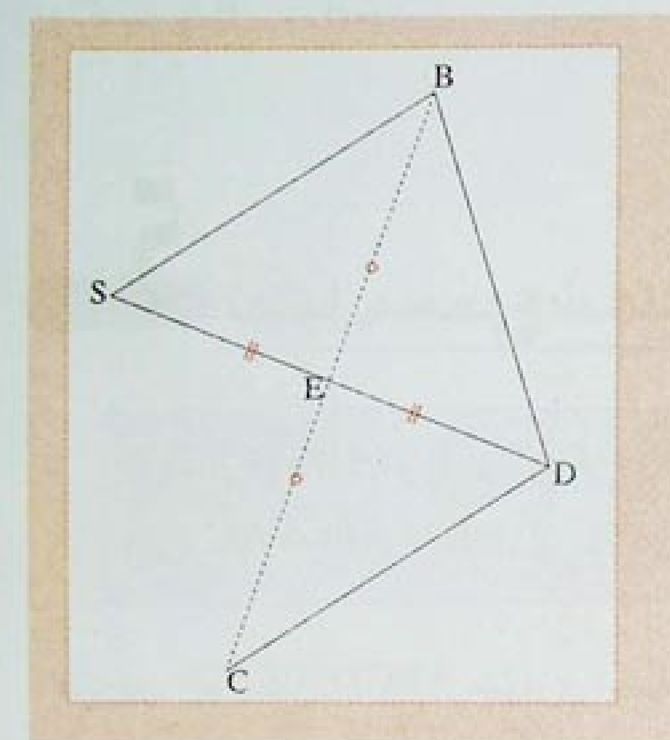
C نظيرة B بالنسبة إلى E يعني $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$.

E منتصف [SD] يعني $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{SE}$.

في الرباعي SBDC: القطران [BC] و [SD] لهما نفس المنتصف E.

إذن : الرباعي SBDC متوازي أضلاع.

ومنه : $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{CD}$.



كيف نبرهن أن رباعيا متوازي أضلاع

طريقة لكي نبرهن أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع يكفي أن نثبت أن :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ أو $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ أو $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

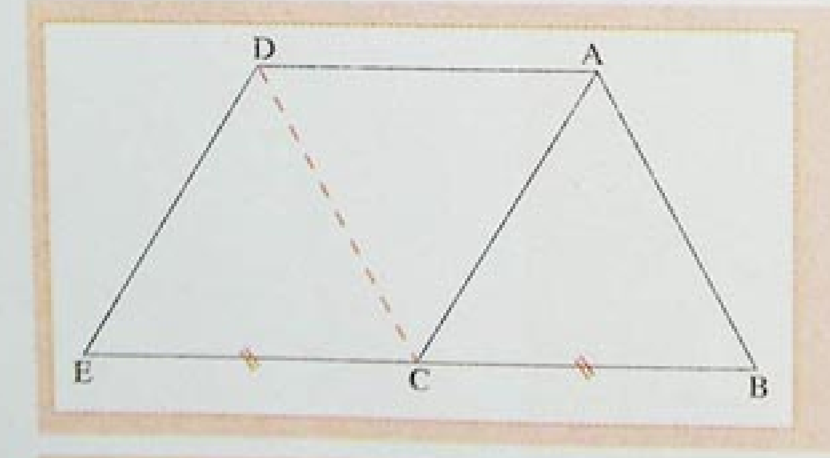
تمرين

ABC مثلث.

عين النقطة D بحيث $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

عين النقطة E بحيث C منتصف [BE].

بين أن الرباعي ADEC متوازي أضلاع.



الحل

لدينا : C منتصف [BE] يعني $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$

ونعلم أن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ومنه $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$.

في الرباعي ADEC : الضلعان [AD] و [CE] لهما نفس الطول وحاملاهما متوازيان.

إذن : الرباعي ADEC متوازي أضلاع.



طرائق وتمارين محلولة

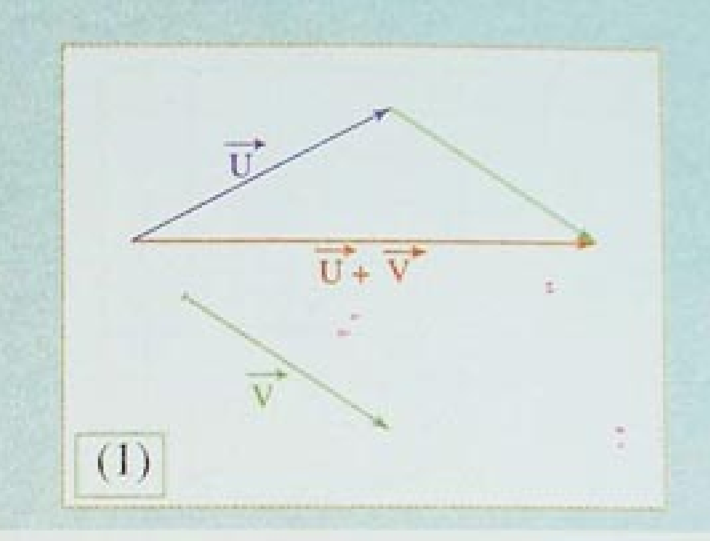
تمثيل مجموع شعاعين

طريقة

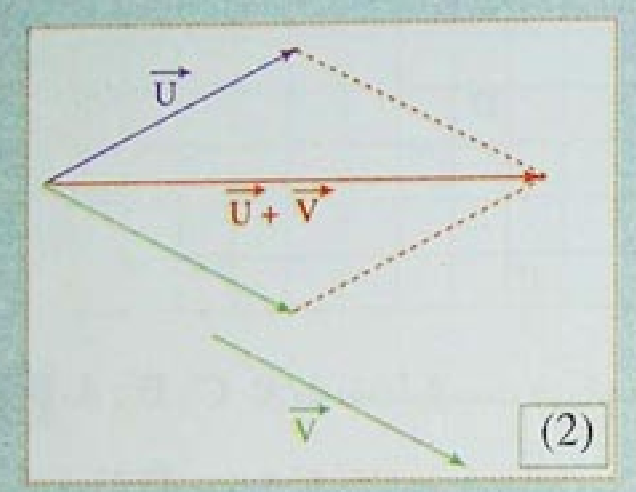
لتعيين ممثل لمجموع الشعاعين $\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$ نتبع إحدى القاعدتين :

1- ننشىء ممثلا للشعاع $\overrightarrow{V}$ من نهاية الشعاع $\overrightarrow{U}$، ثم نطبق علاقة شال (كما هو مبين في الشكل (1)).

2- ننشىء ممثلا للشعاع $\overrightarrow{V}$ من بداية الشعاع $\overrightarrow{U}$، ثم نطبق قاعدة متوازي الأضلاع (كما هو مبين في الشكل (2)).



(1)



(2)

تمرين

A ، B ، C ثلاث نقاط ليست في استقامية.

أنشىء النقطة E بحيث أن :

E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.

أنشىء النقطة K بحيث $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1- بين أن $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CE}$. واستنتج أن C منتصف [EK].

الحل

1- لنبين أن $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CE}$.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ يعني أن ABKC متوازي أضلاع

ومنه :

$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BA}$ (1).

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ يعني أن AECB متوازي أضلاع.

ومنه :

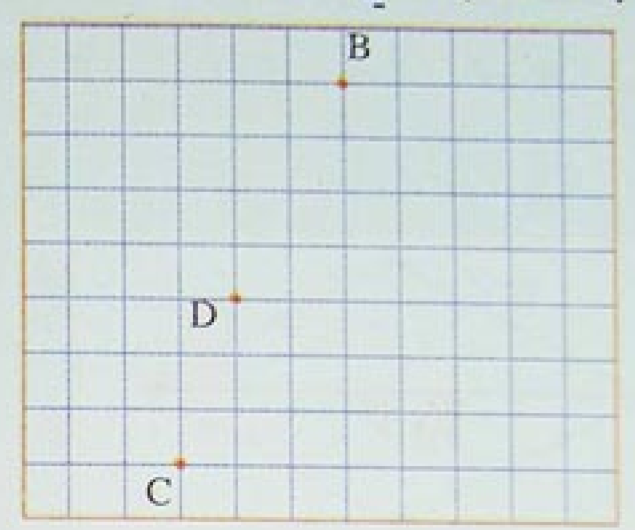
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ (2).

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CE}$.

بما أن $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CE}$ فإن C منتصف [KE].

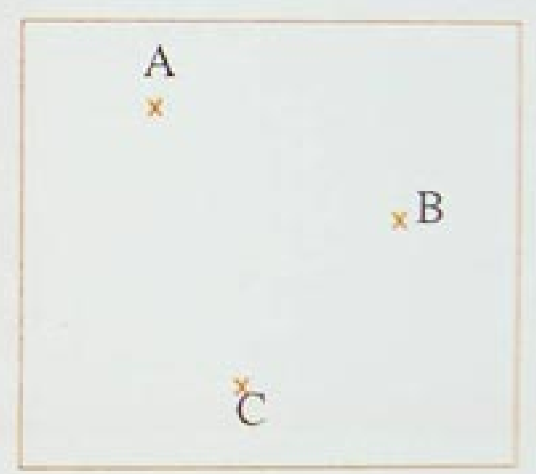
الأشعة والانسحاب

1 أنشىء النقطتين E و G صورتي النقطتين C و D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.



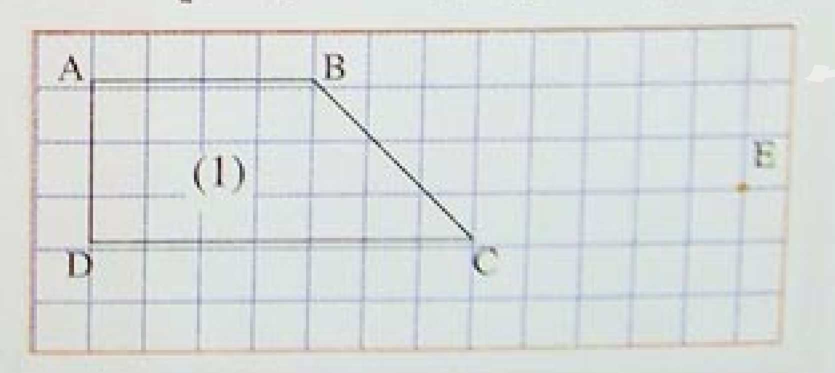
2 A ، B ، C ثلاث نقاط ليست في استقامية.

عين النقطة D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$.
عين النقطة K صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

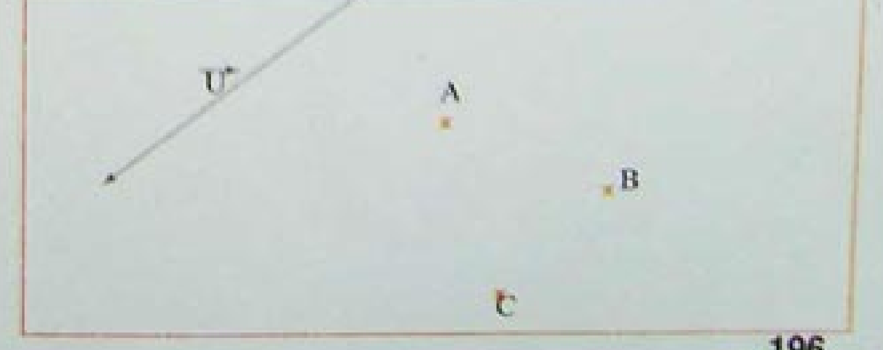


3 انقل على ورقة مرصوفة الشكل الموالي :

أنشىء صورة الشكل (1) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BE}$.



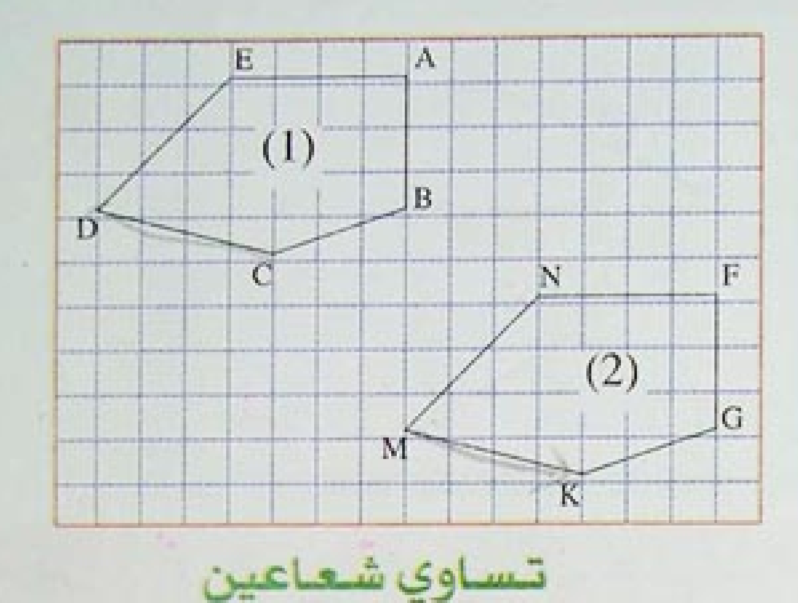
4 أنشىء النقط 'A ، 'B ، 'C صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{U}$.



5 الشكل (1) هو صورة الشكل (2) بانسحاب.

أكمل ما يلي:

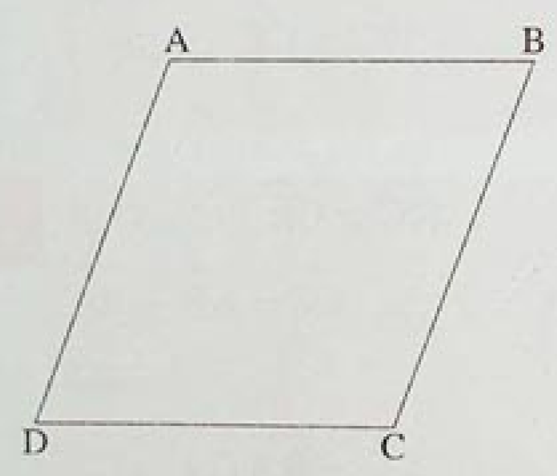
E صورة ...... بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{FN}$.
...... صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{KG}$.
C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه ....
N صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{D}$.



تساوي شعاعين

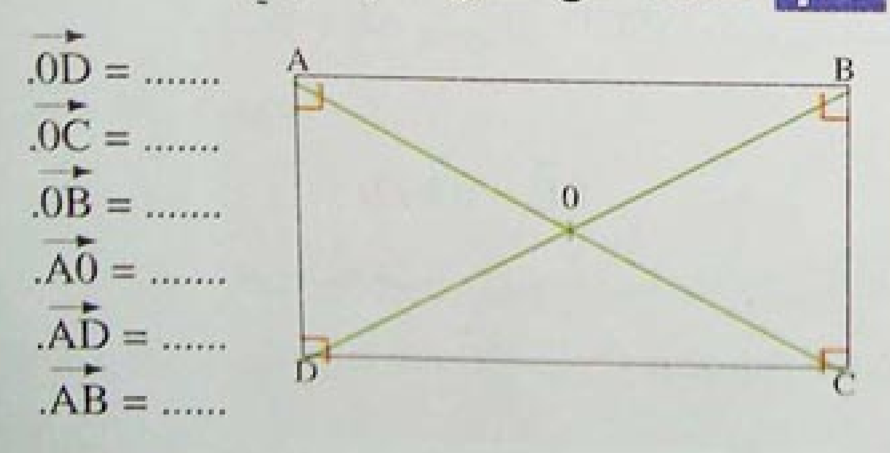
6 ABCD متوازي أضلاع.

استخرج من الشكل كل الأشعة المتساوية.



7 اعتمادا على الشكل أكمل ما يلي :

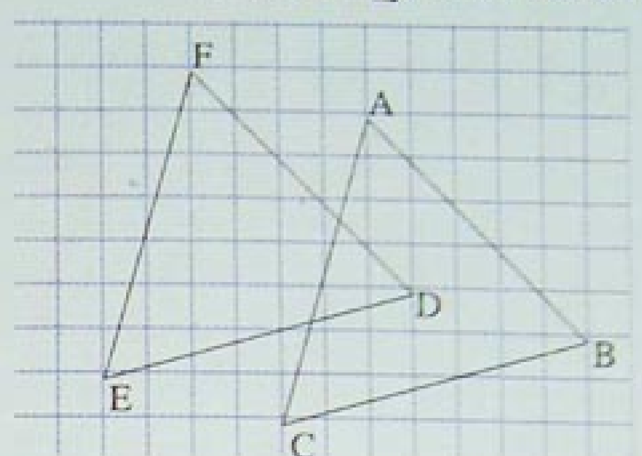
$\overrightarrow{0D}$ = ...
$\overrightarrow{0C}$ = ...
$\overrightarrow{0B}$ = ...
$\overrightarrow{A0}$ = ...
$\overrightarrow{AD}$ = ...
$\overrightarrow{AB}$ = ...



تمارين للتطبيق المباشر

8 المثلث ABC صورة المثلث FDE بانسحاب.

اكتب الأشعة المتساوية الممكنة.



9 ABC مثلث.

أنشىء النقط D ، E ، F بحيث :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

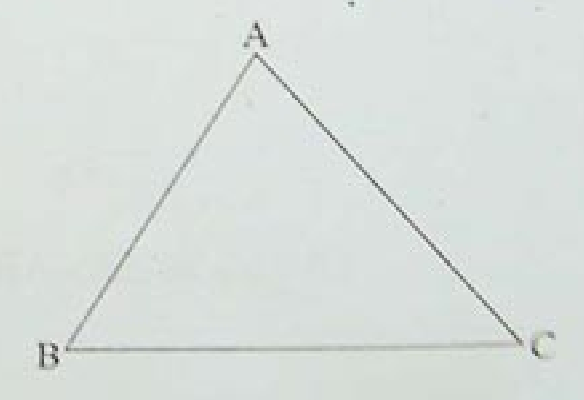
10 [AB] قطعة مستقيمة طولها 5 cm.

أنشىء النقطة C بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

أنشىء النقطة D بحيث $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$.

11 ABC مثلث. أنشئ الشعاع $\overrightarrow{V}$ الذي مبدؤه هو نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$.

أنشىء الشعاع $\overrightarrow{S}$ الذي مبدؤه النقطة C و $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{AB}$.



12 $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعان متساويان.

بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ متساويان.

13 ABCD متوازي أضلاع.

E نقطة بحيث $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{0}$.

أنشىء الشكل.

بين أن الرباعي BECD متوازي أضلاع.

14 A ، B نقطتان من مستقيم. M منتصف [AB].

1) عين النقطة C بحيث $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}$.

عيّن في هذه الحالة الشعاع $\overrightarrow{AC}$.

2) عيّن النقطة D بحيث $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MA}$.

15 ABC مثلث.

1) عيّن النقاط D ، E ، F بحيث :

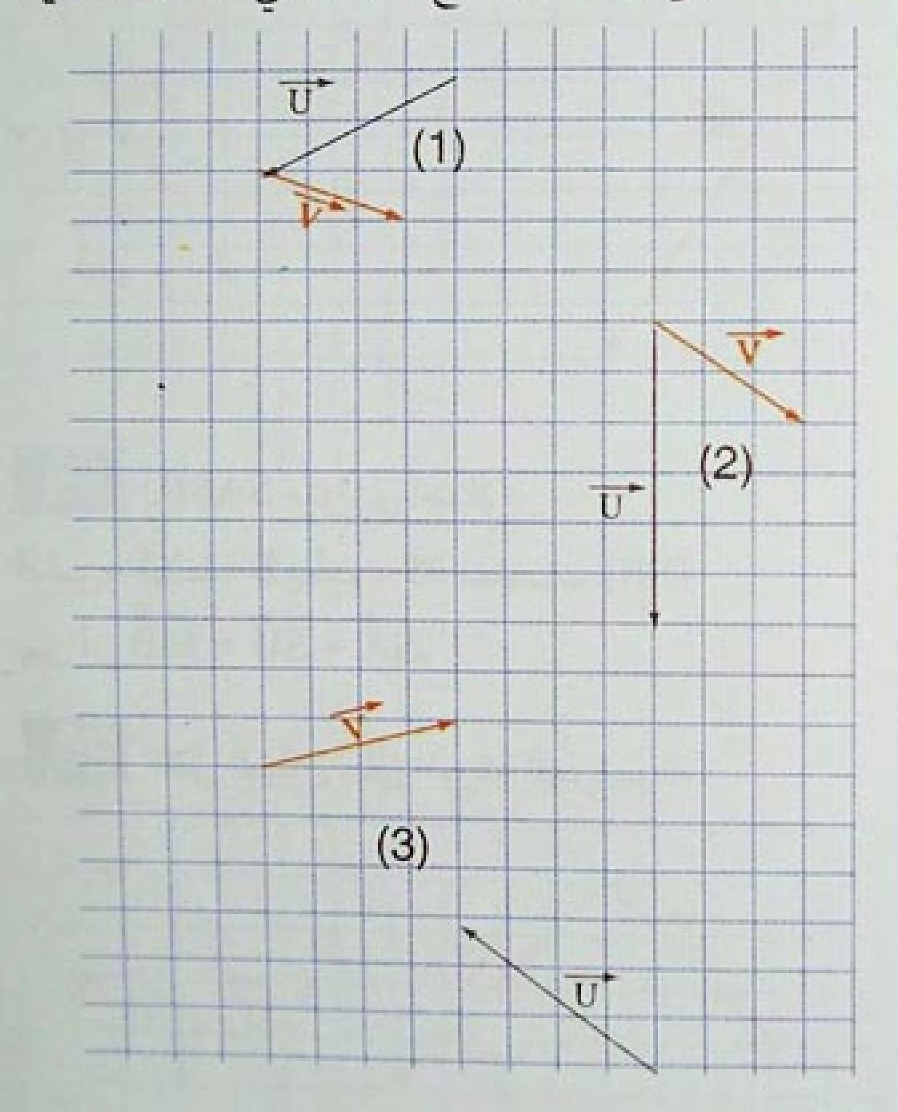
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$.

2) ما نوع كل من الرباعيات ABDC ، BCDE ، ACBF؟

3) استنتج أن الرباعي ADEF متوازي أضلاع.

تركيب انسحابين، مجموع شعاعين

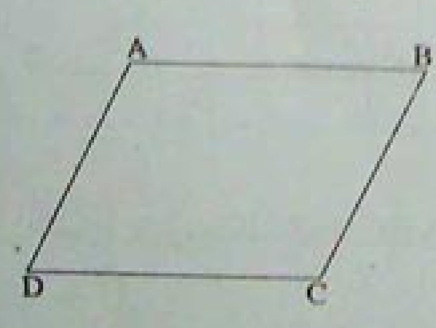
16 أنشىء ممثلا للشعاع $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ في الحالات التالية:



17 ABCD متوازي أضلاع.

اعتمادا على الشكل أكمل ما يلي :





1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ ....

2) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} =$ ....

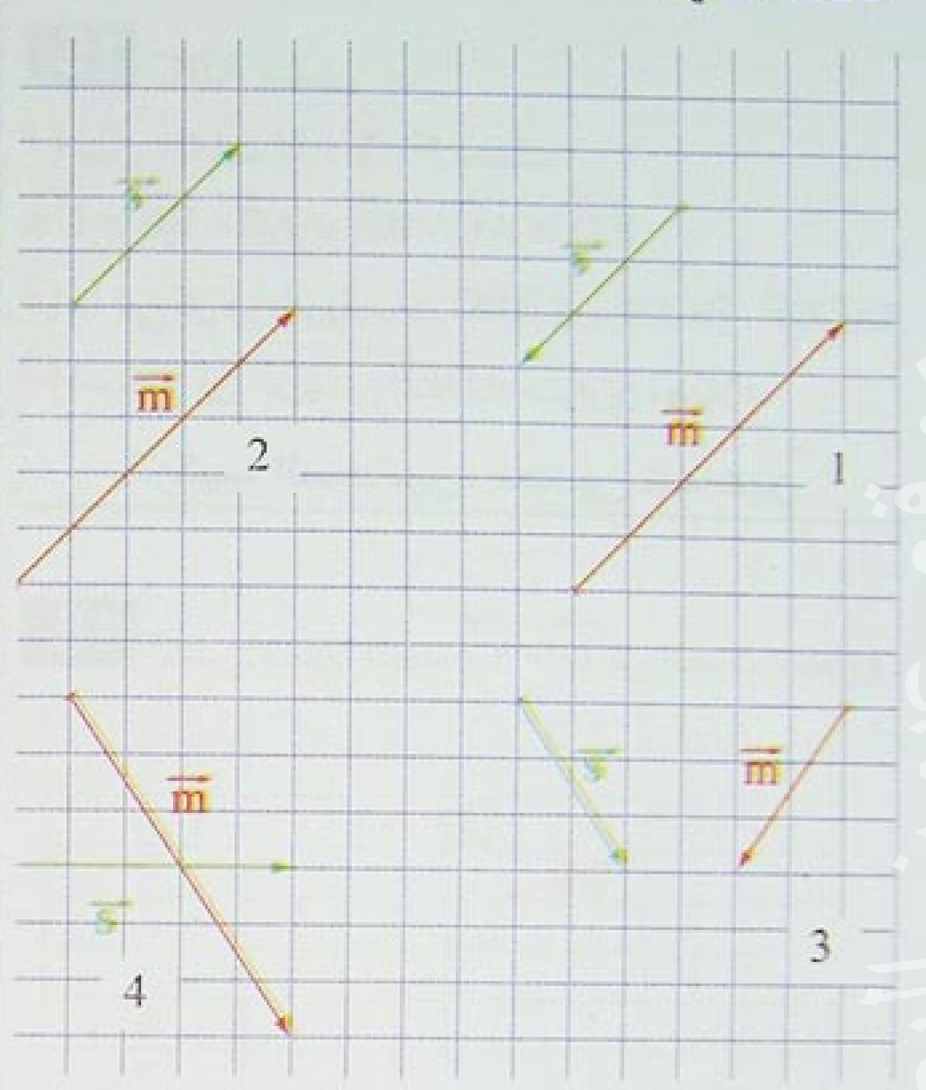
3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} =$ ....

4) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} =$ ....

5) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$ ....



18 أنشئ ممثلا للشعاع $\vec{s}+\vec{m}$ في في كل حالة من الحالات الآتية:

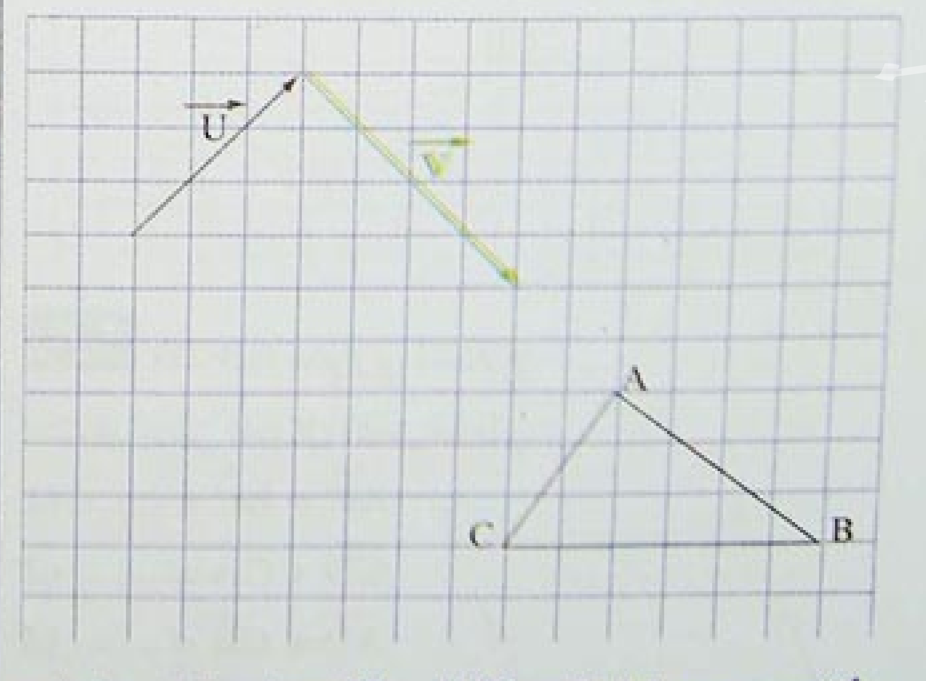


19 SAMU متوازي أضلاع.

أنشئ النقطة B بحيث M منتصف [SB].

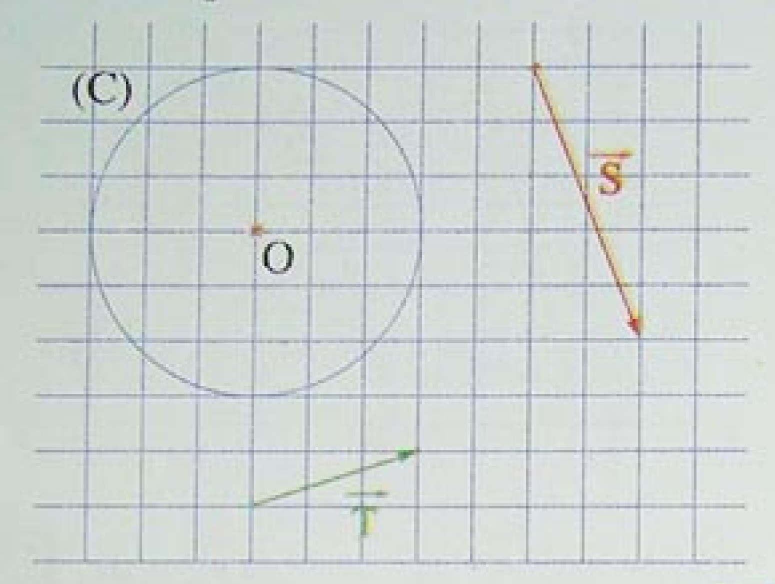
بين أن $\vec{SA}+\vec{SU}=\vec{MB}$.

20 انقل الشكل على الورقة المرصوفة.



أنشئ صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}+\vec{V}$.

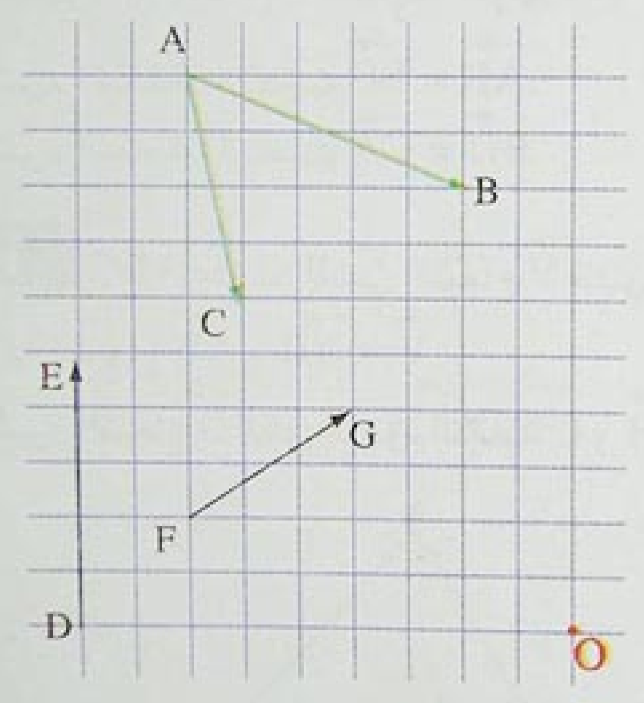
21 أنشئ صورة الدائرة (C) بتركيب الانسحاب الذي شعاعه $\vec{S}$ متبوعا بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{T}$.



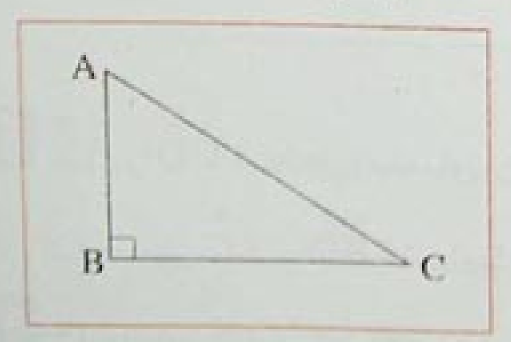
22 أنشئ النقطة M بحيث:

$\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{AC}$.

أنشئ النقطة N بحيث $\vec{ON}=\vec{DE}+\vec{FG}$.



23 ABC مثلث قائم في B.



عين النقطة E بحيث :

$\vec{EB}+\vec{EC}=\vec{EA}$.

تمارين

1 ABC مثلث حيث :

$AB = 6$ ؛ $AC = 8$ ؛ $BC = 10$.

بين أن المثلث ABC قائم.

لتكن M منتصف [BC].

أنشىء النقطة H صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

ما نوع الرباعي AMHB؟

استنتج الطول BH.

2 RST مثلث متساوي الساقين قاعدته [ST].

أنشىء النقطة E بحيث $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$.

بين أن الرباعي RSET معيّن.

أنشىء النقطة M بحيث $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TM}$.

ما نوع المثلث MER؟ (علّل).

أثبت أن $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{TM} = \overrightarrow{0}$.

3 PIN مثلث.

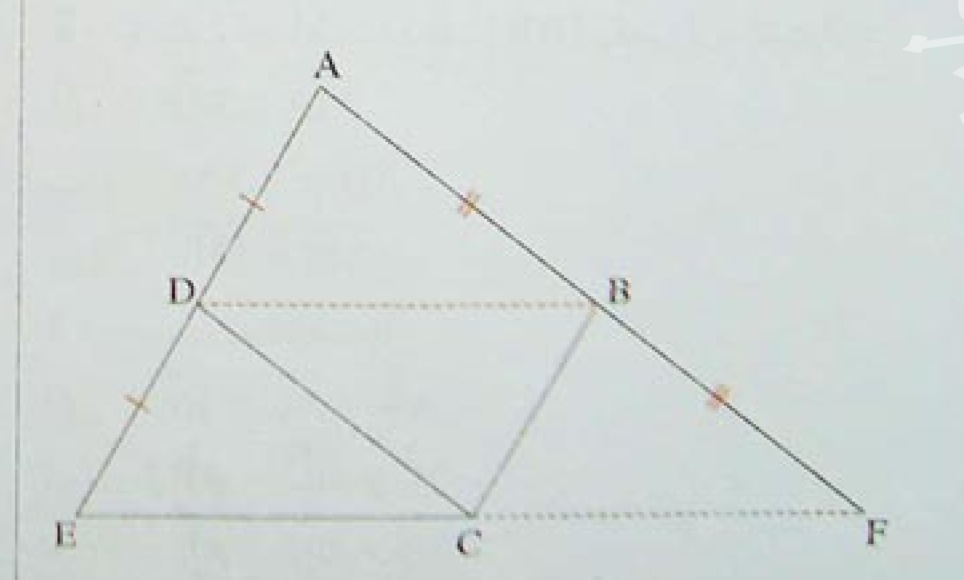
أنشىء النقطتين E ، L بحيث $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{IE}$ ؛ $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{NP}$.

بين أن [PE] و [LI] لهما نفس المنتصف.

أعط ممثلا لكل من الأشعة $\overrightarrow{U}$ ، $\overrightarrow{S}$ ، $\overrightarrow{M}$ حيث :

$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{NP}$ ؛ $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{U}$ ؛ $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{PI} - \overrightarrow{EI}$.

4 ABCD متوازي أضلاع.



1) بين أن $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$ ؛ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$.

2) استنتج أن C منتصف [EF].

5 ABC مثلث.

أنشىء النقطة D بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$.

أنشىء النقطة E بحيث $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$.

بين أن المستقيمين (BC) و (AE) متوازيان.

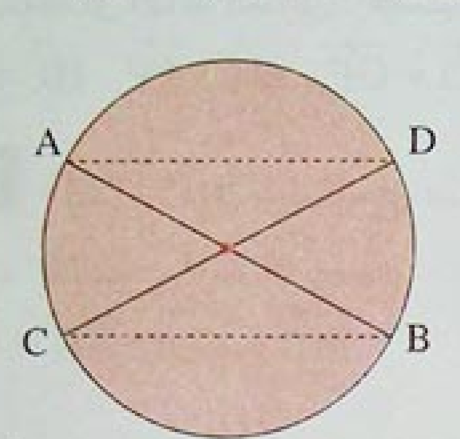
6 SAM مثلث.

أنشىء ممثل $\overrightarrow{U}$ للمجموع : $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SM}$.

أنشىء النقطة I بحيث $\overrightarrow{SI} = -(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SM})$.

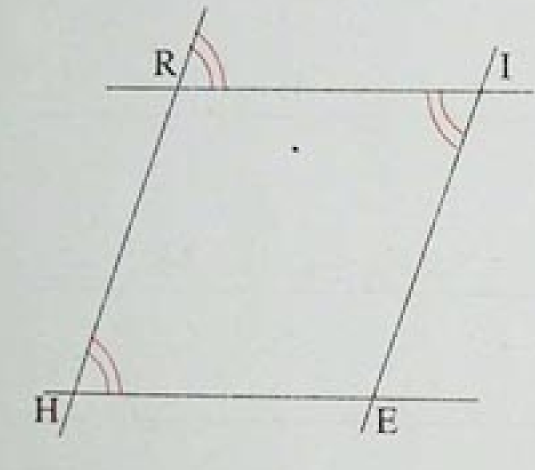
7 بين أن :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.



8 بين أن :

$\overrightarrow{RH} = \overrightarrow{IE}$.

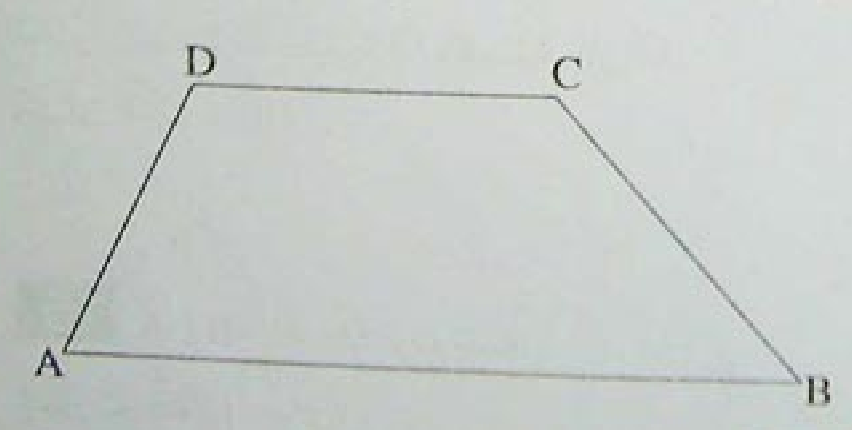


9 ABCD شبه منحرف قاعدتاه [DC] و [AB]

(كما هو مبين في الشكل).

أنشىء النقطة E بحيث $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$.

بين أن النقاط B ، E ، A في استقامية.



10 ABC مثلث.

أنشىء النقطتين R و S بحيث $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BC}$.

بين أن $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AS}$.

استنتج أن A منتصف [RS].





11 NOM مثلث متساوي الساقين قاعدته [NO].

أنشىء النقطة I بحيث $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{NI}$.

بين أن المستقيمين (MI) و (NO) متعامدان.

12 EFGH مربع طول ضلعه 4 cm.

1) أنشىء النقطة K صورة النقطة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EG}$.

2) باستعمال نقاط الشكل، احسب المجاميع :

$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}$ ، $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$ ، $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FK}$.

13 (d1) و (d2) مستقيمان متوازيان.

أنشىء النقطتين N ، M بحيث :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ ؛ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CN}$.

(d2) A B

(d1) C

14 ABC مثلث.

أنشىء النقطتين D و E بحيث :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

لتكن O نقطة تقاطع [AE] و [BC].

أنشىء النقطة 'O نظيرة O بالنسبة إلى C.

بين أن $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DO'}$.

15 D ، C ، B ، A أربع نقط :

انقل، ثم أكمل:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + ...$ ؛ $\overrightarrow{CD} = ... + \overrightarrow{BD}$.

استنتج أن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

بين أن $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

16 RST مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي R.

حيث RS = 5 cm ، ST = 6cm.

العمود المتعلق بالضلع [ST] يقطع [ST] في H.

بين أن H منتصف [ST].

احسب الطول RH.

أنشىء النقطة D نظيرة النقطة E منتصف [RS] بالنسبة إلى النقطة H.

ما نوع الرباعي ETDS؟

بين أن $\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{ED}$.

17 ABC مثلث.

عين النقط N ، M ، K بحيث :

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM}$ ؛ $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}$.

أنشىء ممثلا للشعاع $\overrightarrow{U}$ حيث:

$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC}$.

بين أن $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MK}$.

17 أصحيح أم خاطئ ؟

ضع العلاقة X في الخانة المناسبة.

1 - إذا كانت A نظيرة B بالنسبة إلى C فإن :

أ) ☐ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ ، ب) ☐ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ،

جـ) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

2 - لاثبات أن M منتصف [AB] يكفي أن نثبت أن:

أ) ☐ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ ،

ب) ☐ AB = 2 AM ،

جـ) ☐ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

3 - حسب علاقة شال ....

أ) ☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ ،

ب) ☐ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ ،

جـ) ☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

4 - ABCD متوازي أضلاع. إذن...

أ) ☐ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ ،

ب) ☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ ،

جـ) ☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

مســـائل

1 ABCD مستطيل حيث :

$AB = 12\ cm$ ؛ $BC = 4{,}8\ cm$.

E نقطة من [AB] بحيث :

$EB = 2{,}4\ cm$.

F منتصف [DC].

1) احسب القيمتين المضبوطتين لـ EC و DE.

اشرح لماذا :

$EC = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ؛ $DE = \frac{24\sqrt{5}}{5}$.

2) ما طبيعة المثلث CDE؟ برّر ذلك.

3) G صورة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{FC}$.

ما نوع الرباعي EGCF ؟

ما نوع الرباعي EGFD ؟

4) المستقيم (FG) يقطع [EC] في H ويقطع [BC] في I.

بين أن المستقيمين (EI) و (CG) متعامدان.

5) J نقطة بحيث $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{ED}$.

ما نوع الرباعي DECJ؟

هل النقط J ، F ، E في استقامية؟

2 أنشىء دائرة مركزها O ونصف قطرها 4 cm.

ليكن [AB] قطر هذه الدائرة.

عين النقطة C من الدائرة بحيث : $AC = 6\ cm$.

أنشىء النقط S ، N ، I صور النقط A ، C ، B على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$.

احسب محيط ومساحة المثلث SIN.

3 ABC مثلث قائم في C.

أنشىء النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

لتكن O نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ABCD.

أنشىء الدائرة التي تشمل النقط C ، O ، B بعد تعيين مركزها . برّر.

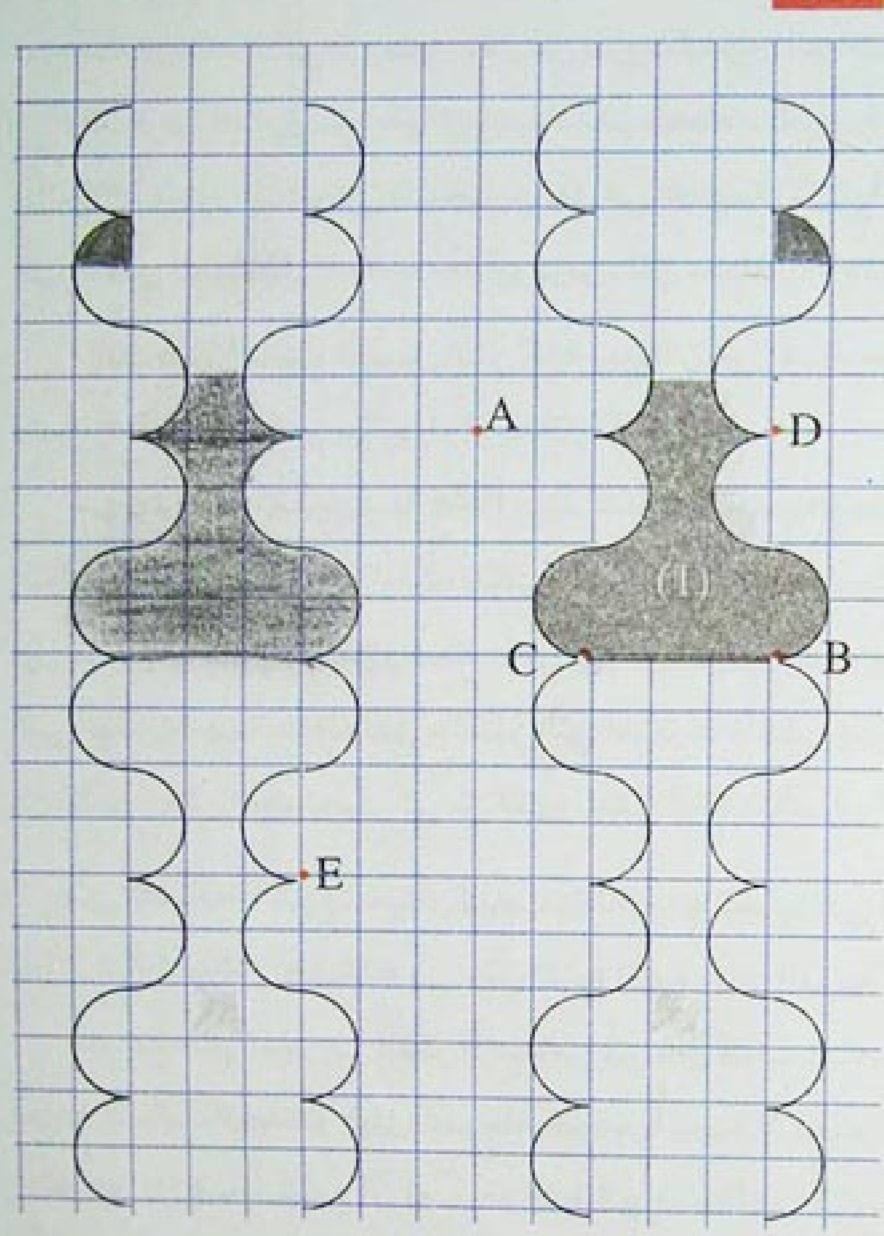
أنشىء النقطتين M ، P بحيث :

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$ ؛ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

اذكر التحويل الذي من أجله تكون النقط C ، M ، P صور O ، B ، D على الترتيب.

بين أن النقط P ، C ، M في استقامية.

4



- لوّن بالأزرق صورة الشكل (1) بالتناظر الذي مركزه A.
- لوّن بالأخضر صورة الشكل (1) بالتناظر الذي محوره (BC).
- لوّن بالأحمر صورة الشكل (1) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DE}$.

من التاريخ

أحمد سليم سعيدان (1914-1991)

حياته : ولد أحمد سليم سعيدان بمدينة صفد الفلسطينية، وتوفي بالعاصمة الأردنية. ويعتبر سعيدان من أشهر مؤرخي الرياضيات العربية الإسلامية في هذا العصر. وقد زاول تعليمه الابتدائي والإكمالي في مسقط رأسه، ثم رحل من صفد إلى القدس لمواصلة دراسته الثانوية. ومنها انتقل إلى بيروت ليدرس الرياضيات بجامعتها. ثم نال شهادة الدكتوراه من جامعة الخرطوم بالسودان.

وقد درّس المؤرخ سعيدان الرياضيات في المعاهد التربوية العالية بعدة مدن سودانية، وكذا بجامعة الخرطوم. ثم عاد إلى وطنه عام 1969 وزاول التعليم في فلسطين وعمل في الجامعة الأردنية كأستاذ للرياضيات حتى بلوغه سنّ التقاعد سنة 1979. وعندئذ رحل إلى القدس المحتلة لرئاسة جامعة أبو ديس، لكن سلطات الاحتلال الإسرائيلية طردته منها عام 1981.

إليك هذا المقطع الجميل الذي كتبه سعيدان في إهداء جاء في مقدمة أحد كتبه، وهو يكشف عن معاناته خلال حياته وينبىء بالمرارة التي كان يشعر بها جراء الاحتلال الإسرائيلي :

"من يوم 5 أيار/مارس سنة 1948، منذ غادرت القدس هائما على وجهي، أحمل أطفالي على كتف، وهمومي على كتفٍ، طوّفت في البلاد. رافقتُ وصادقتُ وزاملتُ. ولكني بقيت غريبا - أقرأ غربتي على وجوه الرفاق والأصدقاء والزملاء، وأكتم مع اللوعة حنيني إلى أول هواء تنسمته، وأول لبن رضعته. وفي يوم من الأيام اجتزت جسرَ العذابِ وعدت إلى القدس. لقيت الهواء الذي إليه حننت والعيون التي افتقدت وبسمات الصدق والطهر التي اشتهيت : أهلي وبيتي وأحبتي. ولكنَّ لقيتهم جميعا في بيتهم غرباء، حتى الهواء شكًا لي من الأسرِ، حتى الحليب بكَى لي من القهرِ. فإلى أولئك الأسْرَى المقهورين وراء النهر، إلى أهلي وبيتي وأحبّتي، أهدي هذا الكتاب".

من أعماله : تفرغ سعيدان للبحث والتأليف والتحقيق في التراث العلمي العربي الإسلامي فنفض عنه الكثير من الغبار. وساهم بدراساته وأبحاثه وتحقيقاته في حقل تاريخ الرياضيات العربية الإسلامية مساهمة معتبرة. إليك رأيه في هذا التراث :

"لقد بلغ علم الجبر في الفكر الإسلامي في مثل كتاب "الباهر" للسموءل مبلغا يدفعنا إلى القول بأننا لا نتصور مفهوما جبريا مما يعرفه الطالب المعاصر قبيل المرحلة الجامعية، مما لا نجده في كتب الجبر العربية، عدا مفهوم الجذر السالب ومفهوم الأعداد التخيلية. بل قد نستطيع أن نعدّد مفاهيم في هذه الكتب لا يعرفها هذا الطالب، لقد صنع الفكر العربي في الجبر ما صنع الفكر الإغريقي في هندسة أقليدس. ولكن الهندسة حقل مغلق اكتمل على يد الإغريق، والجبر مضمار رحب شق العرب طريقه ومهدوها".

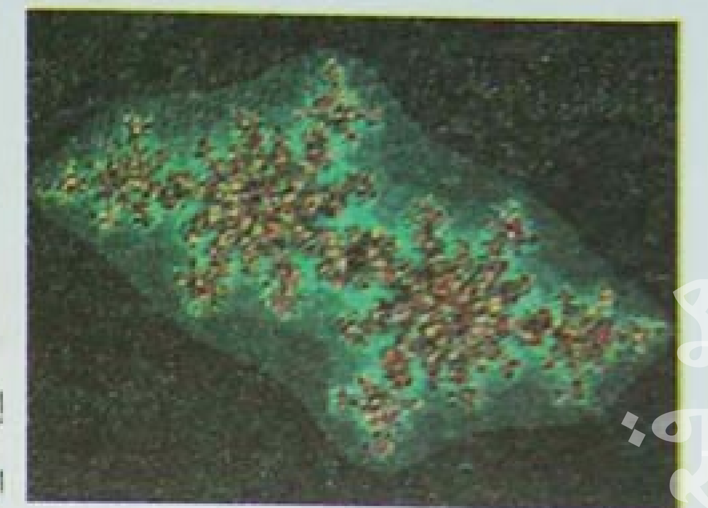
ومن المعلوم أن إسهامه بالمقالات والبحوث في المجلات الغربية كانت كثيرة. كما ألّف كتبا علمية ثقافية للأطفال في شكل قصص، ثم تطور هذا النشاط إلى ترجمة كتب في الرياضيات لتلاميذ المرحلة المتوسطة والثانوية والجامعية يفوق عددها خمسين كتابا مدرسيا.

ولا شك أن إسهامه الكبير في التعريف بالتراث العلمي هو الذي جعل مؤرخ الرياضيات الشهير بوريس روزنفلد يكتب عند رحيل سعيدان: "يعتبر رحيل سعيدان فراغا كبيرا لمؤرخي الرياضيات في العالم".



الرياضيات تتقدم

الهندسة الكسورية (2)



نواصل حديثنا حول الهندسة الكسورية : لننطلق من قطعة مستقيمة وتقسمها إلى 3 أقسام متساوية ونحذف الجزء الأوسط ونعوضه بضلعين مساويين له كما يبيّن الشكل الأيمن، ثم نكرّر نفس العملية على كل ضلع فنحصل على الشكل الأيسر :

ونواصل إجراء نفس العملية ثالثة ورابعة، ... فيتكوّن لدينا الشكلان المواليان :

واصل العملية بنفسك وسترى كيف سيتعقد الرسم وليس مستبعدا أن تحصل على شكل من صنف الشكل الوارد في أعلى الصفحة.

ينبغي ألا ينسينا المظهر الساحر لأشكال الهندسة الكسورية جوانب هامة لهذه الهندسة. ففي الطبيعة تظهر هذه الهندسة في أمرين : أولهما هو دور هندسة حساب الاحتمالات (وهو فرع من فروع الرياضيات) إذ يبدو أن الهندسة الكسورية هي الهندسة الطبيعية للعديد من الظواهر العشوائية. أما ثانيهما فيظهر كلما احتجنا إلى رسم خطوط ذات أطوال غير منتهية محصورة ضمن سطح محدود أو رسم مساحات غير محدودة محتواة ضمن حجم محدود.

إن الهندسة الكسورية ليست نظرية مجردة، ذلك أنه تبيّن بأن الأشكال الكسورية أفضل من غيرها في تمثيل الجبال والسحب والكتل المجرية، وحتى الرئتين في جسم الإنسان، الخ. كما نجد آثارها في نظريات فيزيائية معقدة لها تطبيقات في الكيمياء وميكانيك السوائل والعلوم الطبيعية، وهنالك أيضا إمكانية تمثيل تطور ظواهر متحركة بواسطة الأشكال الكسورية. وعلينا ألا ننسى الجانب الجمالي المنقطع النظير الذي تمثله هذه الأشكال، وهو ما جعلها تؤدي دورا مهما في علم المعلومات البيانية. كما تستخدم الأشكال الكسورية في تحميل صور ثابتة أو متحركة في الحاسوب.





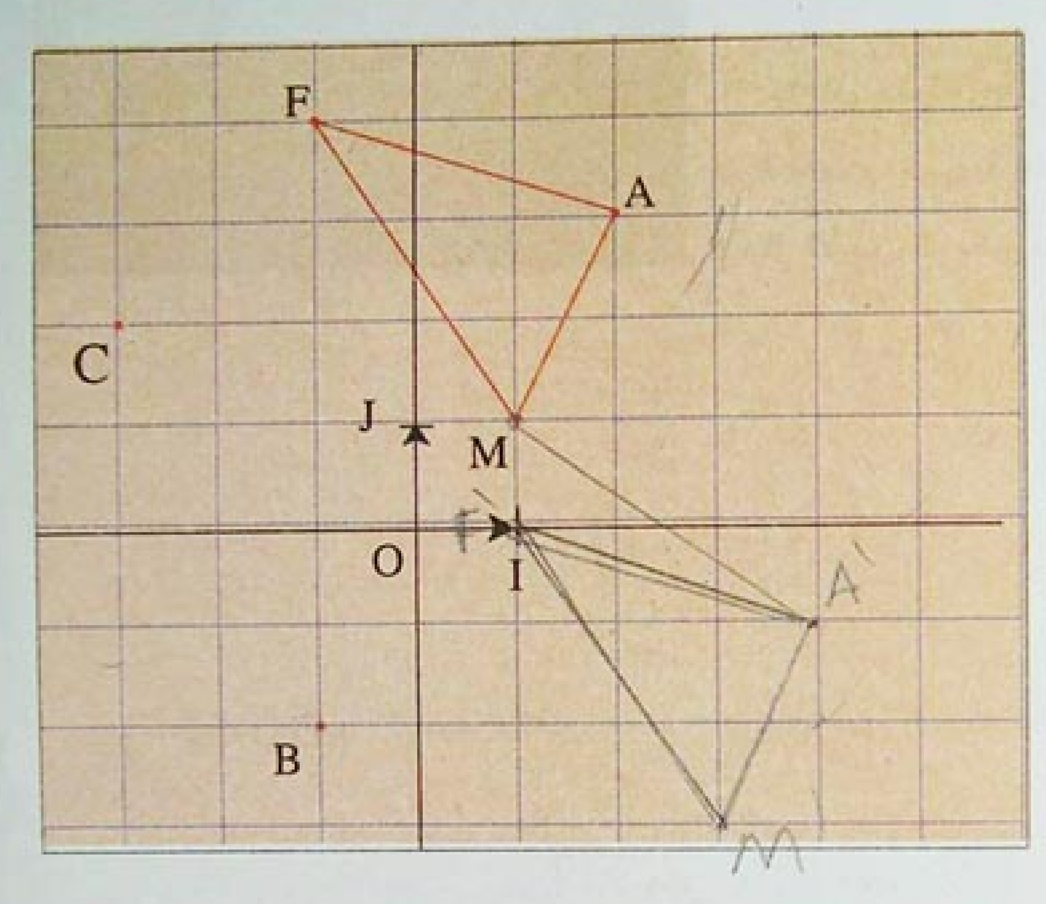
12 المعالم

تمهيد

1 ما هما إحداثيا كلّ من A ، M ، F.

• أنشئ المثلث A'M'F' صورة المثلث AMF بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$.

• أوجد إحداثيي كل من A' ، M' ، F'.



2 ABC مثلث قائم في B بحيث AB = 4 cm و AC = 6 cm.

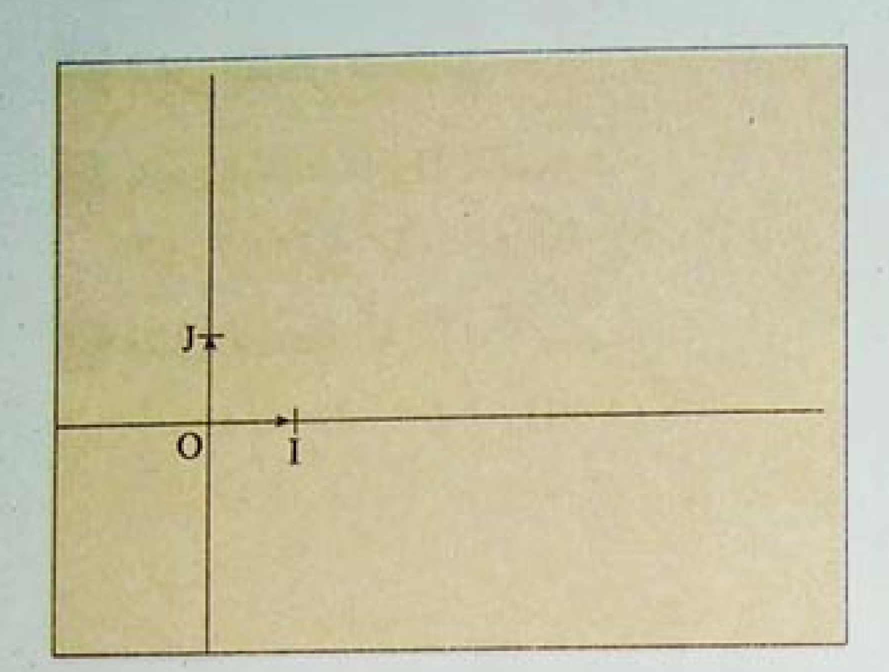
– أنشئ الشكل.

– أنشئ النقطتين B' و C' صورتي B و C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

– احسب القيمة المدوّرة إلى 0,1 cm للطول B'C'.



1 إحداثيتا شعاع



علّم النقط : $A(3;2)$ ؛ $B(-4;-1)$ ؛ $C(2;-3)$.

نقول إن إحداثيتي النقطة A هي **إحداثيتي** الشعاع $\overrightarrow{OA}$.

ونكتب $\overrightarrow{OA}(3;2)$.

ما هما إحداثيا كل من الشعاعين $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OC}$.

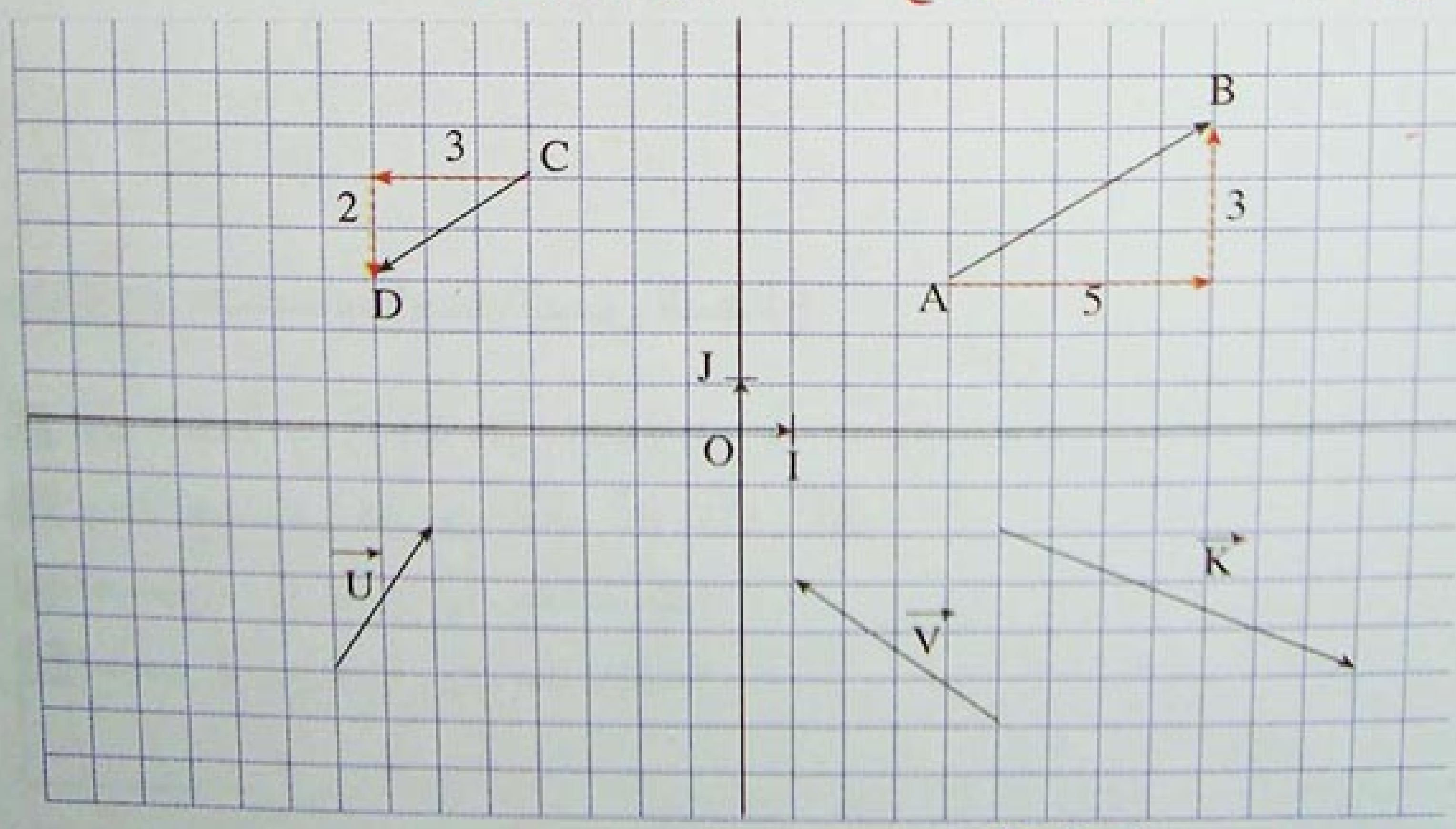
2 قراءة إحداثيتي شعاع

للانتقال من A إلى B نقوم بالانسحاب بخمسة مربعات (وحدات) أفقيا نحو اليمين متبوعا بالانسحاب بثلاث مربعات (وحدات) عموديا نحو الأعلى.

نقول إن **العددين** 5+ و 3+ هما **إحداثيتا الشعاع** $\overrightarrow{AB}$. فنكتب $\overrightarrow{AB}(5;3)$.

للانتقال من C إلى D نقوم بالانسحاب بثلاث وحدات أفقيا نحو اليسار متبوعا بالانسحاب بوحدتين عمودياً نحو الأسفل.

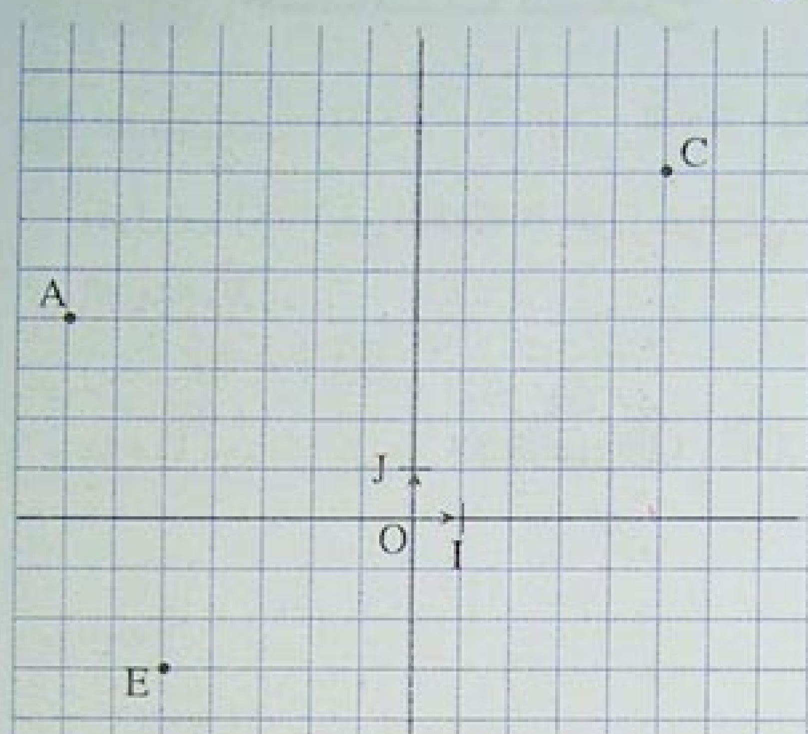
نقول إن **العددين** 3- و 2- هما **إحداثيتا الشعاع** $\overrightarrow{CD}$. ونكتب $\overrightarrow{CD}(-3;-2)$.



اوجد إحداثيتي كل من الأشعة $\overrightarrow{K}$ ، $\overrightarrow{V}$ ، $\overrightarrow{U}$.



3 تمثيل شعاع بمعرفة إحداثيتيه

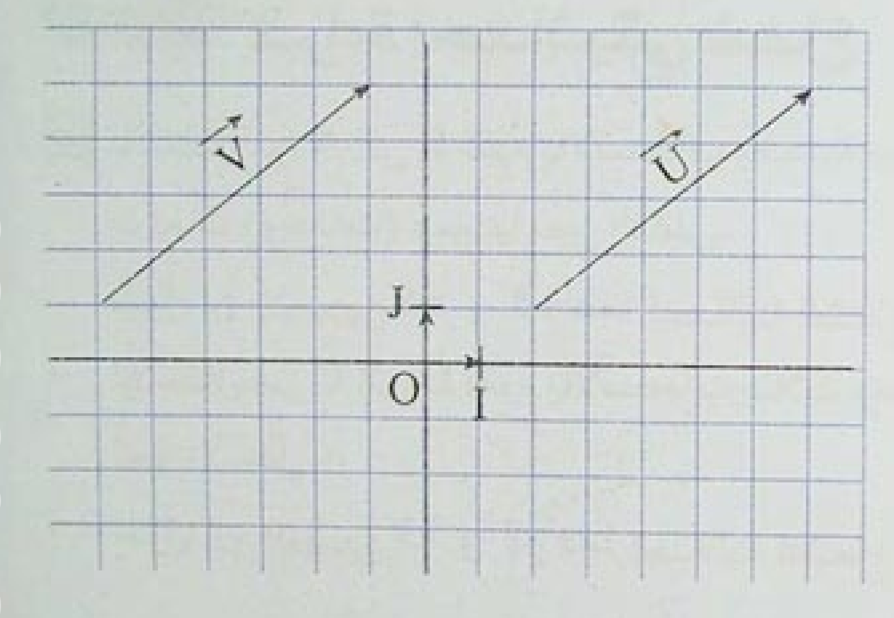


1 انقل الشكل المقابل :

2 عين النقط F ، D ، B بحيث :
$\overrightarrow{AB}(5 ; 6)$ ؛ $\overrightarrow{EF}(1 ; -2)$ ؛ $\overrightarrow{CD}(-1 ; -5)$.

3 مثل الأشعة $\overrightarrow{S}$ ، $\overrightarrow{T}$ ، $\overrightarrow{U}$ بحيث :
$\overrightarrow{S}(4 ; 4)$ ؛ $\overrightarrow{T}(-4 ; 2)$ ؛ $\overrightarrow{U}(4 ; 1)$.

4 تساوي شعاعين



إليك الشكل المقابل

1 هل الشعاعان $\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$ متساويان ؟

2 أوجد إحداثيتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$.

ماذا تلاحظ؟

5 حساب إحداثيتي شعاع

1 علّم النقط : $A(-1 ; 3)$ ؛ $B(4 ; 3)$ ؛ $C(-3 ; -3)$ ؛ $D(5 ; -5)$.

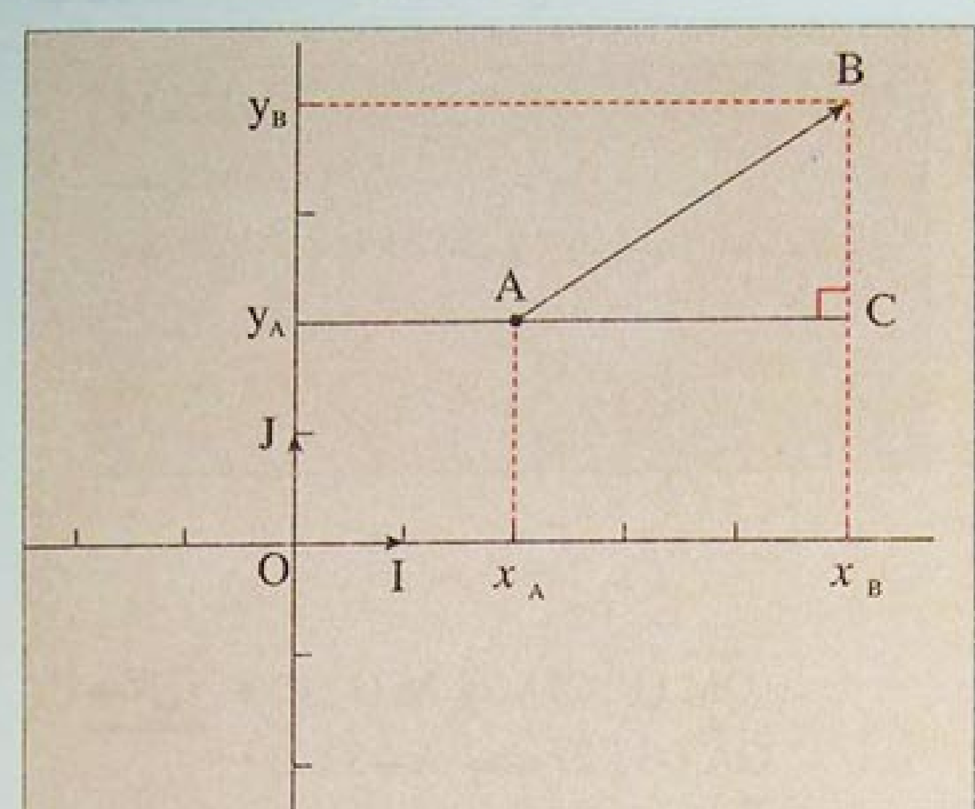
2 أوجد إحداثيتي كل من : $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

3 احسب $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$. ماذا تلاحظ؟

4 احسب $x_D - x_C$ و $y_D - y_C$. ماذا تلاحظ؟



6 المسافة بين نقطتين



1 انقل واكمل:

المثلث ABC ...... في ....

حسب نظرية .... لدينا :

$AB^2 = ... + ...$.

2 عبّر عن AC و BC بدلالة x_A ، x_B ، y_A ، y_B.

3 بيّن أن :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

4 احسب المسافة AB في كل حالة:

1) A (-2 ; 1) ؛ B (-2 ; 4).

2) A (-2 ; 2) ؛ B (3 ; 2).

3) A (2 ; 3) ؛ B (2 ; -4).

7 حساب إحداثيتي منتصف قطعة

A ، B ، C ، D نقط من مستو مزود بمعلم.

1 علّم النقط :

A (3 ; -2) ؛ B (-1 ; -2) ؛ C (5 ; 3) ؛ D (-1 ; 3).

2 عين النقطتين M ، N منتصفي [AB] و [DC] على الترتيب.

أوجد إحداثيتي كل من النقطتين M و N.

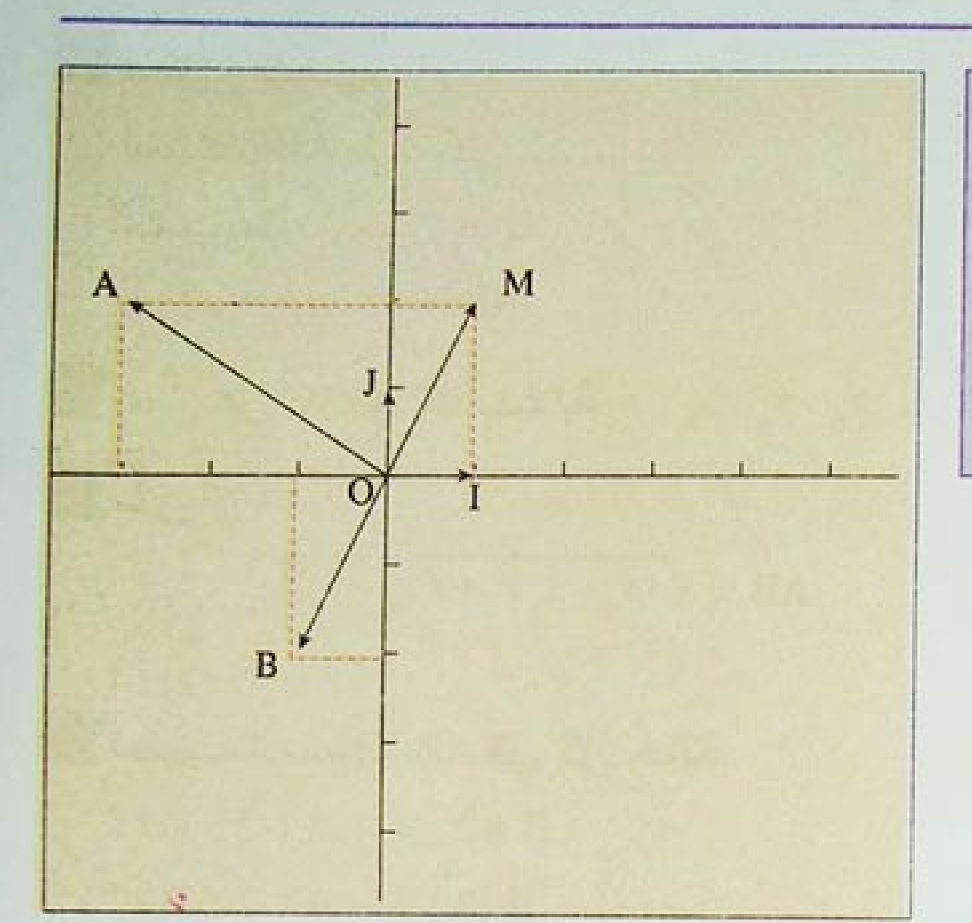
3 احسب $\frac{x_A + x_B}{2}$ و $\frac{y_A + y_B}{2}$. ماذا تلاحظ؟

احسب $\frac{x_D + x_C}{2}$ و $\frac{y_D + y_C}{2}$. ماذا تلاحظ؟



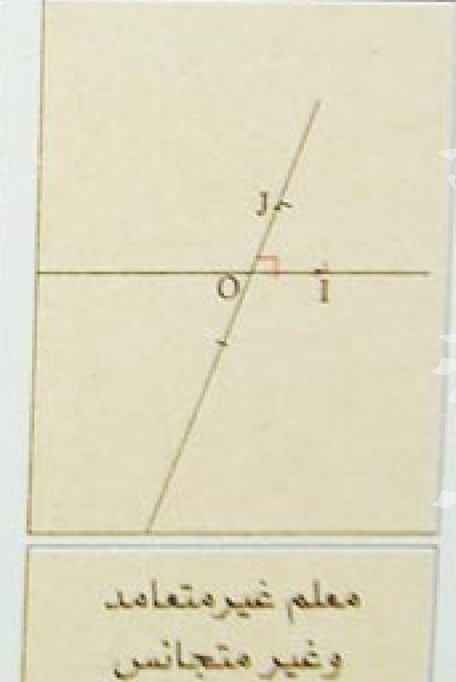
1 إحداثيتا شعاع

M نقطة من المستوي المزود بالمعلم (O , I , J) بحيث M (x ; y).
إحداثيتا النقطة M بالنسبة إلى هذا المعلم هما **إحداثيتا** الشعاع $\overrightarrow{OM}$ ونرمز لها بالرمز : $\overrightarrow{OM}\ (x\ ;\ y)$.

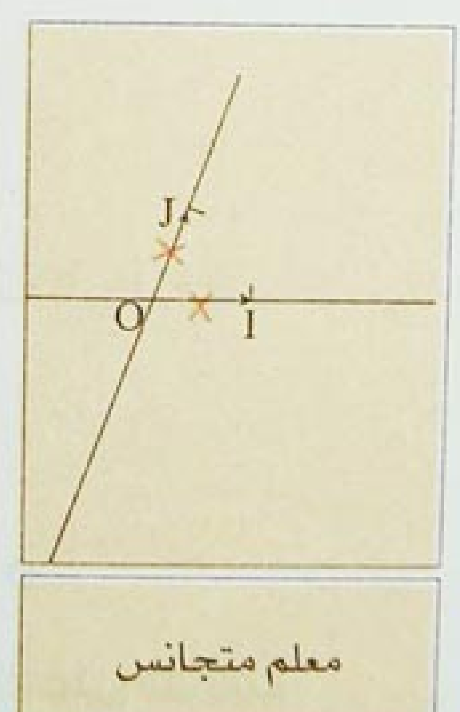


مثال :
- M (1 ; 2) ومنه $\overrightarrow{OM}$ (1 ; 2).
- A (-3 ; 2) ومنه $\overrightarrow{OA}$ (-3 ; 2).
- B (-1 ; -2) ومنه $\overrightarrow{OB}$ (-1 ; -2).

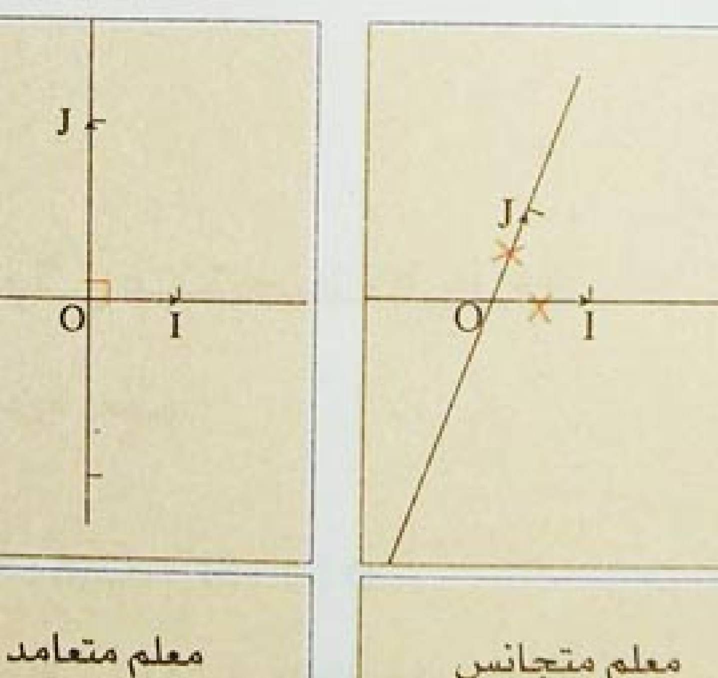
2 أنواع المعالم



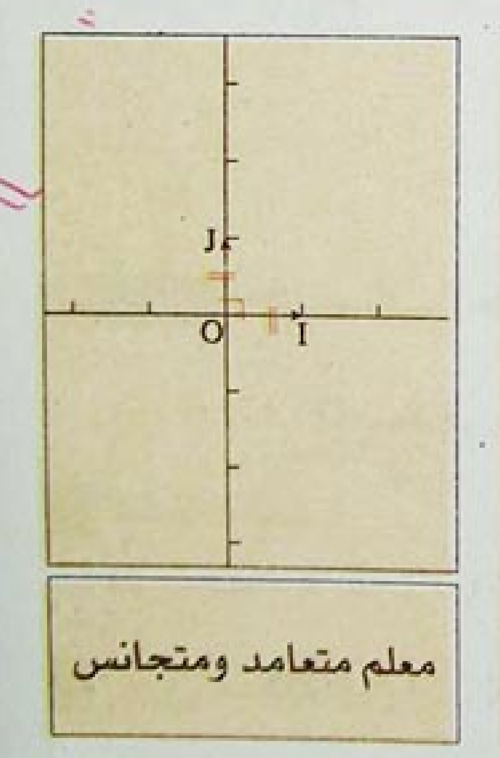
معلم غير متعامد وغير متجانس



معلم متجانس



معلم متعامد

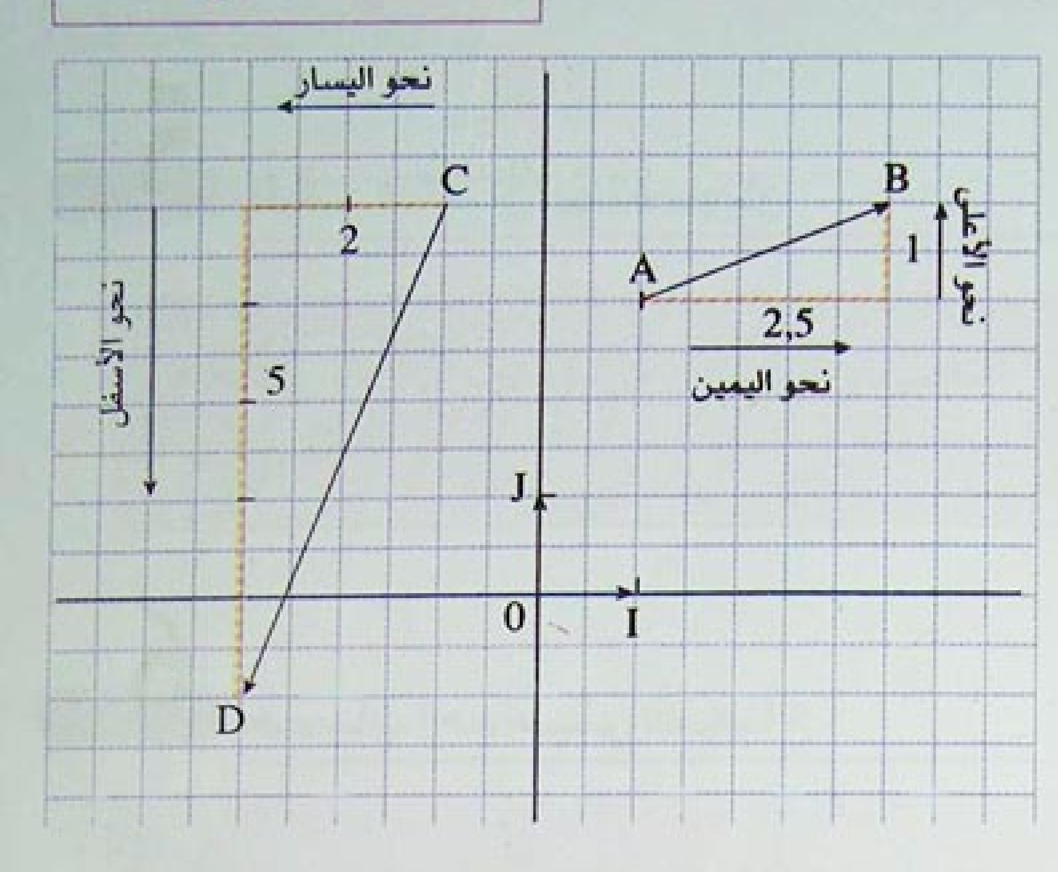


معلم متعامد ومتجانس

3 قراءة إحداثيتي شعاع

تقرأ إحداثيتا شعاع بالإزاحتين المتتاليتين اللتين تسمحان بالمرور من مبدأ الشعاع إلى نهايته.
الإزاحة الأولى تكون بالتوازي مع محور الفواصل.
الإزاحة الثانية تكون بالتوازي مع محور التراتيب.
نقرأ الإحداثية الأولى بالإزاحة الأولى (موجب، عندما ننتقل نحو اليمين وسالب، عندما ننتقل نحو اليسار).
نقرأ الإحداثية الثانية بالإزاحة الثانية (موجب، عندما ننتقل نحو الأعلى وسالب، عندما ننتقل نحو الأسفل).

مثال : الإحداثية الأولى لـ $\overrightarrow{AB}$ هو 2,5+.
الإحداثية الثانية لـ $\overrightarrow{AB}$ هو 1.
ونكتب $\overrightarrow{AB}$ (2,5 ; 1).
الإحداثية الأولى لـ $\overrightarrow{CD}$ هو 2-.
الإحداثية الثانية لـ $\overrightarrow{CD}$ هو 5-.
ونكتب $\overrightarrow{CD}$ (-2 ; -5).



4 تمثيل شعاع بمعرفة إحداثيتيه

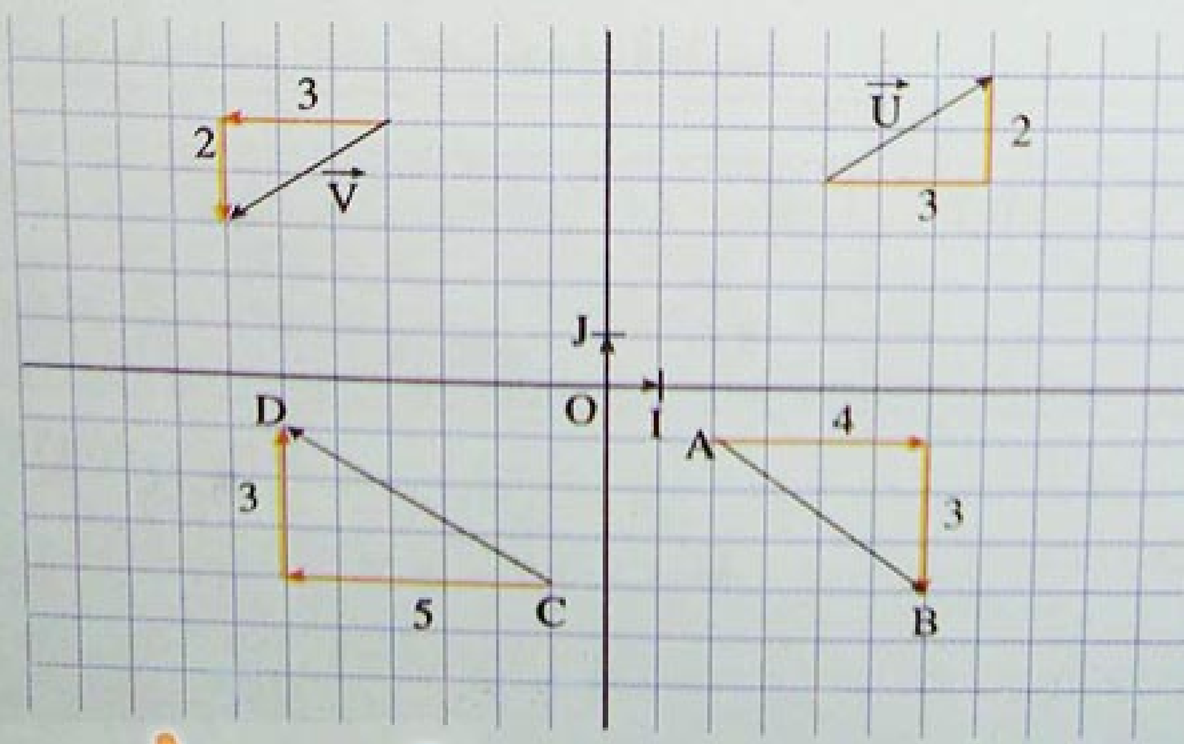
> لتمثيل شعاع بمعرفة إحداثيتيه نعين الإزاحتين الموافقتين لإشارتي الإحداثيتين x و y لشعاع.

مثال :
$x > 0$ و $y > 0$ يوافق إزاحة نحو اليمين متبوعة بإزاحة نحو الأعلى.
$x < 0$ و $y < 0$ يوافق إزاحة نحو اليسار متبوعة بإزاحة نحو الأسفل.
$x > 0$ و $y < 0$ يوافق إزاحة نحو اليمين متبوعة بإزاحة نحو الأسفل.
$x < 0$ و $y > 0$ يوافق إزاحة نحو اليسار متبوعة بإزاحة نحو الأعلى.

لنمثل الأشعة $\overrightarrow{U}$ ؛ $\overrightarrow{V}$ ؛ $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{CD}$ بحيث :

A (2 ; -1) ؛ C (-1 ; -4).

و $\overrightarrow{AB}$ (4 ; -3) ؛ $\overrightarrow{CD}$ (-5 ; 3) ؛ $\overrightarrow{U}$ (3 ; 2) ؛ $\overrightarrow{V}$ (-3 ; -2).



5 الشـعـاعـان المتساويان

$\vec{U}(x ; y)$ و $\vec{V}(x' ; y')$ شعاعان من مستو مزود بمعلم.

$\vec{U} = \vec{V}$ معناه $x = x'$ و $y = y'$.

6 حسـاب إحداثيتي شـعـاع

$A(x_A ; y_A)$ ، $B(x_B ; y_B)$ نقطتان من مستو مزود بمعلم.

إحداثيتي الشعاع $\vec{AB}$ هما : $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

مثال : $A(4 ; 3)$ ؛ $B(3 ; 2)$.

حساب إحداثيتي $\vec{AB}$

$x_B - x_A = 3 - 4 = -1$

فاصلة النهاية – فاصلة البداية

$y_B - y_A = 2 - 3 = -1$

ترتيب النهاية – ترتيب البداية



ومنه $\vec{AB}(-1 ; -1)$.



7 حسـاب إحداثيتي منـتـصف قطـعـة

A و B نقطتان من مستو مزود بمعلم بحيث $A(x_A ; y_A)$ ؛ $B(x_B ; y_B)$.

إحداثيتا M منتصف [AB] هما : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

مثال : $A(5 ; 3)$ ؛ $B(4 ; 2)$.

إذن $M\left(\frac{4+5}{2} ; \frac{2+3}{2}\right)$. ومنه $M(4,5 ; 2,5)$.



حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ومتجانس

في معلم متعامد ومتجانس، إذا كانت :
$A(x_A ; y_A)$ و $B(x_B ; y_B)$ ،
فإن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

مثال : $A(-4 ; -5)$ ؛ $B(2 ; -3)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس.

لدينا : $AB = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-3-(-5))^2}$

$= \sqrt{(2 + 4)^2 + (-3 + 5)^2}$

$= \sqrt{6^2 + 2^2}$

$= \sqrt{36 + 4}$

$= \sqrt{40}$

$= 2\sqrt{10}$.

إذا كان $OI = OJ = 1\ cm$، فإن $AB = 2\sqrt{10}\ cm$.

طرائق وتمارين محلولة

إثبات أن رباعيا متوازي أضلاع

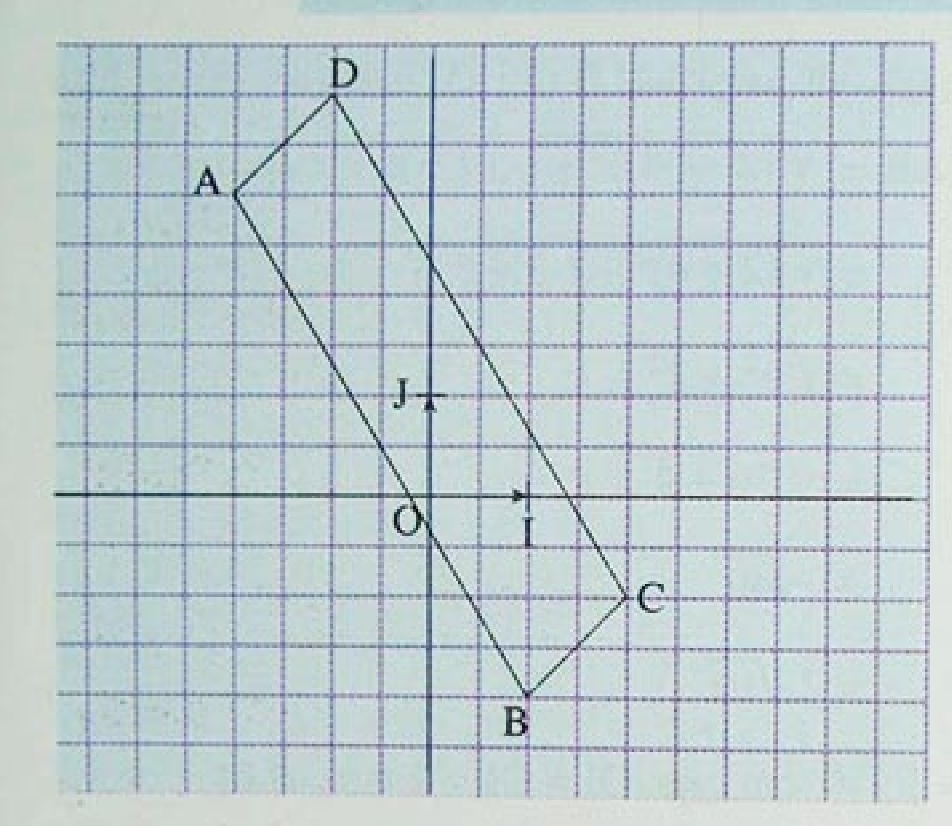
تمرين

(O , I , J) معلم متعامد ومتجانس للمستوي.
D ، C ، B ، A نقط منه بحيث A (-2 ; 3) ؛ B (1 ; -2) ؛ C (2 ; -1) ؛ D (-1 ; 4).
بين أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

طريقة

لإثبات أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع يكفي أن نبين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويان.

الحل



A (-2 ; 3) ؛ B (1 ; -2) ؛ C (2 ; -1) ؛ D (-1 ; 4).

إحداثيتا $\overrightarrow{AB}$:

$$x_B - x_A = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3.$$

$$y_B - y_A = -2 - 3 = -5.$$

إذن $\overrightarrow{AB}\ (3 ; -5)$.

إحداثيتا $\overrightarrow{DC}$:

$$x_C - x_D = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3.$$

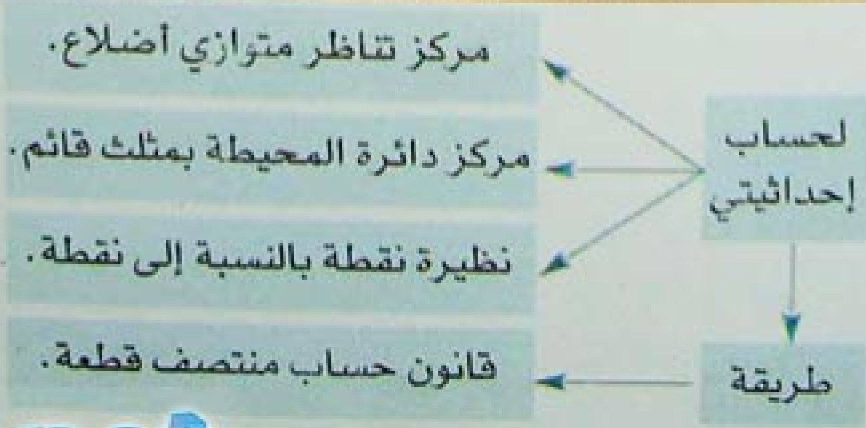
$$y_C - y_D = -1 - 4 = -5.$$

إذن $\overrightarrow{DC}\ (3 ; -5)$.

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ لهما نفس الإحداثيات.

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ومنه الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

حساب إحداثيتي منتصف قطعة



طرائق وتمارين محلولة

تمرين

(1) $A(-2\ ;\ 1)$ ؛ $B(1\ ;\ -1)$ نقطتان من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

علّم النقطتين A ، B.

عين النقطة C نظيرة A بالنسبة إلى B.

احسب إحداثيتي النقطة C.

الحل

C نظيرة A بالنسبة إلى B **معناه** B منتصف $[AC]$.

B منتصف $[AC]$ **يعني** $x_B = \frac{x_A + x_C}{2}$ **و** $y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$.

$x_B = \frac{x_A + x_C}{2}$ **أي** $\frac{-2 + x}{2} = 1$ ،

ومنه $-2 + x = 2$.

وبالتالي : $x = 2 + 2$

إذن $x = 4$.

$y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$ **أي** $\frac{1 + y}{2} = -1$ ،

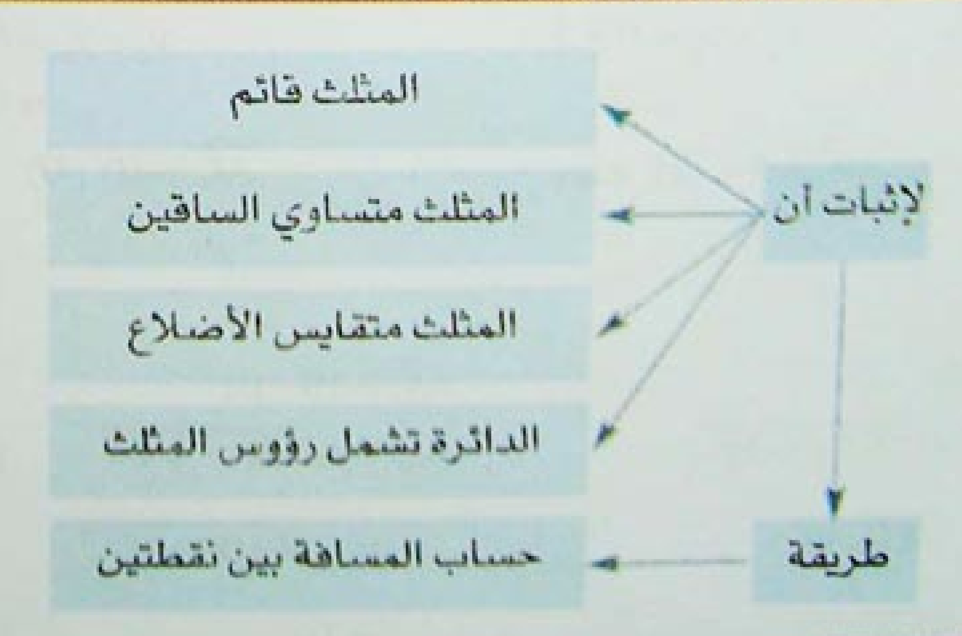
ومنه $1 + y = -2$.

وبالتالي : $y = -2 - 1$

إذن : $y = -3$.

نستنتج أن : $C(4\ ;\ -3)$.

حساب المسافة بين نقطتين



ملاحظة

إذا كان المعلم ليس متعامداً ومتجانساً فإن قانون حساب المسافة بين نقطتين خاطئ.

تمرين

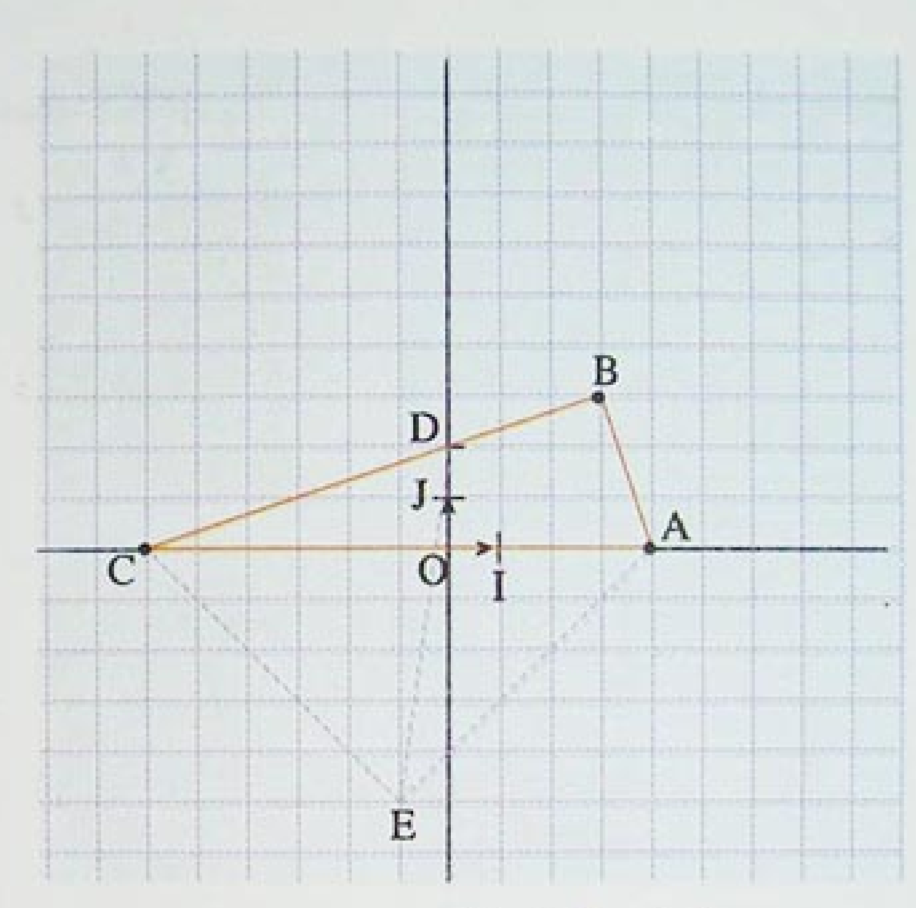
$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

علّم النقط : A (4 ; 0) ؛ B (3 ; 3) ؛ C (-6 ; 0) ؛ D (0 ; 2) ؛ E (-1 ; -5).

1) بين أن المثلث ABC قائم في B.

2) بين أن النقطة E هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ADC.

الحل



1) حساب إحداثيتي كل من : $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{BC}$.

إحداثيتا $\overrightarrow{AB}$:

A (4 ; 0) ؛ B (3 ; 3).

$x_B - x_A = 3 - 4$
$= -1$

$y_B - y_A = 3 - 0$
$= 3$

ومنه $\overrightarrow{AB}(-1 ; 3)$.

إحداثيتا $\overrightarrow{AC}$:

A (4 ; 0) ؛ C (-6 ; 0).

$x_C - x_A = -6 - 4$
$= -10$

$y_C - y_A = 0 - 0$
$= 0$

ومنه $\overrightarrow{AC}(-10 ; 0)$.

إحداثيتا $\overrightarrow{BC}$:

B (3 ; 3) ؛ C (-6 ; 0).

$x_C - x_B = -6 - 3$
$= -9$

$y_C - y_B = 0 - 3$
$= -3$

ومنه $\overrightarrow{BC}(-9 ; -3)$.

حساب الأطوال AB ، AC ، BC.

$\overrightarrow{AB}(-1 ; 3)$

$AB = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{1 + 9}$

$= \sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AC}(-10 ; 0)$

$AC = \sqrt{(-10)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{100 + 0}$

$= 10.$

$\overrightarrow{BC}(-9 ; -3)$

$BC = \sqrt{(-9)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{81 + 9}$

$= \sqrt{90}$

$= 3\sqrt{10}$.

حساب AC^2 و $AB^2 + BC^2$.

$AC^2 = 10^2 = 100$ و $AB^2 + BC^2 = 10 + 90 = 100$.

ومنه $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

إذن، حسب نظرية فيتاغورس العكسية، المثلث ABC قائم في B.

2) حساب الأطوال EC ، ED ، EA.

$x_C - x_E = -6 + 1$
$= -5$
$y_C - y_E = 0 - (-5)$
$= 5$

إذن $\overrightarrow{EC}$ (-5 ; 5).

ومنه : $EC = \sqrt{(-5)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{25 + 25}$
$= \sqrt{50}$.

$x_D - x_E = 0-(1-)$
$= 1$
$y_D - y_E = 2 - (-5)$
$= 7$

إذن $\overrightarrow{ED}$ (1 ; 7).

ومنه : $ED = \sqrt{(1)^2 + 7^2}$
$= \sqrt{1 + 49}$
$= \sqrt{50}$.

$x_A - x_E = 4 - (-1)$
$= 5$
$y_A - y_E = 0 - (-5)$
$= 5$

إذن $\overrightarrow{EA}$ (-5 ; 5).

ومنه : $EA = \sqrt{5^2 + 5^2}$
$= \sqrt{25 + 25}$
$= \sqrt{50}$.

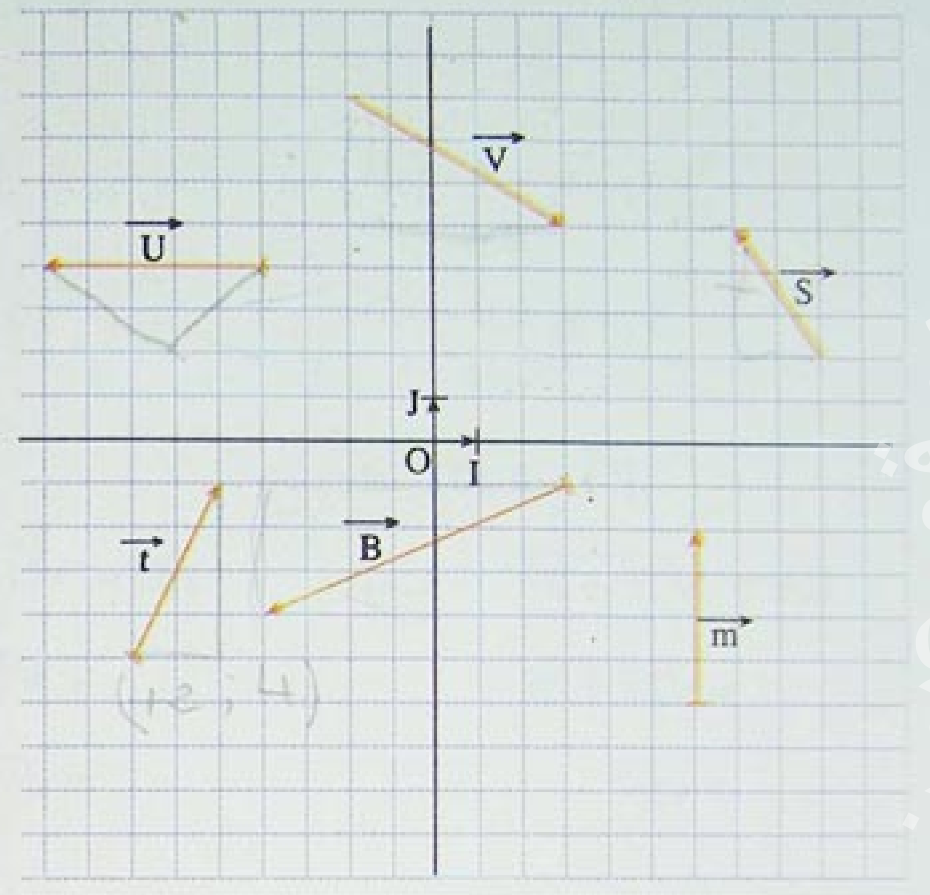
بما أن $EA = EC = ED$، فإن النقطة E مركز دائرة تشمل النقط A ، C ، D.

أي E مركز دائرة محيط بالمثلث ACD.

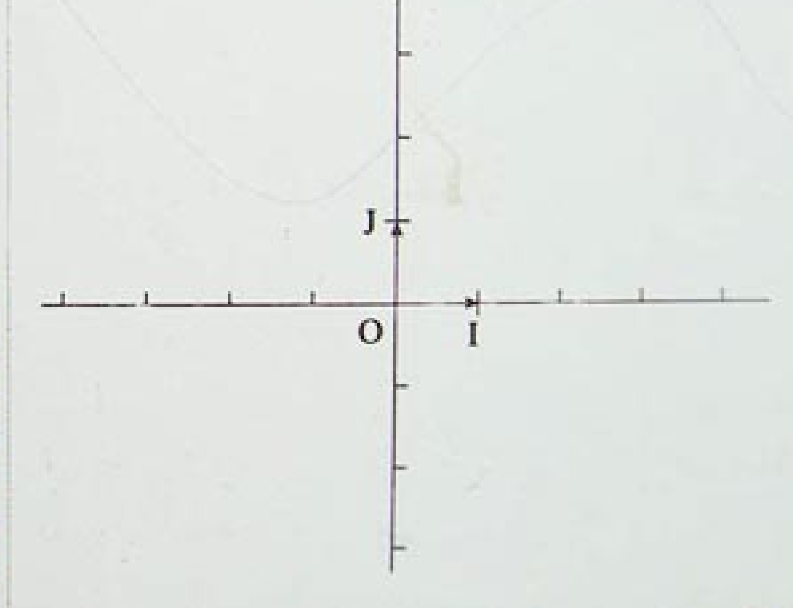


إحداثيتا شعاع

1 اوجد إحداثيتي كل من الأشعة:
$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{s}$ ، $\vec{t}$ ، $\vec{b}$ ، m.



2 $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي (الشكل الموالي).



علّم النقط :
A (-5 ; 3) ؛ B (6 ; -4) ؛ C (0 ; -8) ؛ D (-1 ; 6).

أوجد إحداثيتي الأشعة :
$\vec{AB}$ ؛ $\vec{AC}$ ؛ $\vec{CD}$ ؛ $\vec{BD}$ ؛ $\vec{DC}$ ؛ $\vec{OD}$ ؛ $\vec{DE}$.

3 A نقطة من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس بحيث A (-2 ; 5).

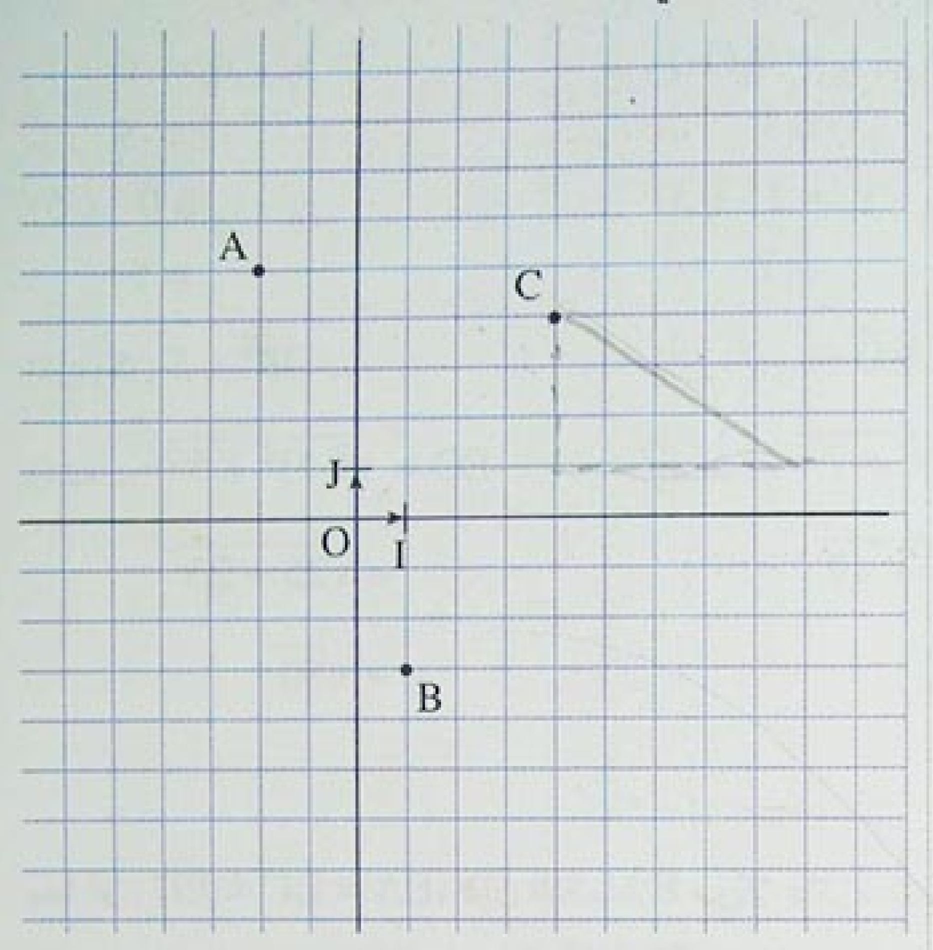
عين النقطتين B و C بحيث :
$\vec{AB}$ (3 ; 4) ؛ $\vec{AC}$ (4 ; -2).

أوجد إحداثيتي النقطتين C و B.

4 لتكن $\vec{U}$ ، $\vec{V}$ ، $\vec{S}$ أشعة بحيث :
$\vec{U}$ (4 ; -2) ؛ $\vec{V}$ (2 ; 1) ؛ $\vec{S}$ (-1 ; -2).

عين النقط R ، E ، T بحيث :
$\vec{CR} = \vec{U}$ ؛ $\vec{AE} = \vec{V}$ ؛ $\vec{BT} = \vec{S}$.

أوجد إحداثيتي كل من T ، E ، R.



حساب إحداثيتي شعاع

5 A ، B نقطتان من المستوي المزود بمعلم.

احسب إحداثيتي $\vec{AB}$ في كل حالة:

1) B (7 ; 2) ؛ A (1 ; -1).

2) B (0 ; -5) ؛ A (3 ; 1).

3) B (3 ; -5) ؛ A (3 ; -2).

4) $B\left(\frac{1}{4} ; -\frac{4}{3}\right)$ ؛ $A\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{3}\right)$.

5) B (0,1 ; 3,2) ؛ A (0,5 ; 4).

6 A، B، C، D نقط من المستوي المزود بمعلم بحيث:
A (-2 ; 3) ؛ B (1 ; -2) ؛ C (2 ; -1) ؛ D (-1 ; 4).

احسب إحداثيتي كل من الأشعة :
$\vec{AB}$ ؛ $\vec{BC}$ ؛ $\vec{AC}$ ؛ $\vec{CD}$ ؛ $\vec{BD}$.

7 M و N نقطتان من المستوي المزود بمعلم بحيث :
N (2 ; 3) ؛ M (-1 ; -3).

احسب إحداثيتي شعاع الانسحاب الذي يحول M إلى N.

تمارين للتطبيق المباشر

8 D، C، B، A نقط من المستوى المزود بمعلم بحيث
$D(0;+5)$ ؛ $C(7;6)$ ؛ $B(-2;8)$ ؛ $A(-5;3)$.
احسب إحداثيتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$.
استنتج أن الرباعي ACBD متوازي أضلاع.

9 M، H، A ثلاث نقط من المستوي المزود بمعلم بحيث :
$M(-2;3)$ ؛ $H(1;-2)$ ؛ $A(-1;3)$.
احسب إحداثيتي النقطة T التي تجعل الرباعي MATH متوازي أضلاع.

10 C، B، A ثلاث نقط من المستوي المزود بمعلم بحيث :
$C(5;3)$ ؛ $B(4;-1)$ ؛ $A(-2;1)$.
- عين النقطتين P و E بحيث :
E نظيرة C بالنسبة إلى B.
B و A متناظرتان بالنسبة إلى P.
- احسب إحداثيتي النقطتين P و E.

إحداثيتا منتصف قطعة

11 B، A نقطتان من المستوي المزود بمعلم.
احسب إحداثيتي C منتصف [AB] في كل حالة:
1) $B(-5;6)$ ؛ $A(3;-2)$.
2) $B(7;-2)$ ؛ $A(-3;4)$.
3) $B(-1;+2)$ ؛ $A(-1;-2)$.
4) $B(-5,4;-9,2)$ ؛ $A(0,6;-7,8)$.
5) $B(\frac{3}{2};-\frac{1}{3})$ ؛ $A(\frac{1}{2};-1)$.

12 D، C، B، A نقط من المستوي المزود بمعلم.
$D(1;-1)$ ؛ $C(5;1)$ ؛ $B(3;5)$ ؛ $A(-1;3)$.
احسب إحداثيتي M و N منتصفي [BD] و [AC] على الترتيب. ما نوع الرباعي ABCD؟

13 C، B، A نقط من المستوي المزود بمعلم.
$C(-7;3)$ ؛ $B(5;2)$ ؛ $A(-3;-2)$.
عين النقطة M بحيث M منتصف [AC].
عين النقطة P بحيث B نظيرة C بالنسبة إلى P.
احسب إحداثيتي كل من النقطتين M و P.
ماذا نقول عن المستقيمين (MP) و (AB)؟
(اشرح ذلك).

14 C، B، A ثلاث نقط من المستوي المزود بمعلم بحيث :
$C(+2;-3)$ ؛ $B(-1;3)$ ؛ $A(3;4)$.
احسب إحداثيي E بحيث :
$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$.
احسب إحداثيي D بحيث E منتصف [AD].
استنتج نوع الرباعي ABDC.

المسافة بين نقطتين

15 C، B، A نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
احسب الأطوال BC، AC، AB في كل حالة :
1) $C(3;-6)$ ؛ $B(-2;4)$ ؛ $A(-6;5)$.
2) $C(\frac{5}{4};-\frac{5}{3})$ ؛ $B(-4;\frac{1}{2})$ ؛ $A(-\frac{2}{3};-1)$.
3) $C(-4;1)$ ؛ $B(-5;-7)$ ؛ $A(-2;3)$.

16 C، B، A ثلاث نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس
$C(0;3)$ ؛ $B(3;2)$ ؛ $A(2;1)$.
احسب الأطوال BC، AC، AB.
بين نوع المثلث ABC.

17 $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.
$C(-7;-2)$ ؛ $B(3;+3)$ ؛ $A(-1;6)$.
بين أن المثلث ABC قائم.
احسب إحداثيتي E منتصف [AC].
احسب طول المتوسط المتعلق بالضلع [AC] في المثلث ABC.

18 $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ معلم متعامد ومتجانس.
1) علم النقط $C(4;0)$ ؛ $B(5;7)$ ؛ $A(-3;1)$.
2) احسب الأطوال AB، BC، AC.
3) بين أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.
4) ليكن M مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.
احسب إحداثيتي M. احسب نصف قطر هذه الدائرة.

19 $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ معلم متعامد ومتجانس.
1) علّم النقط :
$D(-3;-4)$ ؛ $C(-1;2)$ ؛ $B(5;4)$ ؛ $A(3;-2)$.
2) بين أن الرباعي ABCD معيّن

1 A ، B ، C نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

A (2 ; 7) ؛ B (1 ; 0) ؛ C (-2 ; 4).

(C) دائرة مركزها B ونصف قطرها BC.

بين أن (AC) مماس للدائرة (C) في C.

2 $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي

A (5 ; 2) ؛ B (2 ; 6) ؛ C (-6 ; 0).

1) بين أن المثلث ABC قائم.

2) احسب إحداثيتي D حتى يكون الرباعي ABCD مستطيلاً.

3) احسب إحداثيتي I مركز تناظر ABCD.

3 في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة هي 1 cm).

1) علّم النقط A (1 ; -3) ؛ B (5 ; 5) ؛ C (-5 ; 0).

2) احسب الأطوال AB ، AC ، BC ،

ثم بين أن المثلث ABC قائم في A.

3) احسب إحداثيتي K منتصف [BC].

4) [AE] الارتفاع المتعلق بالضلع [BC].

احسب مساحة المثلث ABC.

استنتج طول [AE] (اعط القيمة المضبوطة).

4 (O , I , J) معلم متعامد ومتجانس للمستوي (OI = OJ = 1 cm).

1) علّم النقط A (2 ; 0) ؛ B (0 ; -1) ؛ C (0 ; 4).

2) بين أن $\widehat{BAC} = 90°$.

3) (C) دائرة التي مركزها M وتشمل النقط A ، B ، C.

احسب إحداثيتي M ونصف قطر الدائرة (C).

5 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

A ، B ، C ، D أربع نقاط من المستوي بحيث :

A (1 ; +5) ؛ B (-3 ; 3) ؛ C (0 ; 2) ؛ D (4 ; 4).

1) علّم النقط A ، B ، C ، D.

2) أثبت أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

3) لتكن M منتصف [CD] و P نظيرة A بالنسبة إلى M.

احسب إحداثيتي كل من النقطتين M ، P.

4) K نقطة من المستوي حيث (7 ; 5) K.

برهن أن النقطة A مركز الدائرة المحيطة بالمثلث KPB.

6 A ،B ،C نقط من المستوي المنسوب إلى معلم بحيث :

A (5 ; 3) ؛ B (2 ; -1) ؛ C (-1 ; -3).

D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{BA}$.

E نظيرة B بالنسبة إلى C.

المستقيمان (DE) و (AB) يتقاطعان في F.

1) أنشىء الشكل.

2) احسب إحداثيتي كل من النقطتين D و E.

3) احسب إحداثيتي النقطة F.

7 في معلم متعامد ومتجانس.

1) علّم النقط A (1 ; 2) ؛ B (4 ; -1) ؛ M (3 ; 1).

2) بين أن M نقطة من محور [AB].

3) لتكن E نقطة بحيث (3- ; 1-) E.

بين أن المستقيم (ME) يقطع [AB] في منتصفها.

8 A ، B ، C نقط من معلم متعامد ومتجانس للمستوي (وحدة الطول هي 1 cm).

A (-3 ; 2) ؛ B (1 ; 5) ؛ C (2 ; 2).

1) علّم النقط A ، B ، C.

2) بين أن المثلث ABC متساوي الساقين.

3) المحور المتعلق بالضلع [BC] يقطع [BC] في H.

احسب الطول AH.

9 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي 1 cm).

A (3 ; 7) ؛ B (3 ; -3) ؛ C (-1 ; -1).

1) علّم النقط A ، B ، C.

2) احسب إحداثيي كل من الأشعة $\vec{BC}$ ، $\vec{AC}$ ، $\vec{AB}$.

3) احسب الأطوال AB ، AC ، BC.

4) بين أن المثلث ABC قائم في C.

5) M مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC.

احسب إحداثيي M.

احسب طول نصف قطر هذه الدائرة.

6) هل النقطة (5 ; 1-) E تنتمي إلى الدائرة (C) ؟ (برّر).



مسائل

1 f دالة تآلفية حيث $f : x \mapsto 3x - 1$.

(d) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

A و B نقطتان بحيث $A(-5 ; 6)$ ؛ $B(-7 ; 2)$.

1) احسب $f(-2)$ ؛ $f(1)$.

2) C نقطة من (d) فاصلتها (2-). D نقطة من (d) ترتيبها (2).

ما هما إحداثيتي كل من النقطتين C و D.

3) أنشئ المستقيم (d).

4) أنشئ النقطتين 'C و 'D صورتي النقطتين C و D على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

5) ارسم المستقيم ('d) صورة (d) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

6) احسب إحداثيتي كل من النقطتين 'C و 'D.

7) ('d) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية g.

عين الدالة g.

2 في معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ بحيث $OI = OJ = 1\text{ cm}$.

1) علّم النقط :

$A(-4 ; 2)$ ؛ $B(5 ; 0)$ ؛ $C(4 ; 4)$.

2) بين نوع المثلث ABC.

3) أنشئ النقطة M بحيث $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

- ما نوع الرباعي ACBM؟

- احسب إحداثيتي M.

4) احسب مساحة الرباعي ACBM.

5) أنشئ النقطة N صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

- احسب إحداثيتي N.

6) احسب مساحة الرباعي ACNM.

3 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ بحيث $OI = OJ = 1\text{ cm}$

1) علّم النقط : $A(-1 ; -5)$ ، $B(5 ; -1)$ ، $C(4 ; 7)$ ، $D(-2 ; 3)$.

2) بين أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

3) احسب الطولين AD و BD.

- استنتج نوع المثلث ABD.

4) I منتصف [AB]. بين أن المستقيمين (ID) و (AB) متعامدان.

5) احسب إحداثيتي I.

6) احسب مساحة المتوازي الأضلاع ABCD.

7) احسب قيس الزاوية $\widehat{BAD}$ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة.

- استنتج قيس $\widehat{ABC}$ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة.



من التاريخ

من علمائنا في حساب المثلثات والفلك

أدى علماء العرب والمسلمين دورا معتبرا في بعث حساب المثلثات وعلم الفلك ووضع الأزياج (الزيج هو لفظ يطلق على الجداول الفلكية القديمة، وأصله فارسي) وصناعة الأسطرلاب (وهو آلة فلكية قديمة، تسمى أيضا ذات الصفائح، وتستخدم في الملاحة وفي تحديد زوايا ارتفاع الأجرام السماوية وغيرها). نورد في الجدول التالي ثلاثين من بين هؤلاء العلماء (إذ لا يسع المكان لأكثر من ذلك) متبوعة بتاريخ الوفاة (بالتقويم الهجري ثم الميلادي) وأهم مؤلفاتهم :

الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في علم الفلك	الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في علم الفلك	الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في علم الفلك
الخوارزمي (232- 846)	زيج الخوارزمي	الزرقالي (493-1099)	الصحيفة الزيجية	ن. الدين الطوسي (672- 1274)	التذكرة في علم الهيئة: ظاهرات الفلك
الكندي (252-866)	صنعة الأسطرلاب بالهندسة	المجريطي (398-1007)	رسالة الأسطرلاب	محي الدين المغربي (680- 1280)	الجامع الصغير في أحكام النجوم
أبو معشر البلخي (272-886)	المدخل إلى علم أحكام النجوم	القاضي النسوي (420-1030)	الزيج الفاخر	الشيرازي (710-1311)	نهاية الإدراك في دراية الأفلاك
الدينوري (282-895)	القبلة والزوال: زيج أبي حنيفة	ابن الصفار (430- 1039)	العمل بالأسطرلاب	ابن البناء المراكشي (721-1321)	الأسطرلاب واستعماله
النيريزي (311-923)	أحداث الجو: المدخل إلى علم النجوم	ابن الهيثم (430- 1039)	صورة الكسوف: اختلاف مناظر القمر	ابن الشاطر (777-1375)	إيضاح المغيَّب في العمل بالربع المجيَّب
البتاني (317-929)	معرفة مطالع البروج: كتاب هيئة العالم	البيروني (440-1048)	الآثار الباقية: تحقيق منازل القمر	غياث الدين الكاشي (828- 1424)	نزهة الحدائق: رسالة سلم السماء
الكوهي (350-961)	صنعة الأسطرلاب	عمر الخيام (515-1121)	زيج ملكشاه	قاضي زاده الرومي (835-1431)	شرح ملخص الهيئة
كوشيار الجيلي (350-961)	مجمل الأصول في أحكام النجوم	ابن الأفلح (540-1145)	الهيئة في إصلاح المجسطي	أولغ بك (853-1449)	الزيج السلطاني
البوزجاني (388-998)	معرفة الدائرة من الفلك	ش. الدين الطوسي (606-1209)	معرفة الأسطرلاب المسطح والعمل به	العاملي (1031-1622)	تشريح الأفلاك
الخجندي (390-1000)	الآلة الشاملة في الفلك	الحسن المراكشي (660-1262)	جامع المبادئ والغايات في علم الميقات	الروداني الفاسي (1094-1683)	بهجة الطلاب في الأسطرلاب

الرياضيات تتقدم

أين نجد الرياضيات (1)

كثيرا ما نسمع أن الرياضيات تفتقر إلى التطبيق وأن أهلها يكتفون بالبرهان على نظريات عديمة الجدوى. ومع ذلك، لا يشك هؤلاء في أن الفيزياء والكيمياء والبيولوجيا والمعلوماتية وعلم الفضاء والطب والصيدلة في تقدم دائم. ذلك أن التقدم التكنولوجي والصحي يُظهِر لعامة الناس النجاحات التي حققتها هذه الفروع العلمية، خلافا لحال الرياضيات. إليك بعض اهتمامات الرياضيات التطبيقية التي تبرز لنا دور الرياضيات في حل المسائل العلمية المطروحة حديثا :

1. **ضغط المعلومات** : يهتم الباحثون بكيفية ضغط المعلومات، مثل الصورة والصوت والنص، حتى تأخذ أقل حجم ممكن في الأقراص المخصّصة لها (الأقراص المرنة، الأقراص المضغوطة، أشرطة الفيديو، ...). إن السبيل المؤدي إلى ذلك يتطلب معارف وبحوث رياضية ضخمة ومعقدة.

2. **التحكم** : عندما يرغب العلماء والمهندسون في استكشاف نقائص في بعض المسائل من خلال الإشارات التي ترسلها أجهزة تقنية متواجدة على سطح الأرض أو في باطنها أو في الفضاء فإنهم يحتاجون إلى رياضيات معمقة تبحث في ما يسمى بـ "المسائل العكسية". وهناك نوع آخر من مسائل التحكم ("التحكم الأفضل") مثل تحديد أفضل مسار لسيارة أو لجهاز متحرك خاضع لشروط معينة (تخفيض التكلفة أو تقليص مدة السير أو الاختفاء عن الرادارات).

3. **مشاهدة المعطيات** : عندما تكون لدينا معطيات فإننا نحتاج أحيانا إلى مشاهدتها من خلال رسوم في شكل منحنيات أو سطوح أو حجوم كما هو الحال لدى الأطباء الذين يريدون رسم العظم أو الورم أو الكائن الدخيل عن الجسم انطلاقا من صور مأخوذة بالإشعة. تلك هي الطريقة التي يعمل بها جهاز "الماسح" (السكنير). كل ذلك يستدعي معلومات وأبحاث رياضية كثيفة يضاف إليها إسهام الحاسوب.

4. **التنظيم الأمثل** : عندما يقوم رجل من رجال الأعمال أو السياسة بجولة عبر مدن مختلفة، أو يريد صاحب مؤسسة منح سيارات نقل بضاعة إلى مواقع مختلفة، أو يرغب في تنظيم تزويد مخزن سلع خاص بالتموين، أو يريد مسؤول الاتصال تنظيم شبكته (الهاتفية مثلا) بمراعاة الاستعمال الأمثل والأقل تكلفة فإنهم جميعا يحتاجون إلى فرع هام من فروع الرياضيات، وهو فرع "بحوث العمليات".

5. **الفضاء والأرض** : تدخل الرياضيات بقوة في مجال الفضاء إذ لا يعقل أن نطلق قمرا صناعيا مثلا دون زاد كبير من الرياضيات، ولا يمكن وضع هذا القمر على مساره النهائي والتحكم في حركته عن بعد بدون اللجوء إلى فروع شتى من فروع الرياضيات. ذلك هو موضوع من مواضيع فرع الرياضيات المسمى "التحكم الأفضل".

6. **الإحصاء** : عندما يقوم الموظفون بأبسط العمليات الحسابية، مثل إحصاء اليد العاملة أو معدل مداخيل صندوق التأمين، أو يقوم الأطباء بإحصائيات حول انتشار الأمراض وتطور الحالات الصحية للمرضى فإنهم ينهلون من علم الإحصاء، المنبثق عن الرياضيات، وهو حقل أصبح يتطلب التحكم في برامج معلوماتية متطورة.

7. **معالجة الصور** : ماذا يفعل مستقبل الصورة عبر قمر صناعي مثلا إذا ما كانت تلك الصورة غير واضحة بسبب تواجد بعض الغبار على عدسة المصور خلال التقاط الصورة أو بسبب خلل في الإرسال؟ إنه يعالج الصورة بمساعدة حاسوبه المجهز ببرنامج معالج الصور. كما أن استكشاف دقائق الأمور (مثل الحركة ومختلف المميزات) في صورة مأخوذة بآلة تصوير رقمية أو غير رقمية يتطلب معالجة خاصة. ومعالجة مثل هذه المسائل تستند كلها إلى دراسة نوع خاص من المعادلات التفاضلية الجزئية التي تشكل فرعا قائما بذاته في الرياضيات منذ عهد بعيد.

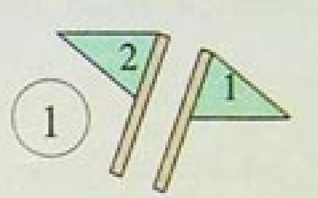
يتبع ...

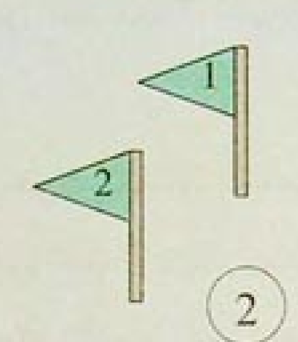


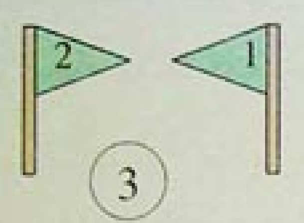
13 الدوران، المضلعات المنتظمة، الزوايا

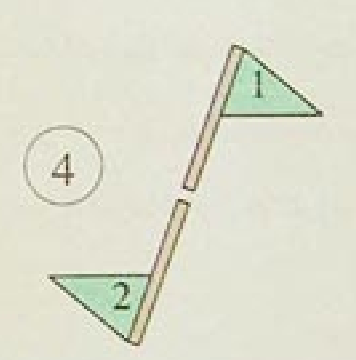
تمهيد

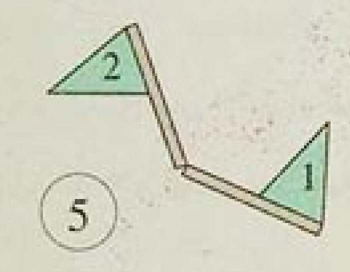
1 لاحظ الأشكال التالية وعين في كل حالة، التحويل النقطي (التناظر المحوري أو التناظر المركزي أو الانسحاب) الذي يسمح بالمرور من الراية 1 إلى الراية 2.











2 انقل الجدول التالي، ثم املأه:

الشكل	التحويل النقطي	مميزات التحويل النقطي	خواص التحويل النقطي
1			
2			
3			
4			
5			

1 تعريف الدوران، مميزاته وخواصه

1

خذ ورقة شفافة، ثم أشفف المثلث (1) ونصف القرص (5) والذي نصف قطره 2cm، مع تعليم النقاط O ، A ، B و C .

ثبت الورقة الشفافة بدبوس في النقطة O ثم أدرها بزاوية °90 في الاتجاه المبيّن في الشكل.

- على أي شكل ينطبق مشفوف المثلث (1)؟ وكذا مشفوف نصف القرص (5) ؟
- أكمل ما يلي : ينطبق مشفوف النقطة A على .....

ينطبق مشفوف النقطة B على .....

نقول إن الشكل (2) هو صورة الشكل (1) بالدوران الذي مركزه O وزاويته °90 في الاتجاه المعطى.

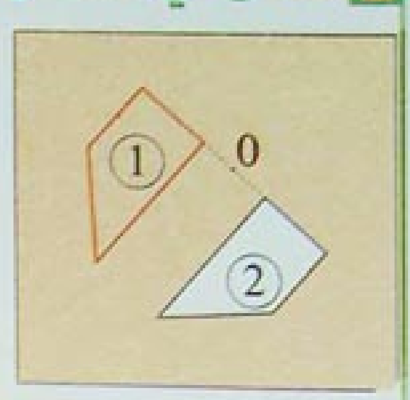
- ما هي صور الأشكال (2) ، (7) ، (8) ، (III) وكذا النقاط O ، A ، B ، C ، G بهذا الدوران؟
- ما هي صور القطع المستقيمة [OC] ، [OD] ، [HG] بالدوران المعطى؟

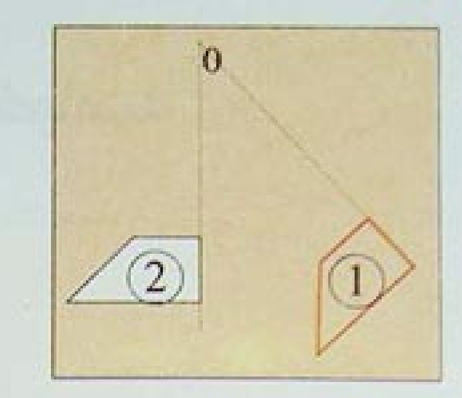
قارن طول كل قطعة بصورتها.

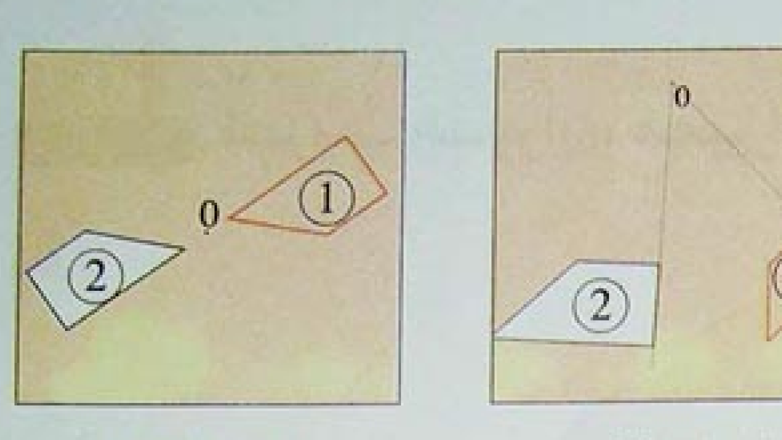
- ما هي صور الزوايا $\widehat{GOF}$ ، $\widehat{KGL}$ ، $\widehat{KOC}$ ؟ قارن قيس كل زاوية بصورتها.
- اختر ثلاث نقاط من الشكل تكون في استقامية، ما هي صورها بالدوران المعطى ؟ تحقق من استقامية هذه الصور؟



2 تمعّن في الأشكال التالية :







الحالة (1) الحالة (2) الحالة (3) الحالة (4)

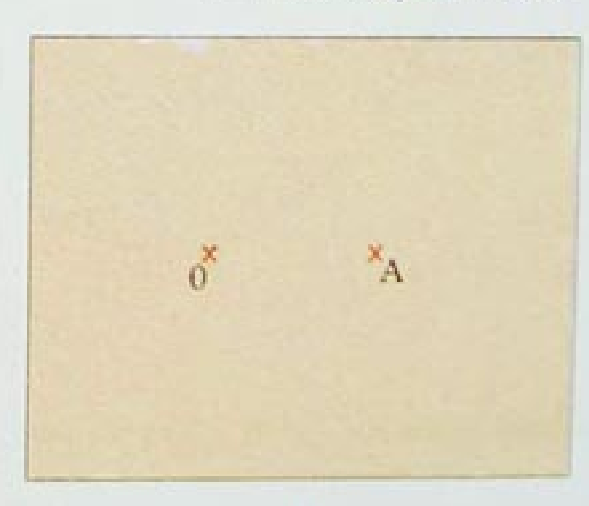
1) هل ينطبق الشكل (1) على الشكل (2) بتدويره حول O في كل حالة من هذه الحالات بالاعتماد على النظر ؟

2) تحقق من إجابتك باستعمال الورق الشفاف.

3) تمثل الحالة (4) وضعية، قد درستها من قبل ، ماذا تمثل ؟

2 إنشاء صور أشكال بدوران

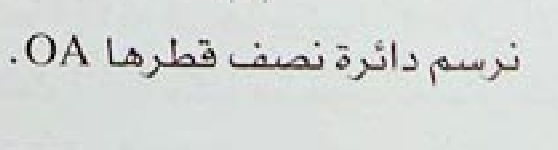
1 إليك مراحل إنشاء النقطة 'A ، صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته °45 في الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة :

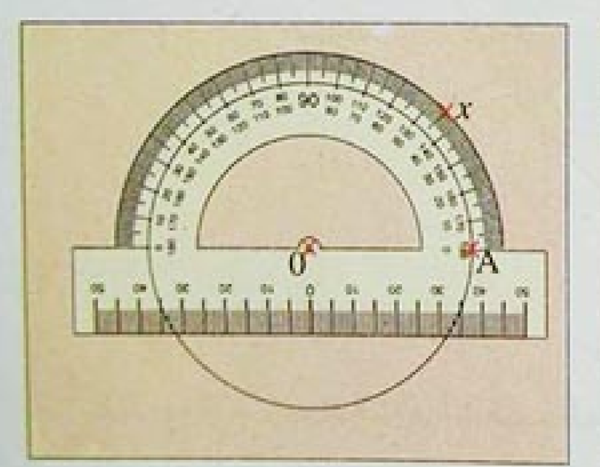


(0)

(1)

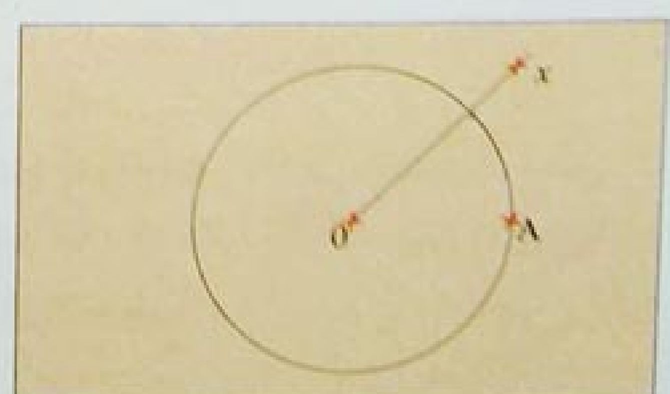
نرسم دائرة نصف قطرها OA.





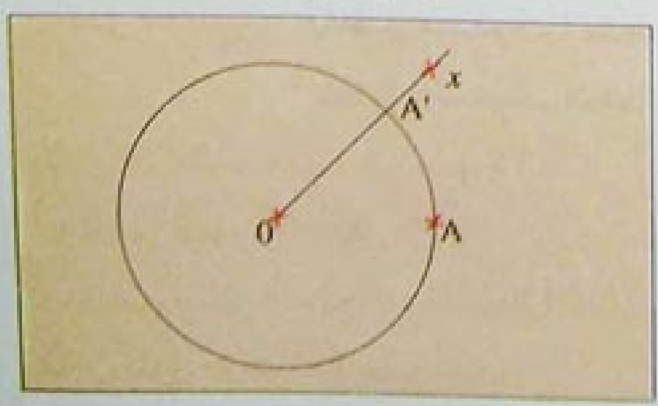
(2)

نعلّم النقطة x بحيث يكون $\widehat{AOx} = 45°$.



(3)

نرسم نصف المستقيم [Ox)



(4)

نعلّم النقطة 'A صورة A بهذا الدوران وهي النقطة الناتجة عن تقاطع الدائرة ونصف المستقيم [Ox)

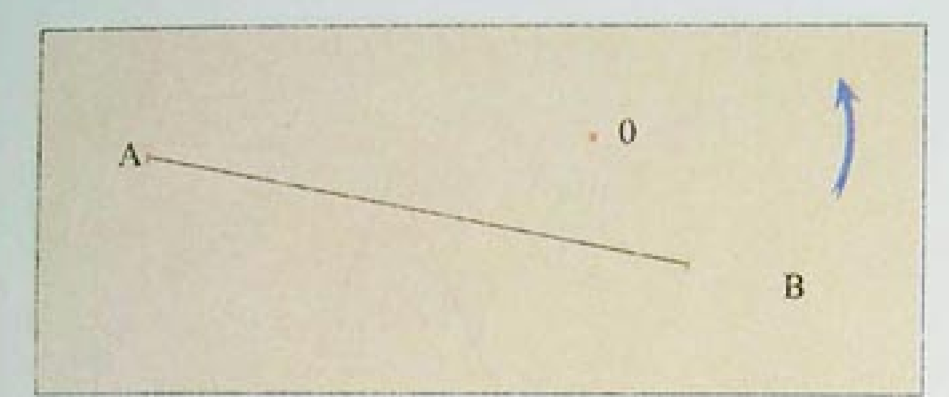
2 علما أنّ : الدوران يحافظ على طبيعة الأشكال، أي أن بالدوران تكون :

- صورة قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم.
- صورة نصف مستقيم هي نصف مستقيم.
- صورة مستقيم هي مستقيم.
- صورة زاوية هي زاوية.
- صورة دائرة هي دائرة.

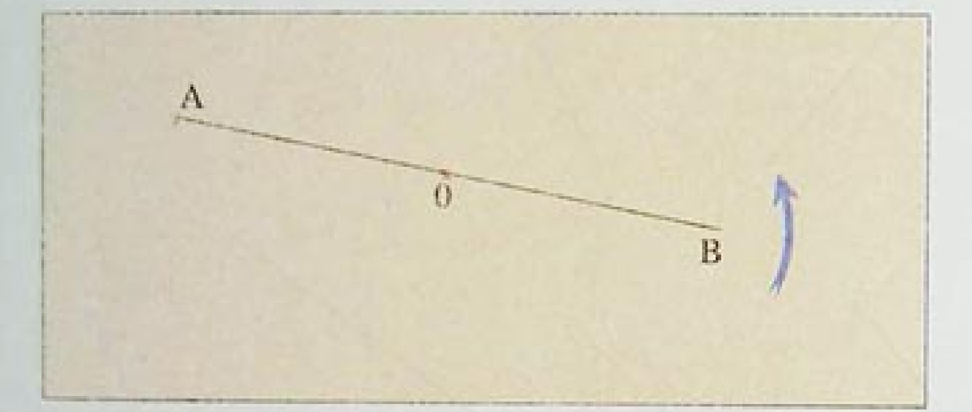
أنشىء، في كل حالة مما يلي، صورة الشكل بالدوران الذي مركزه O، وزاويته $60°$ في الاتجاه المعطى :

أ) صورة قطعة مستقيم $[AB]$

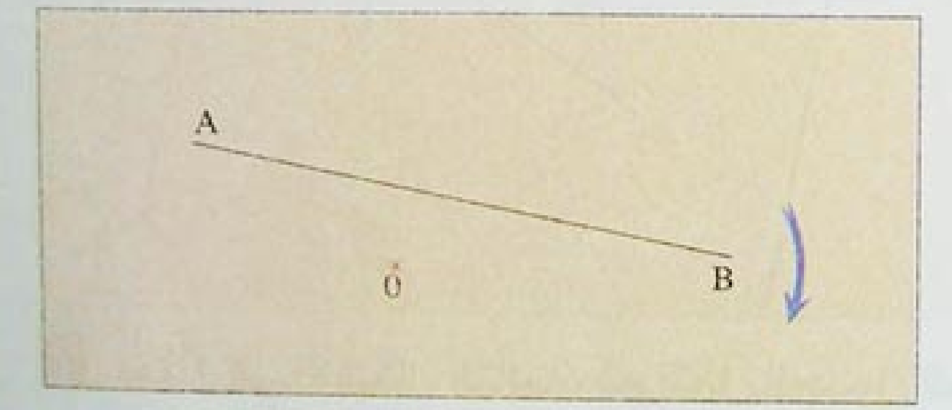
حيث : $AB = 5\ cm$.



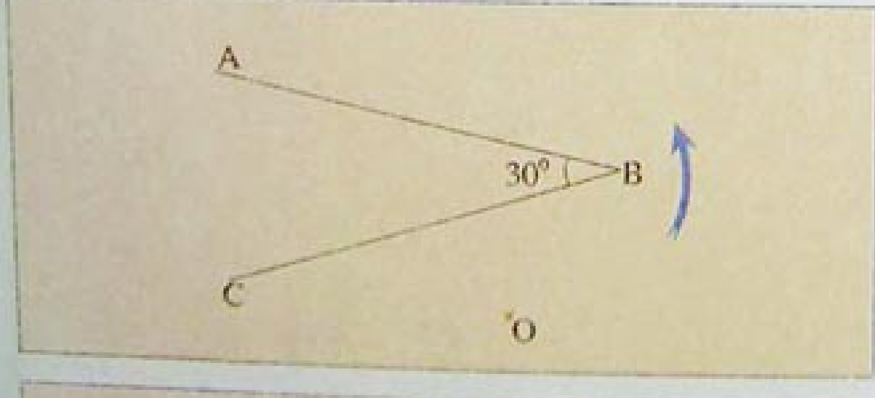
ب) صورة نصف المستقيم $[AB)$.



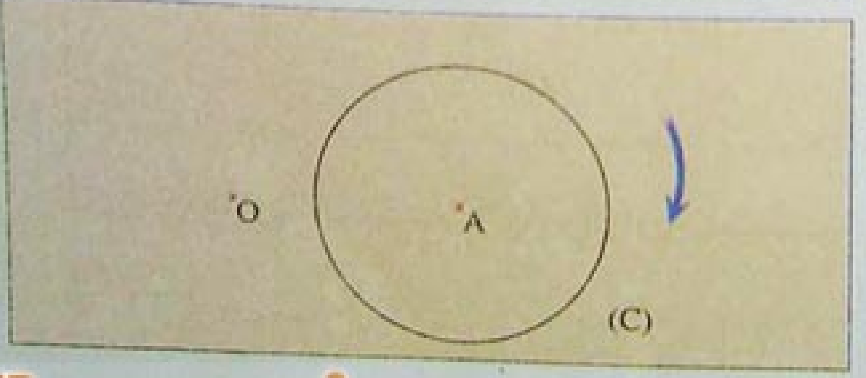
جـ) صورة المستقيم (AB).



د) صورة الزاوية $\widehat{ABC}$.



هـ) صورة الدائرة (C).





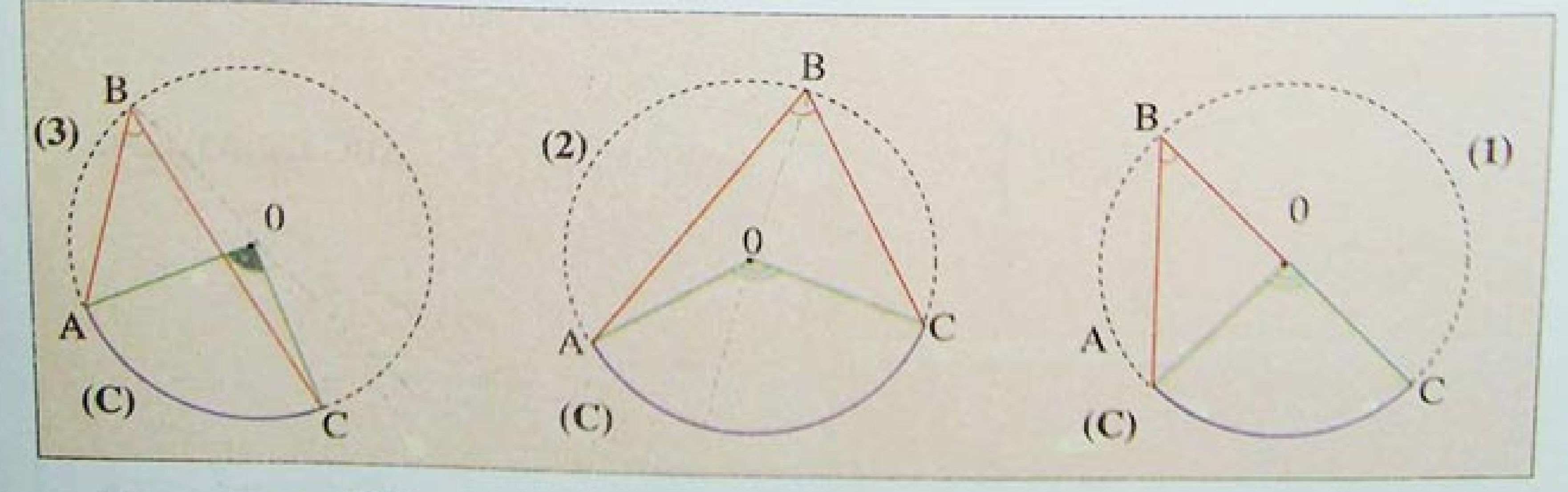
3 الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

1 1) الزاوية المحيطية في دائرة، هي زاوية رأسها نقطة من الدائرة، وضلعاها يقطعان الدائرة في نقطتين (وترين).

2) الزاوية المركزية هي زاوية رأسها مركز الدائرة.

على ضوء هذين المفهومين، لوّن في الأشكال التالية بالأحمر الزوايا المحيطية وبالأخضر الزوايا المركزية ممّا يلي :

2 تمعّن في الأشكال التالية، ثم أكمل الجدول الموالي :



نقول إنّ الزاوية المركزية $\widehat{AOC}$ والزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$ تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AC}$ من الدائرة (الملوّن بالأزرق).



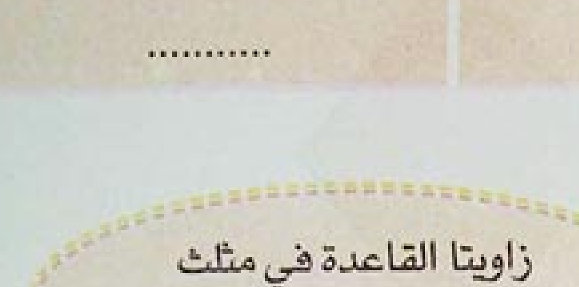
العلاقة بين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{AOC}$	قيس الزاوية المركزية $\widehat{AOC}$	قيس الزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$	الشكل
....	....	....	(1)
....	....	....	(2)
....	....	....	(3)

ماذا تستنتج؟

لنبرهن على النتيجة، التي استنتجتها.

1) الشكل (1) : قطعة المستقيم [BC] قطر للدائرة (C).

- ما طبيعة المثلث OAB ؟ برّر إجابتك.



لدينا : $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (برّر).

ولدينا : $\widehat{AOC} = \widehat{OAB} + \widehat{OBA}$ (برّر).

أكتب $\widehat{AOC}$ بدلالة $\widehat{ABC}$.

قيس الزاوية الخارجية في مثلث تساوي مجموع قيسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها.

2) أعد رسم الشكلين (2) و (3).

ارسم القطر [BD] للدائرة (C).

عبّر عن $\widehat{AOD}$ بدلالة $\widehat{ABD}$ وكذا $\widehat{DOC}$ بدلالة $\widehat{DBC}$.

عبّر عن $\widehat{AOC}$ بدلالة $\widehat{ABC}$.

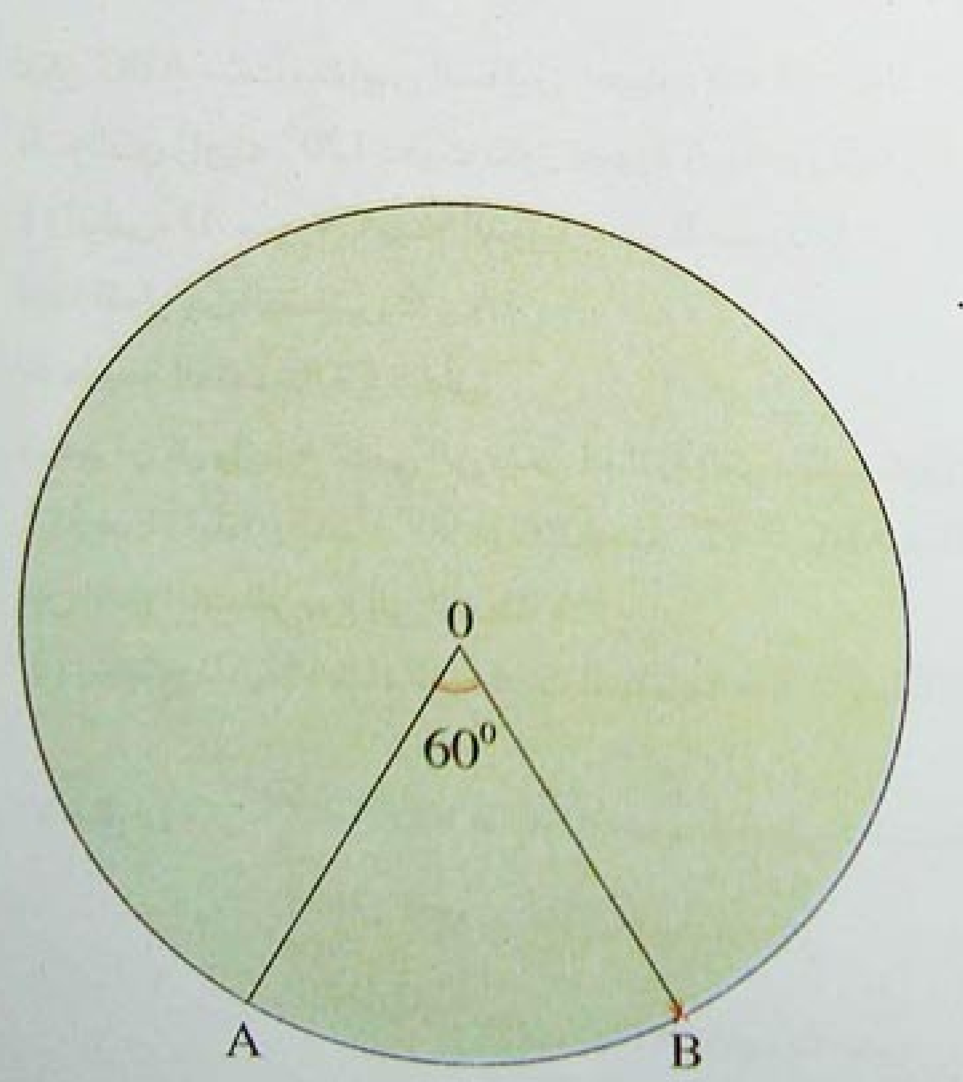
3) أعط نتيجة البرهان.

3 انقل الشكل المقابل :

ارسم عدّة زوايا محيطية تحصر القوس $\widehat{AB}$.

قارن أقياسها. ماذا تستنتج ؟

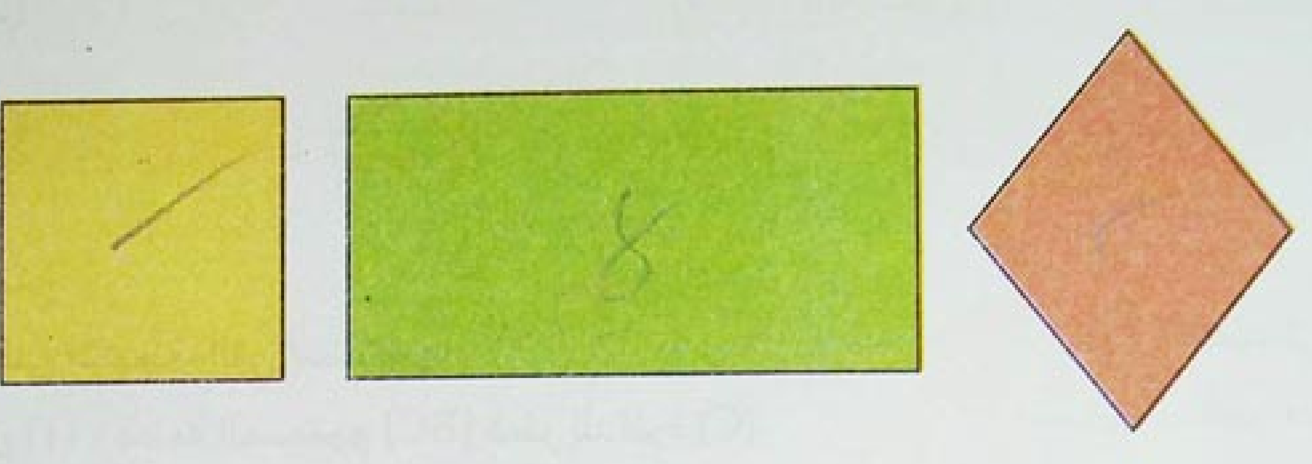
بالاعتماد على نتيجة النشاط السابق : برهن على النتيجة.

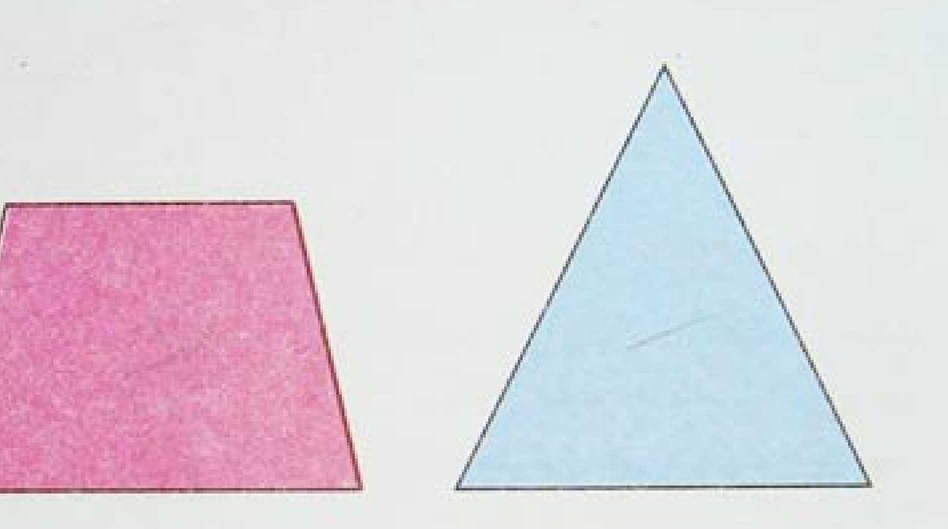


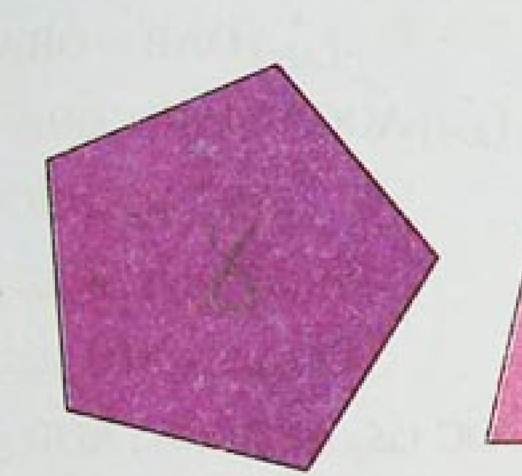
6 المضلعات المنتظمة

المضلع المنتظم هو مضلع كل أضلاعه لها نفس الطول وكل زواياه متقايسة.

1 ما هي المضلعات المنتظمة من بين المضلعات التالية :







2 ليكن ABC مثلث متقايس الساقين حيث : $AB = BC = 4\ cm$ و $\widehat{ABC} = 120°$، وليكن الدوران ذو المركز B، والذي زاويته $120°$ بحيث تكون صورة A بالدوران هي C.

1) أنشىء D، صورة C بهذا الدوران ، ثم E صورة D.

ماذا نقول عن النقطتين E و A؟

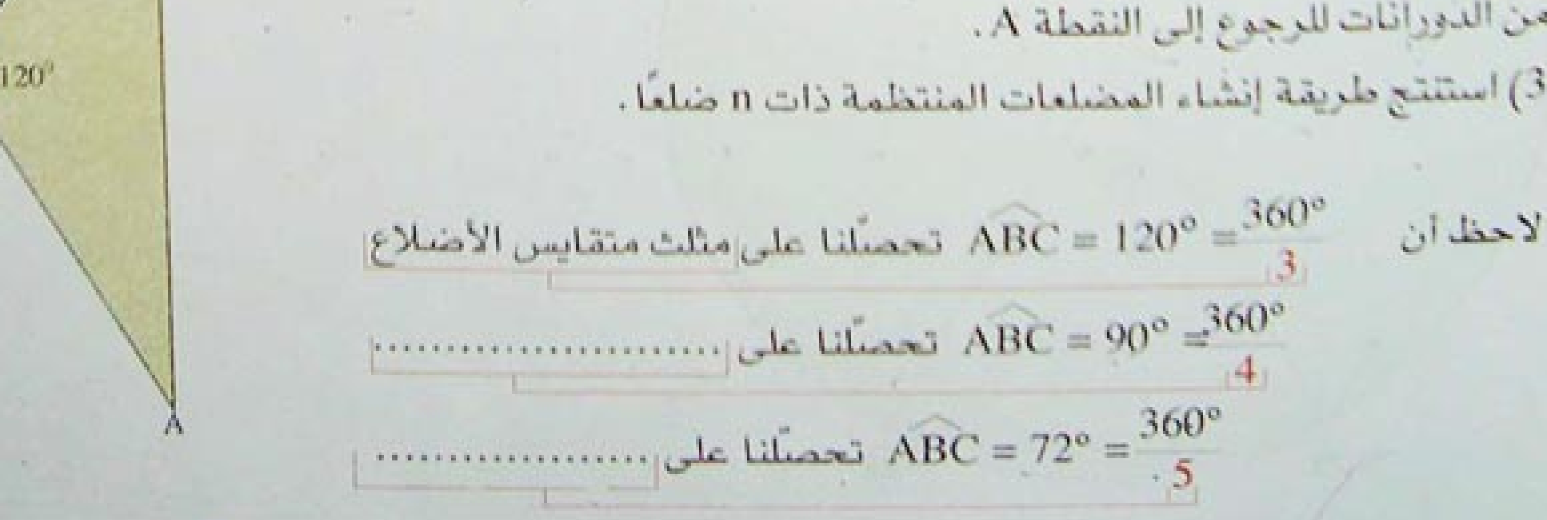
ما طبيعة المثلث CDE ؟ علّل.

برهن أن كل رؤوسه تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) أعد النشاط بأخذ : $\widehat{ABC} = 90°$، ثم $\widehat{ABC} = 72°$ وذلك بإجراء العدد المناسب من الدورانات للرجوع إلى النقطة A.

3) استنتج طريقة إنشاء المضلعات المنتظمة ذات n ضلعًا.





معـــارف

1 الدوران

تحويل شكل بالدوران الذي مركزه O هو إدارتُه حول النقطة O.
بالحفاظ على نفس المسافة بين الشكل والنقطة O، في إتجاه معيّن، وبزاوية محدّدة.

نميّز الدوران بمركز وزاوية واتجاه.

اصطلاح

الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة.
الاتجاه السالب هو الاتجاه الموافق لحركة عقارب الساعة.



الاتجاه الموجب



الاتجاه السالب

ملاحظة

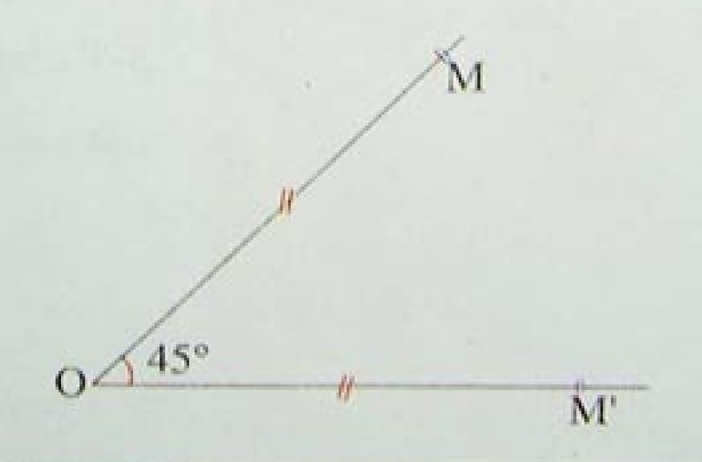
نأخذ، عامة، الاتجاه الموجب كاتجاه للدوران، ما لم يذكر عكس ذلك.

نقول إنّ M هي صورة 'M بالدوران الذي مركزه O وزاويته α
إذا كان : $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = \alpha$.

مثال : النقطة 'M هي صورة M بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 45°، واتجاهه هو الاتجاه السالب.

$OM = OM'$

$\widehat{MOM'} = 45°$



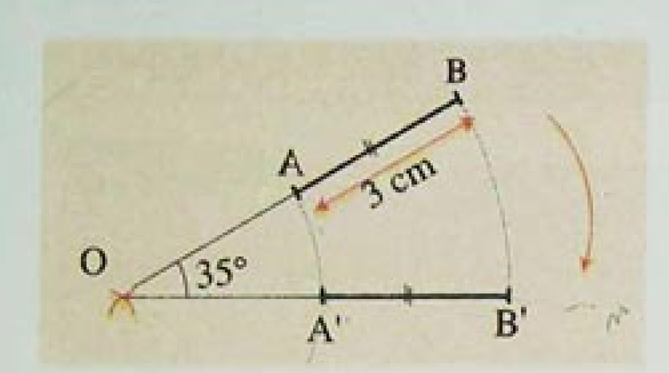
حالة خاصة

الدوران ذو المركز O والزاوية 180° هو تناظر مركزي مركزه O .

2 خواص الدوران

خاصة 1

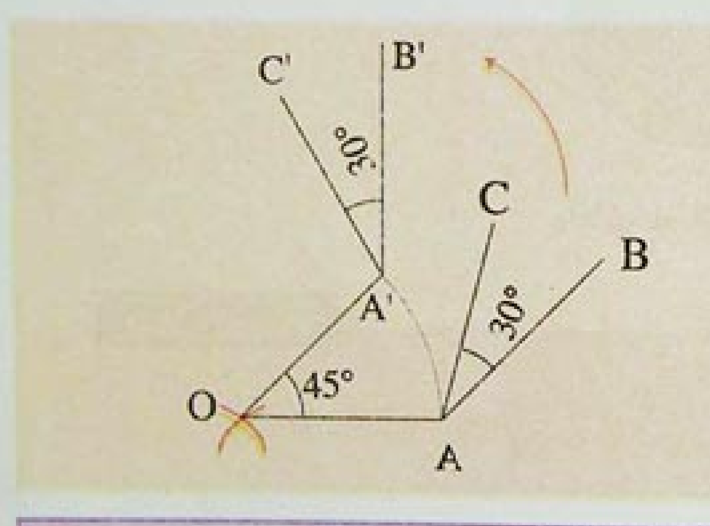
الدوران يحافظ على المسافات، أي أن المسافة الفاصلة بين نقطتين، تبقى ثابتة بين صورتيهما بالدوران.



مثال : لتكن 'A صورة A، و 'B صورة B بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 35°، في الإتجاه السالب،
إذا كان $AB = 3\ cm$، فإن $A'B' = 3cm$.

خاصة 2

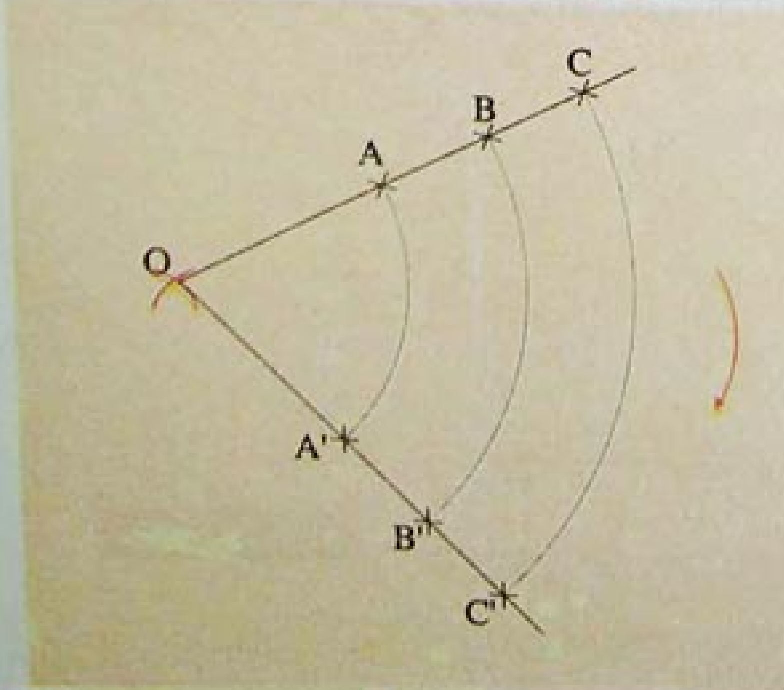
الدوران يحافظ على أقياس الزوايا، أي أنّ صورة زاوية بدوران، هي زاوية تقايسها .



مثال : ليكن $\widehat{ABC} = 30°$. إذا كانت 'A'B'C هي صورة ABC بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 45° في الإتجاه الموجب، فإن $\widehat{A'B'C'} = 30°$.

خاصة 3

الدوران يحافظ على استقامية النقاط، أي أنّه إذا كانت نقاط في استقامية، فإنّ صورها، بأي دوران كان، تبقى في استقامية.



مثال : لتكن النقاط A، B، C في استقامية، ولتكن 'A، 'B، 'C صورها على الترتيب، بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 72° في الإتجاه السالب، فإن النقاط 'A، 'B، 'C في استقامية.

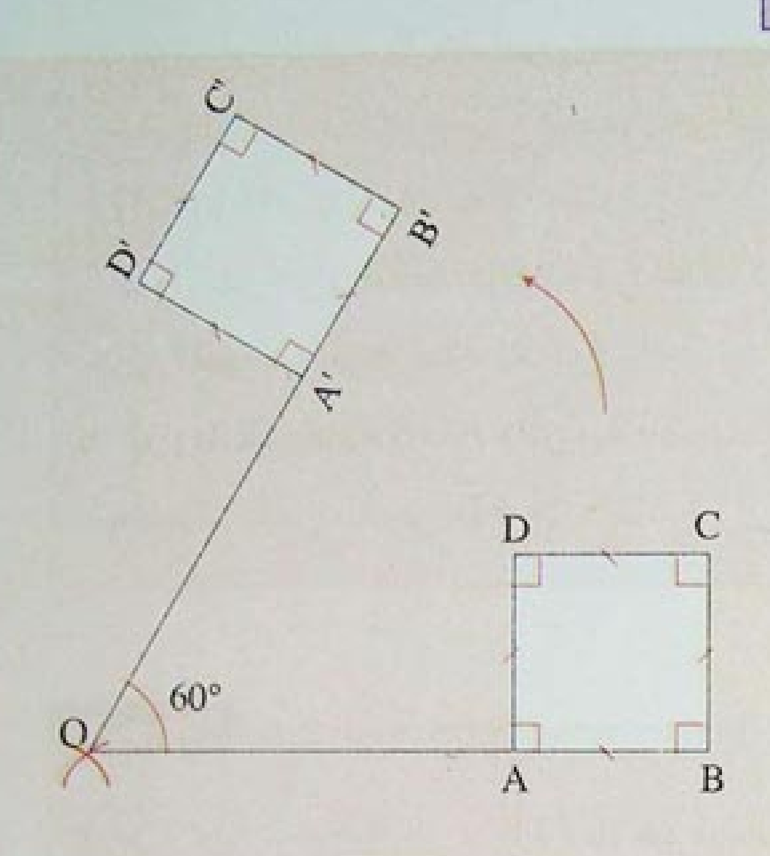
خاصة 4

الدوران يحافظ على طبيعة الأشكال، أي أن صورة شكل بدوران، مطابقة لهذا الشكل، ولها نفس الخصائص.

مثال :

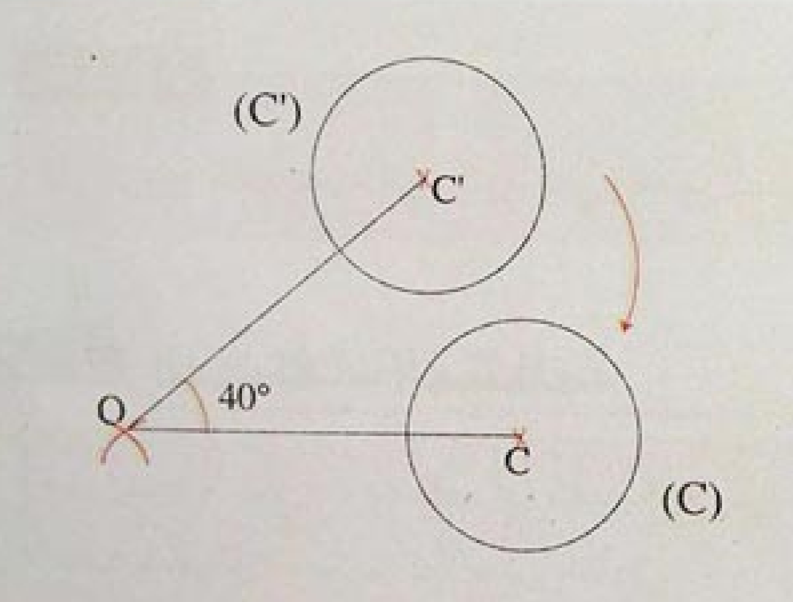
1) صورة مربع بدوران، هي مربع يقايسه.

صورة المربع ABCD هي المربع A'B'C'D' يقايسه، بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 60°، في الإتجاه الموجب.



2) صورة دائرة بدوران، هي دائرة تقايسها.

صورة الدائرة (C)، هي الدائرة (C') تقايسها، بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 40°، في الإتجاه السالب.



صور بعض الأشكال المألوفة بدوران:

- صورة قطعة مستقيم، هي قطعة مستقيم تقايسها.
- صورة نصف مستقيم، هي نصف مستقيم.
- صورة مستقيم هي مستقيم.
- صورة زاوية هي زاوية تقايسها.
- صورة دائرة هي دائرة تقايسها.

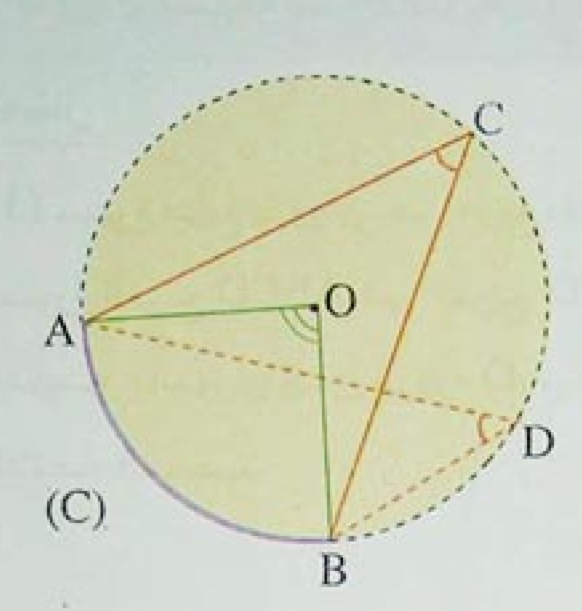


3 الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في دائرة



لتكن (C) الدائرة ذات المركز O.

- نقول عن الزاوية $\widehat{ACB}$ أنها زاوية محيطية في الدائرة(C)، إذا كان رأسها C ينتمي إلى الدائرة (C)، و[CB] و [CA] وتران لهذه الدائرة.
- نقول عن الزاوية أنها مركزية في الدائرة (C)، إذا كان رأسها هو مركز هذه الدائرة.
- الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ والزاوية المحيطية $\widehat{ACB}$ تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة.



خاصة 1

قيس زاوية محيطية في دائرة (C) هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها.

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

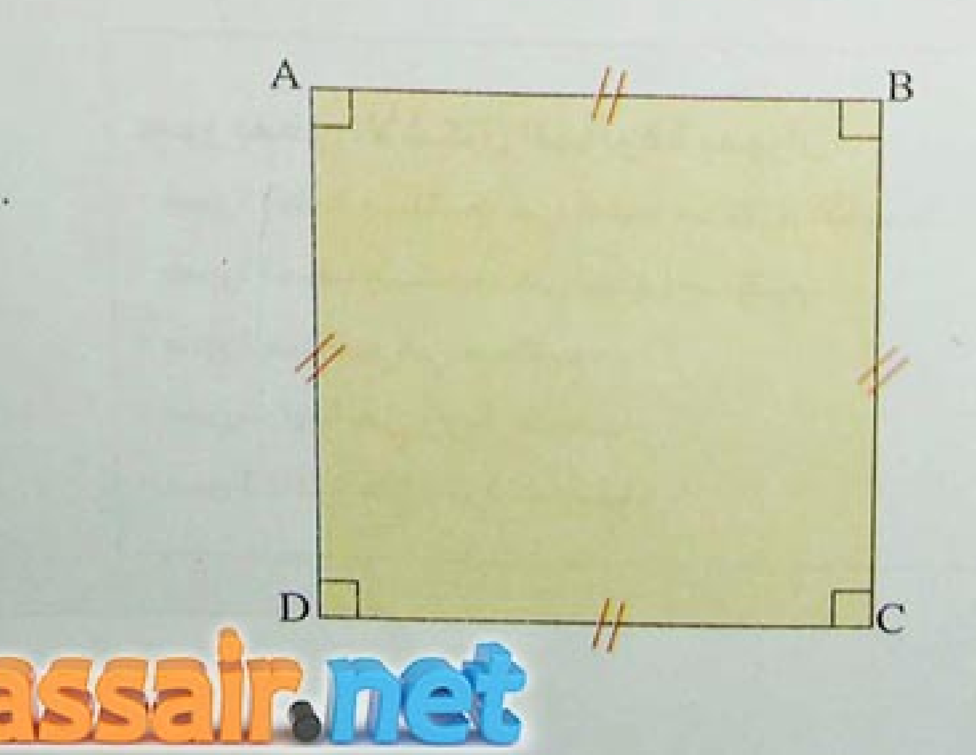
خاصة 2

كل الزوايا المحيطية في دائرة التي تحصر نفس القوس متقايسة.

4 المضلعات المنتظمة

نقول عن مضلّع أنه منتظم، إذا كانت كل زواياه متقايسة وكل أضلاعه لها نفس الطول.

مثال : المربع هو مضلع منتظم.



خاصة 1

توجد دائرة تشمل كل رؤوس المضلّع.
- نقول عن هذه الدائرة أنها دائرة محيطة بالمضلّع المنتظم.
- مركز هذه الدائرة هو مركز المضلّع المنتظم.

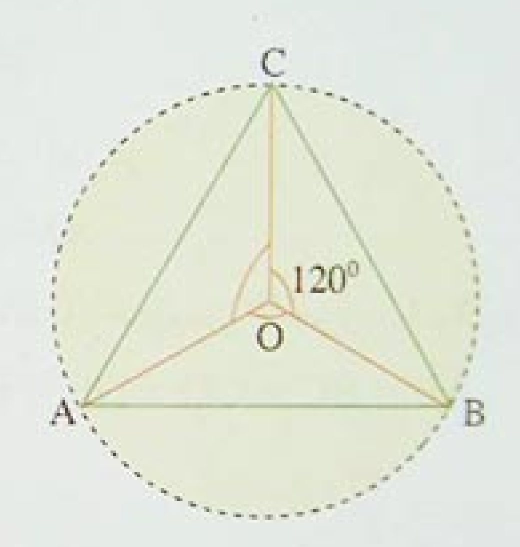
خاصة 2

يبقى المضلّع المنتظم ثابتا، بالدّوران الذي مركزه O مركز المضلّع، والذي زاويته $\widehat{AOB}$ (في أي اتجاه كان)، حيث A و B هما رأسان متتاليان للمضلّع المنتظم.

خاصة 3

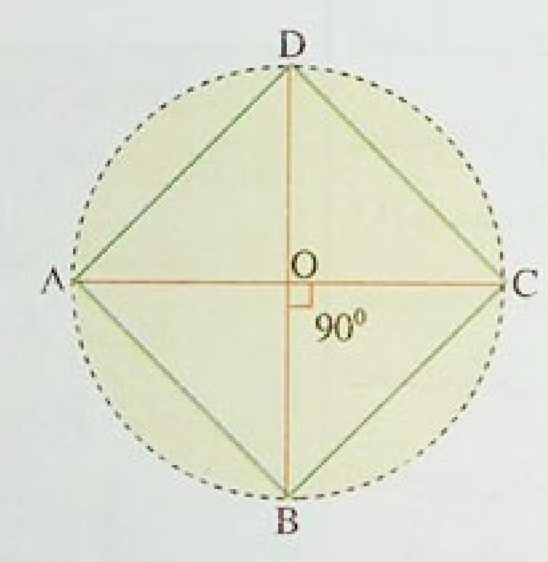
الزوايا المركزية في مضلّع منتظم متقايسة.

أمثلة



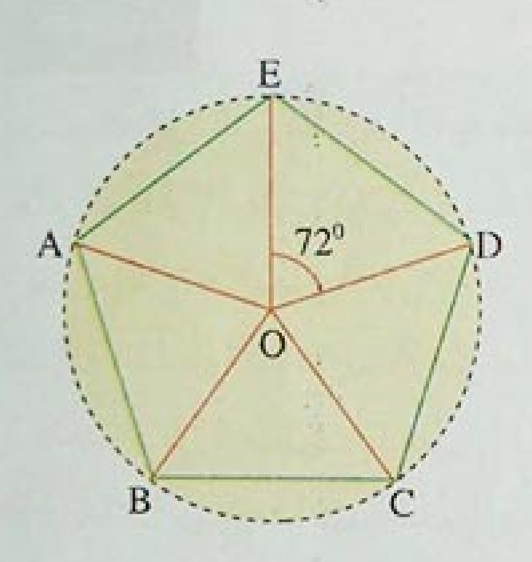
$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \frac{360°}{3} = 120°$

المثلث متقايس الأضلاع



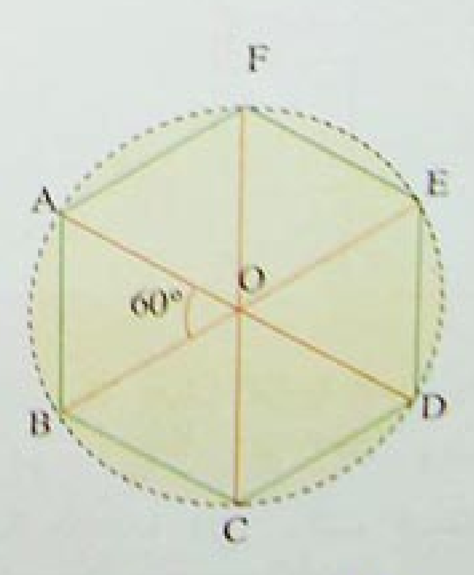
$\widehat{AOB} = ... = \frac{360°}{4} = 90°$

المربع



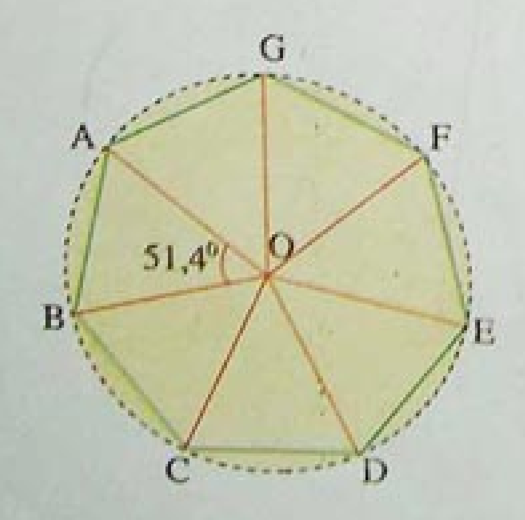
$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = ... = \frac{360°}{5} = 72°$

الخماسي المنتظم



$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = ... = \frac{360°}{6} = 60°$

السداسي المنتظم



$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = ... = \frac{360°}{7} \approx 51,4°$

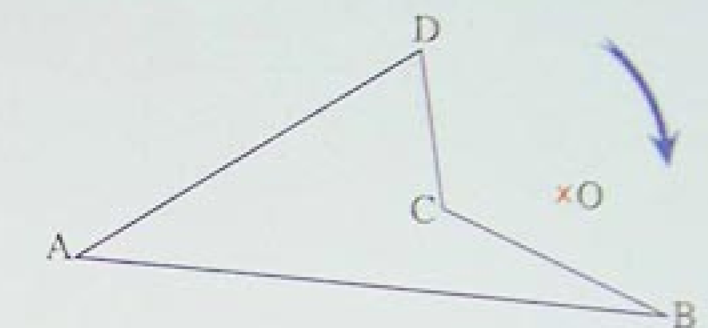
السباعي المنتظم

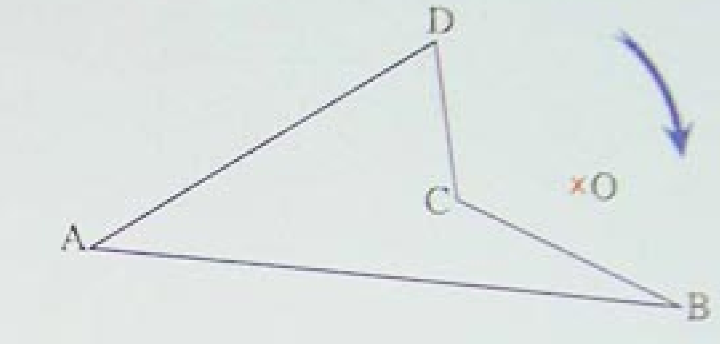


إنشاء صورة شكل بدوران

لإنشاء صورة شكل بدوران، ننشىء صور نقاط الشكل، ثم نصل بينها مع مراعاة خواص الدوران.

مثال أنشىء صورة الشكل الموالي بالدوران الذي مركزه O، وزاويته $70°$، في الاتجاه السالب.





الطريقة

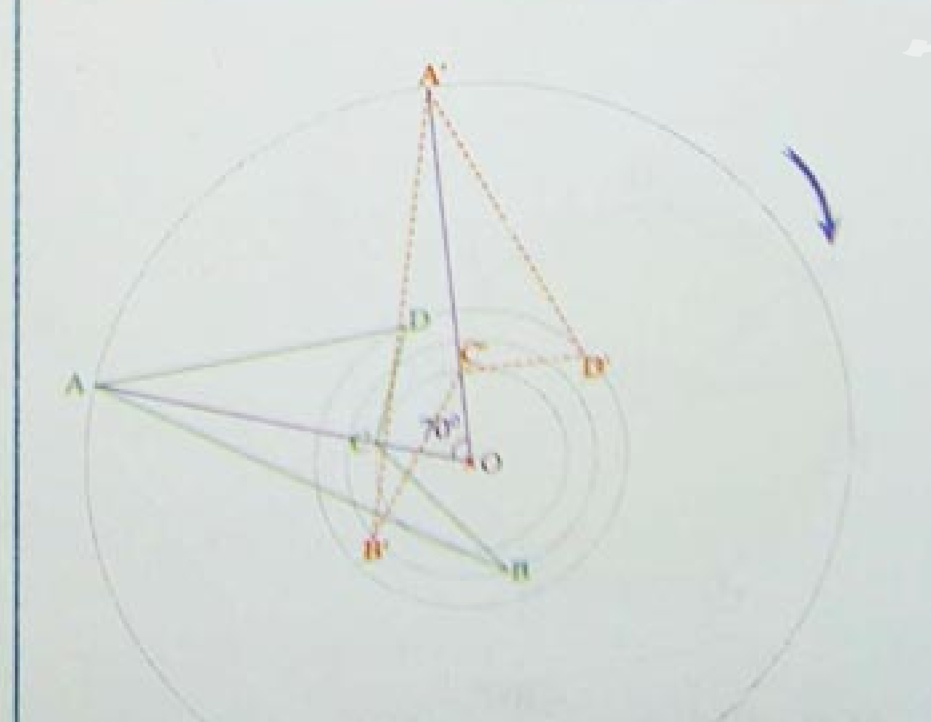
نرسم الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها OA.

نعلّم النقطة 'A على الدائرة بحيث يكون : $\widehat{AOA'} = 70°$

(بمراعاة الانتقال من A إلى 'A في الاتجاه الموافق لحركة عقارب الساعة). 'A هي صورة A بالدوران.

2) نعيد نفس الخطوات، لتعيين 'B صورة B ، 'C صورة C وكذا 'D صورة D بهذا الدوران.

3) الشكل 'A'B'C'D هو صورة ABCD بالدوران الذي مركزه O، وزاويته $70°$ وفي الاتجاه السالب.



إنشاء مضلع منتظم انطلاقا من أحد أضلاعه

انطلاقا من القطعة المستقيمة [AB] حيث $AB = 3\text{ cm}$، أنشىء الخماسي المنتظم الذي مركزه O وضلعه [AB].

الطريقة ننشىء القطعة [AB] بحيث $AB = 3\text{ cm}$.



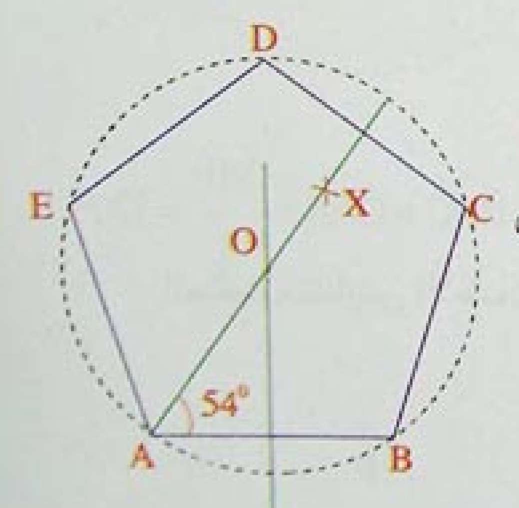
ننشىء محور القطعة [AB] ونصف المستقيم (AX) بحيث $\widehat{XAB} = 54°$ (لماذا؟)

نسمي O نقطة تقاطع محور القطعة [AB] و (AX). O هي مركز الخماسي المنتظم.

نرسم الدائرة ذات المركز O ونصف القطر OA.

نستعمل المدور لانشاء الرؤوس الأخرى C ، D و E بحيث يكون : $AB = BC = CD = DE = EA$

نصل بين النقاط A ، B ، C ، D و E فنحصل على الخماسي المنتظم ABCDE الذي ضلعه [AB] .



ملاحظة

أخذ $\widehat{XAB} = 54°$، لأن قيس الزاوية المركزية في خماسي منتظم هو : $\frac{360°}{5}$ ، أي $72°$ ، وبما أن $\widehat{XAB}$ هي زاوية قاعدية في المثلث المتقايس الساقين OAB، فإنه لدينا :

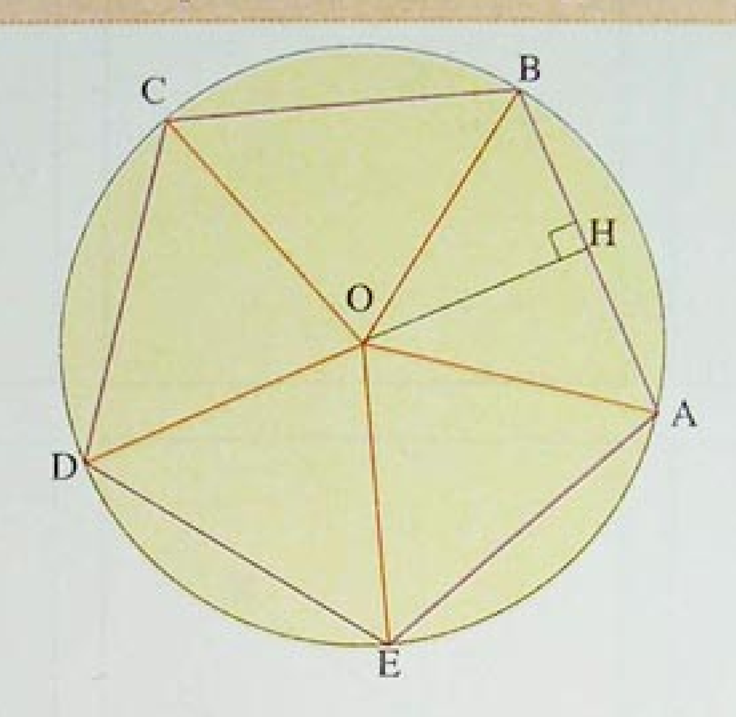
$$\widehat{XAB} = \frac{180° - \widehat{AOB}}{2} = \frac{180° - 72°}{2} = \frac{108°}{2} = 54°$$

طرائق وتمارين محلولة

تمرين

ليكن الخماسي المنتظم ABCDE ذو المركز O.

أوجد العلاقة بين طول الضلع [AB] وارتفاع المثلث OAB (OH في الشكل).



الحل

ABCDE خماسي منتظم، وهذا يعني أنّ زواياه المركزية : $\widehat{AOB}$ ، $\widehat{COB}$ متساوية وقيسها المشترك هو : $\frac{360°}{5} = 72°$.

لدينا : OH هو ارتفاع المثلث OAB المتقايس الساقين، وهذا يعني أنّ (OH) هو محور للقطعة [AB] ومنصف للزاوية $\widehat{AOB}$.

إذن : $AH = \frac{AB}{2}$. (1)

و $\widehat{AOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$. (2)

ولدينا في المثلث AOH القائم في H : $\tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH}$.

ومنه : $OH = \frac{AH}{\tan \widehat{AOH}}$.

وحسب العلاقتين (1) و (2) نجد :

$$OH = \frac{AB}{2\tan\left(\frac{\widehat{AOB}}{2}\right)} = \frac{AB}{2\tan\left(\frac{72°}{2}\right)} = \frac{AB}{2\tan(36°)}$$

إذن العلاقة بين AB و OH هي :

$$OH = \frac{AB}{2\tan(36°)}.$$



تمارين للتطبيق المباشر

1 بالاعتماد على النظر، ما هي الحالات التي تمثل دورانا مركزه O:

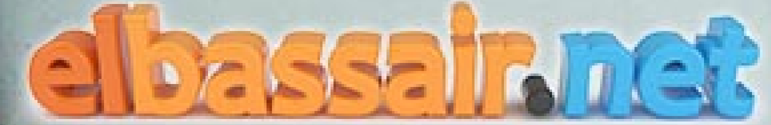
(3) (2) (1)

(6) (5) (4)

2 أعط الخواص غير المحققة ليكون الشكل ② هو صورة الشكل ① بالدوران الذي مركزه O:

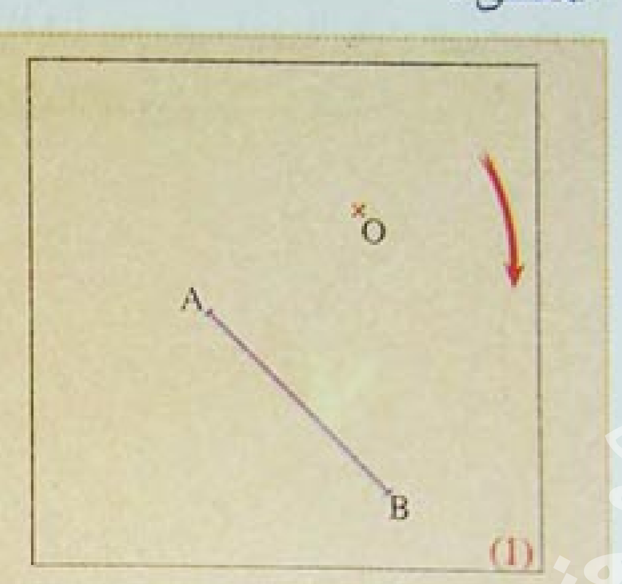
(3) (2) (1)

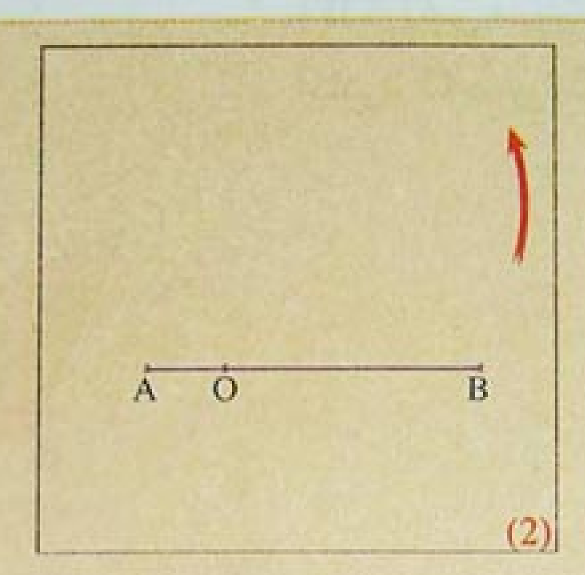
(6) (5) (4)

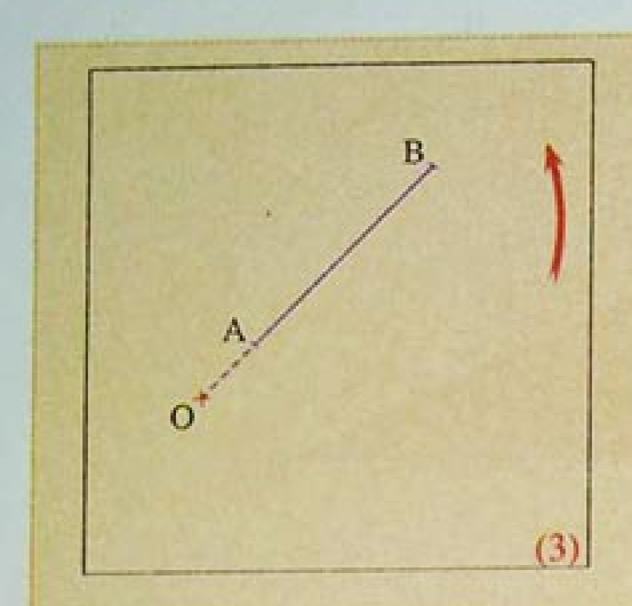


تمارين للتطبيق المباشر

3 أنشىء في كل حالة مما يلي، صورة قطعة مستقيم بالدوران الذي مركزه O، وزاويته $45°$ في الاتجاه المعطى :







4 ليكن المثلث المتقايس الساقين ABC، الذي رأسه الأساسي A.

و $AB = 5\ cm$، $\widehat{BAC} = 50°$،

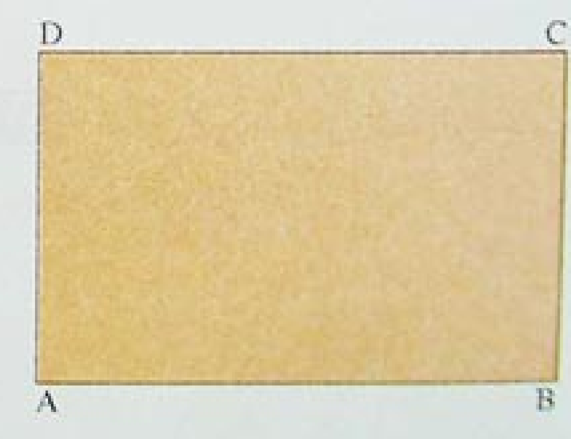
ولتكن D نقطة من الضلع [AB] بحيث $AD = 4\ cm$.

1) ما هي صورة B بالدوران الذي مركزه A، وزاويته $50°$ واتجاهه هو الاتجاه من B نحو C ؟

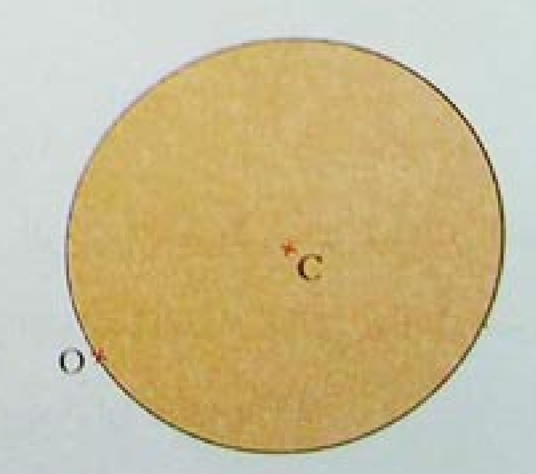
2) أنشىء 'D، صورة D بهذا الدوران.

5 انقل الأشكال الموالية ثم أنشىء صورها بالدوران المعطى في كل حالة.

1) الدوران الذي مركزه O، وزاويته $35°$، في الاتجاه الموجب.



2) الدوران الذي مركزه O، وزاويته $80°$، في الاتجاه الموجب.



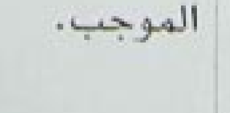
3) الدوران الذي مركزه O، وزاويته $120°$، في الاتجاه السالب.

O

D C

A B

4) الدوران الذي مركزه O، وزاويته $63°$، في الاتجاه الموجب.



C

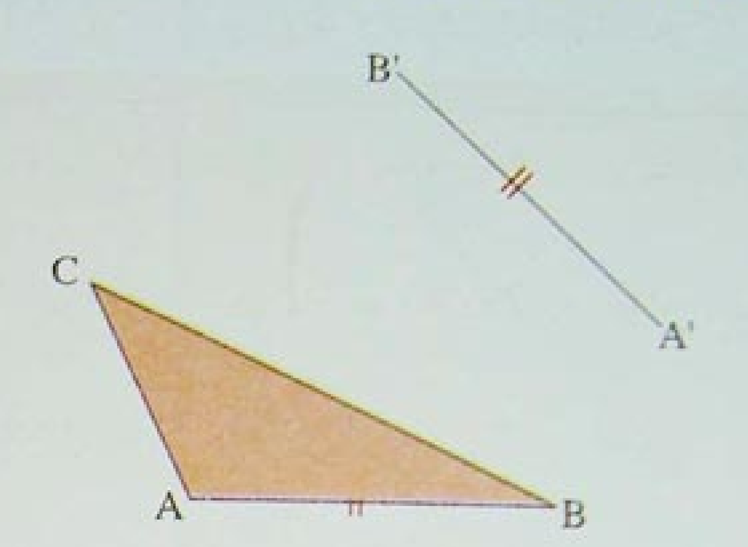
O

A

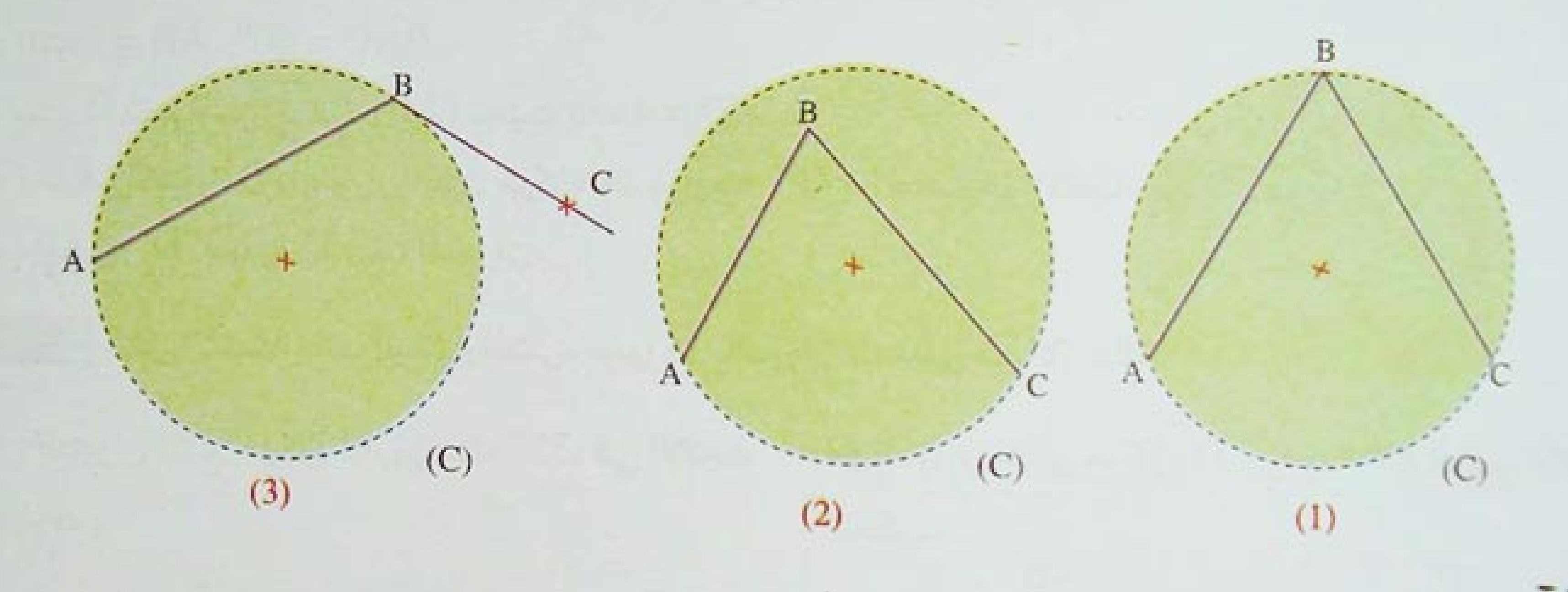
B

6 انقل الشكل الموالي :

[A'B'] هي صورة [AB] بدوران. دون البحث عن مركزه، أنشىء 'C صورة C بهذا الدوران.

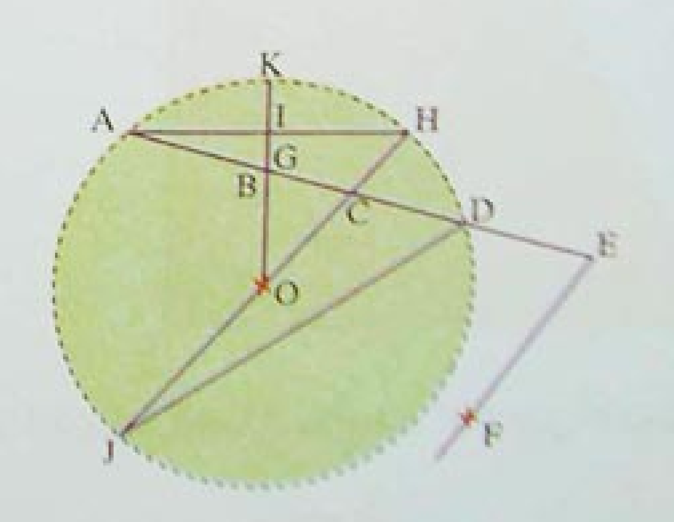


7 هل الزاوية $\widehat{ABC}$ محيطية في الدائرة (C) في كل حالة مما يلي؟ اشرح.



- اشرح

8 تمعّن في الشكل الموالي :



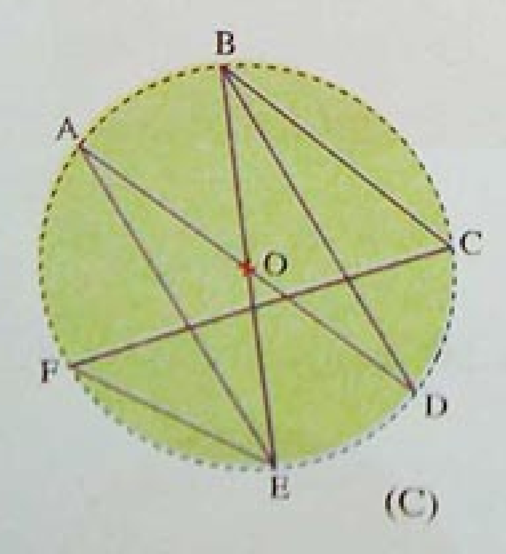
1) اذكر زاويتين مركزيتين.

2) اذكر ثلاث زوايا محيطية.

3) اذكر الزاويتين اللتين تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{HD}$.

4) هل الزاوية $\widehat{AEF}$ محيطية؟ مركزية؟ برّر.

9 تمعّن في الشكل الموالي حيث (C)، هي الدائرة ذات المركز O.



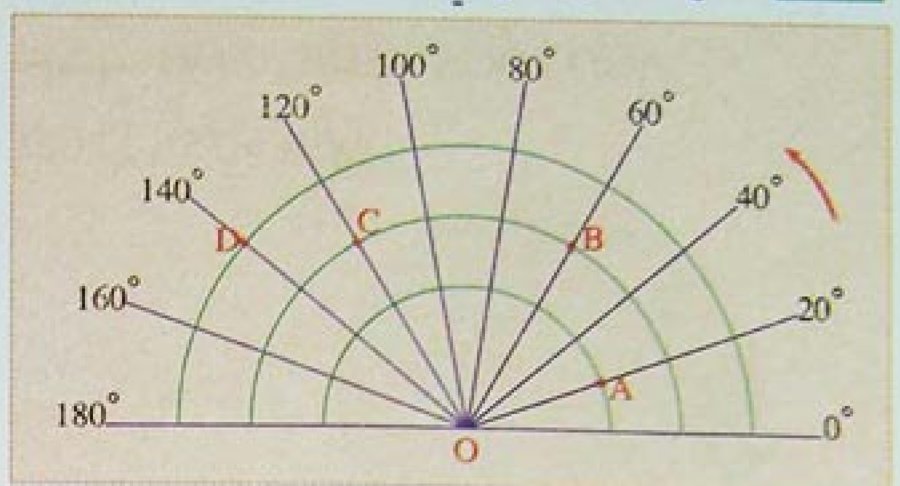
1) ما هي الزوايا المحيطية التي تحصر القوس $\overset{\frown}{CE}$ ؟

2) ما هي الزوايا المحيطية التي تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$؟

3) اذكر أربع زوايا مركزية.



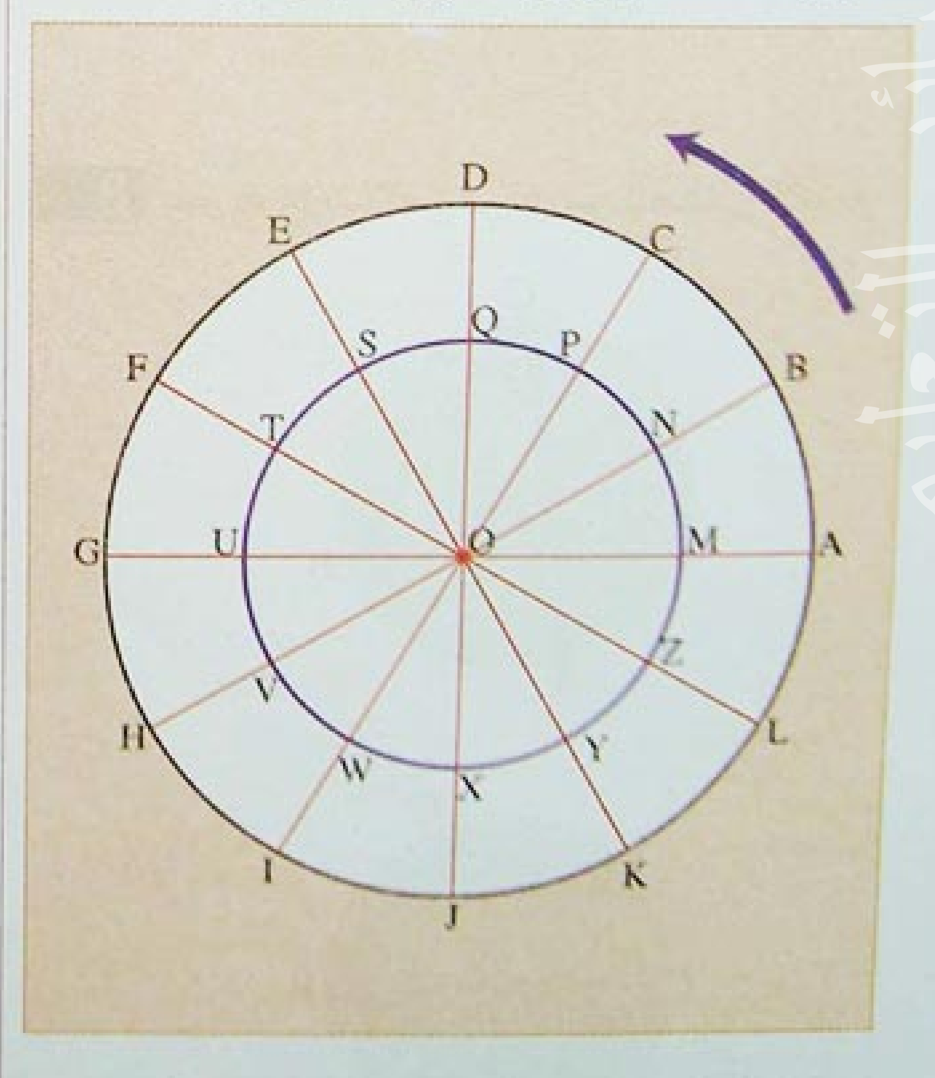
1 انقل الشكل الموالي:



عيّن 'A صورة A، 'B صورة B، 'C صورة C، 'D صورة D بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 20° في الاتجاه المعطى.

- قِس طول [AB] و [BC]؟
- أعط (بدون قياس) 'A'B و 'B'C.
- ما هو قيس $\widehat{CBA}$ ؟ أعط (بدون قياس) $\widehat{C'B'A'}$.
- عين على الشكل، صور A، B و C بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 60° وفي الاتجاه الموجب.

2 يمثل الشكل الموالي دائرتين لهما نفس المركز O، مقسمتين إلى 12 زاوية قيس كل منها 30°.



- نطبق على الشكل دورانات مركزها O في الإتجاه المبين.

أكمل الجمل التالية :

1) صورة A بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 30° هي ....

2) صورة M بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 90° هي ....

3) صورة C بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 120° هي ....

4) صورة L بالدوران الذي مركزه O، وزاويته .... هي E.

5) صورة .... بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 150° هي W.

6) صورة Z بالدوران الذي مركزه O، وزاويته .... هي V.

7) صورة .... بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 180° هي I.

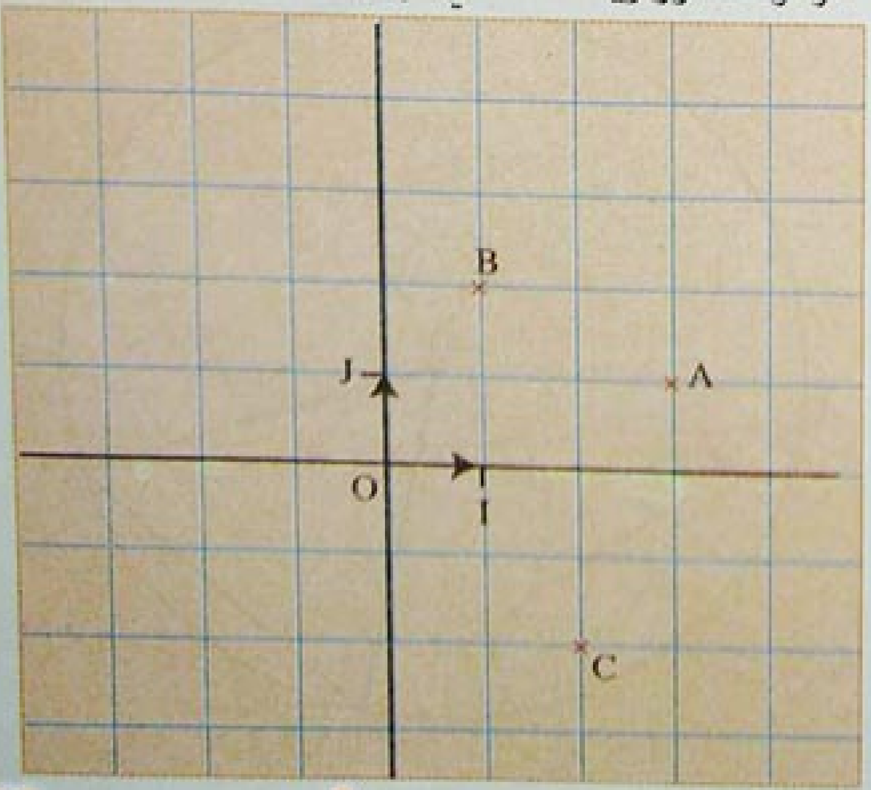
3 ليكن المعلم المتعامد المتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ولتكن النقط A، B، C.

1) أعطِ احداثيات النقاط A، B، C.

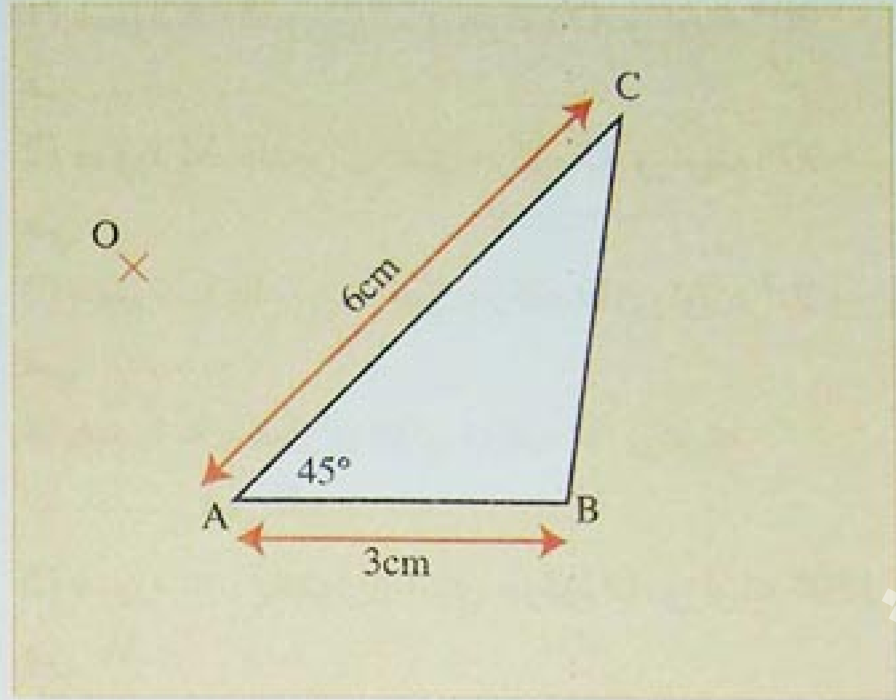
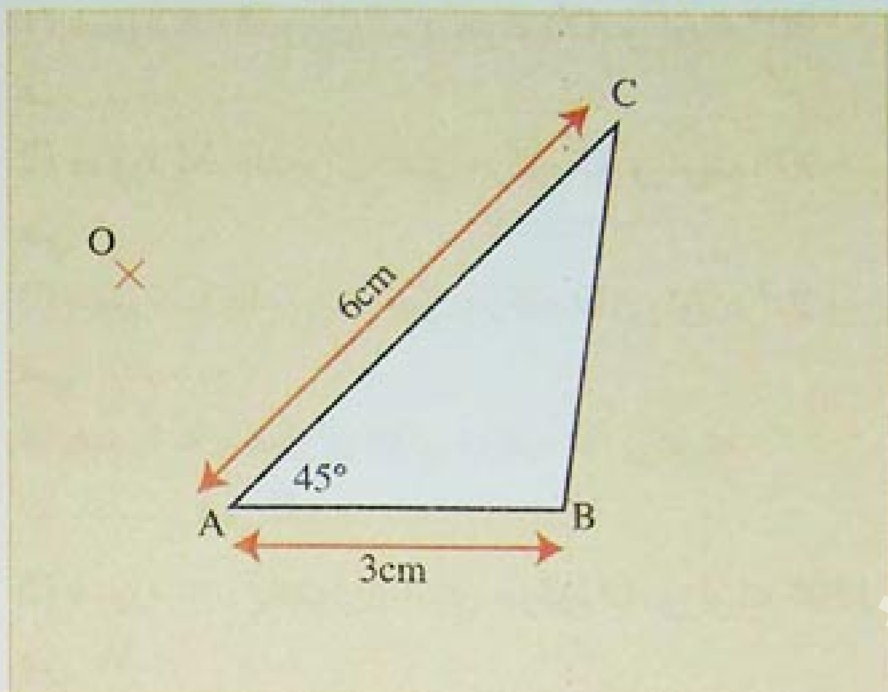
2) أعط احداثيتي النقطة 'A صورة A بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 90° في الإتجاه الموجب.

3) أعط احداثيتي النقطة 'B صورة B بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 30° في الإتجاه الموجب.

4) أعط احداثيتي النقطة 'C صورة C بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 45° في الإتجاه السالب.



4 انقل المثلث ABC الموضح في الشكل :

1) أنشىء 'A'، B'، C صور C ،B ،A، على الترتيب، بالدوران الذي مركزه O، وزاويته 50° في الإتجاه الموجب.

2) ما هو قيس الزاوية $\widehat{B'A'C'}$ ؟

3) ما هما طولا القطعتين [A'B'] و [A'C'] ؟

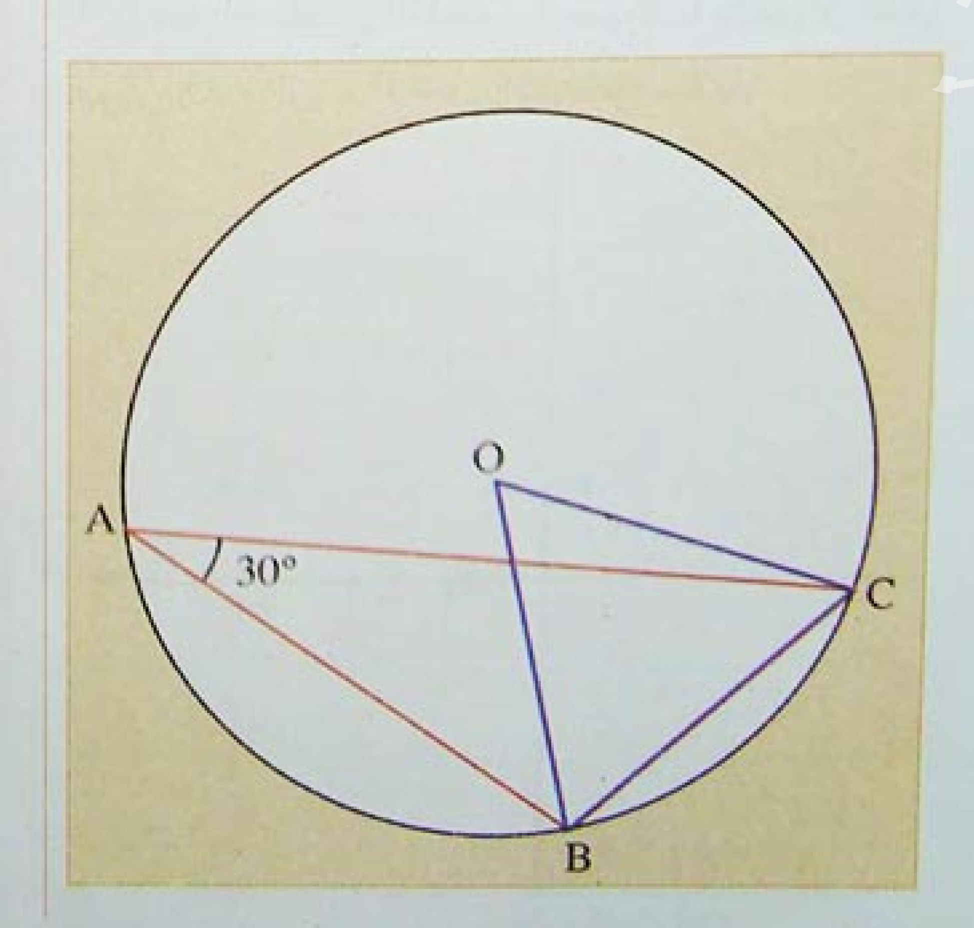
4) هل القطعتان [CB] و [C'B'] لهما نفس الطول ؟

5 لتكن الدائرة ذات المركز O.

ولتكن A، B، C نقاطا من هذه الدائرة بحيث :

$\widehat{BAC} = 30°$.

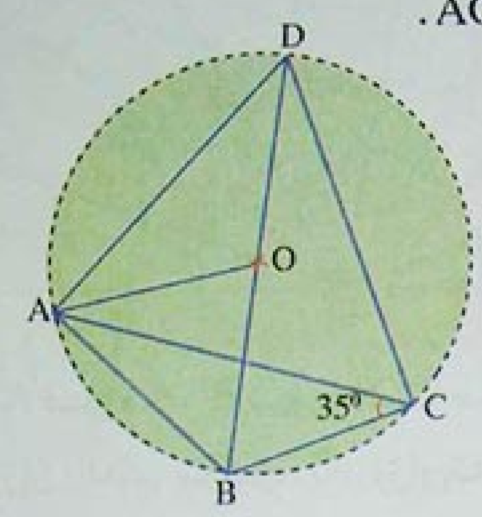
– برهن أن المثلث OBC متقايس الأضلاع.



6 لتكن الدائرة التي مركزها O وقطرها DB.

احسب : $\widehat{AOB}$ ، $\widehat{ADB}$ ، $\widehat{DCA}$ ، $\widehat{AOD}$.

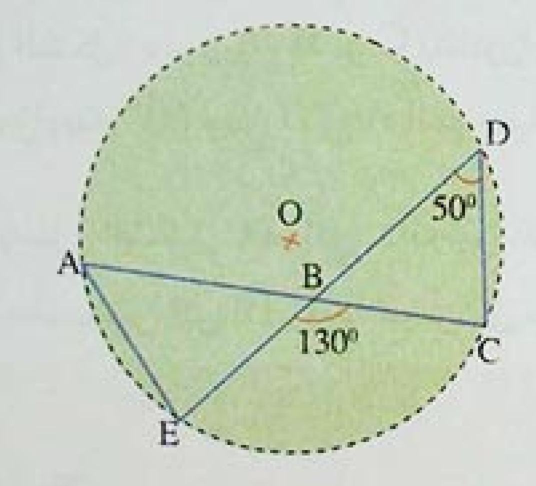
علما أنّ: $\widehat{ACB} = 35°$.



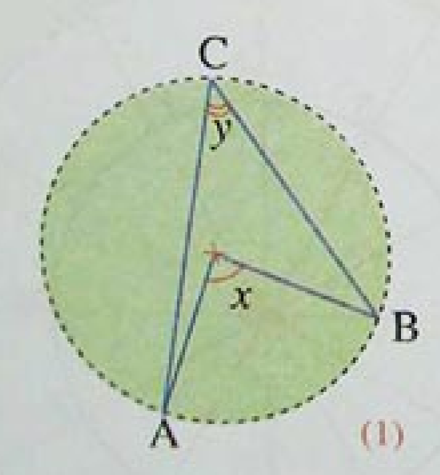
7 لتكن الدائرة التي مركزها O حيث :

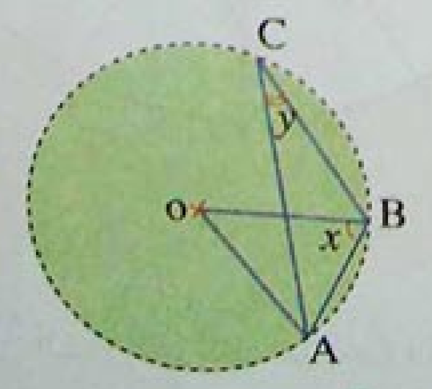
[DE] و [AC] وتران لها و $\widehat{EDC} = 50°$ ، $\widehat{EBC} = 130°$.

احسب $\widehat{AEB}$.



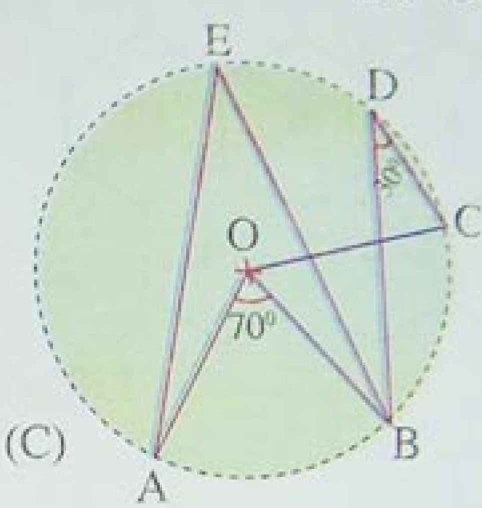
8 عبّر عن y بدلالة x في كل من الحالتين الآتيتين :

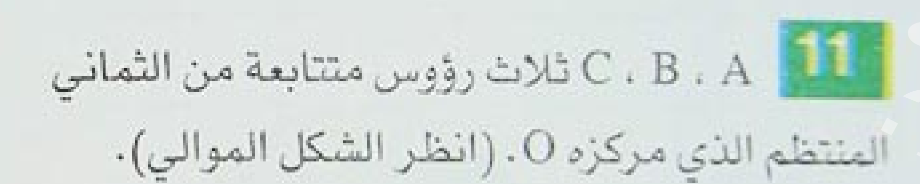




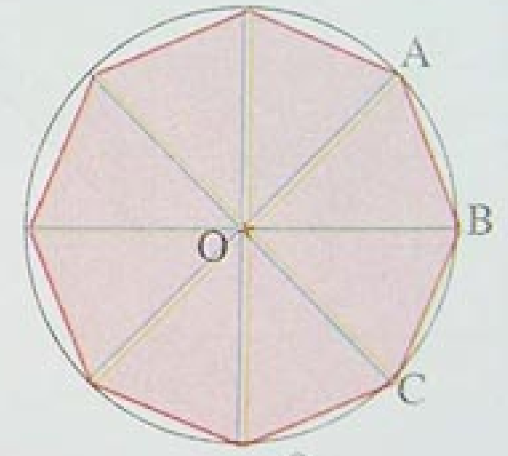


10 (C) دائرة مركزها O. A ، B ، C ، D ، E
نقاط من الدائرة. $\widehat{BDC} = 30°$ و $\widehat{AOB} = 70°$.
1) احسب قيس الزاوية $\widehat{AEB}$.
2) احسب أقياس زوايا المثلث BOC.
3) ما هو قيس الزاوية $\widehat{ADC}$؟



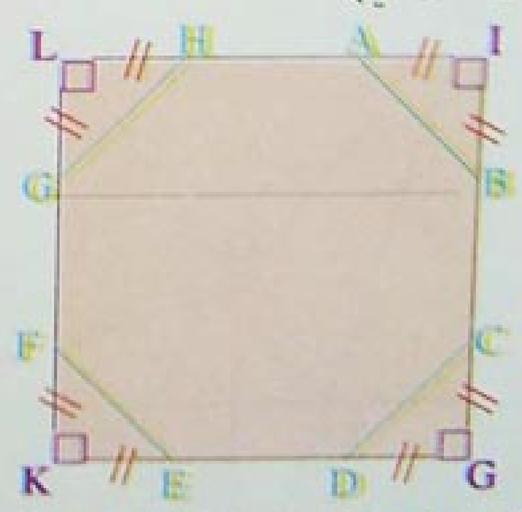


11 A ، B ، C ثلاث رؤوس متتابعة من الثماني المنتظم الذي مركزه O. (انظر الشكل الموالي).



ما هو قيس الزاوية $\widehat{ABC}$.

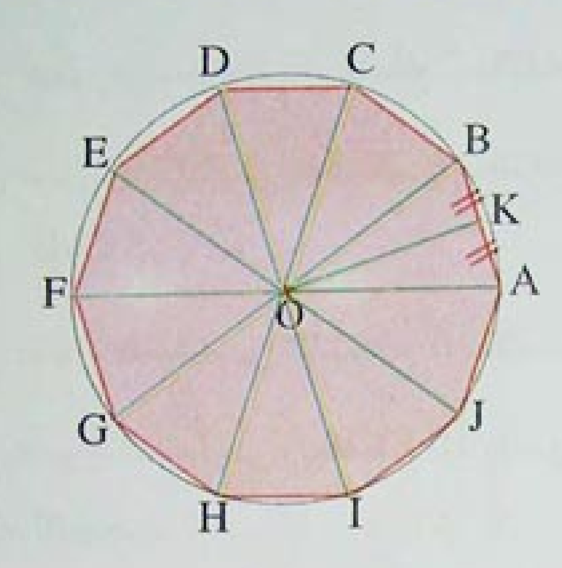
12 LIGK مربّع. ABCDEFGH مضلع ثماني.
(انظر الشكل الموالي).



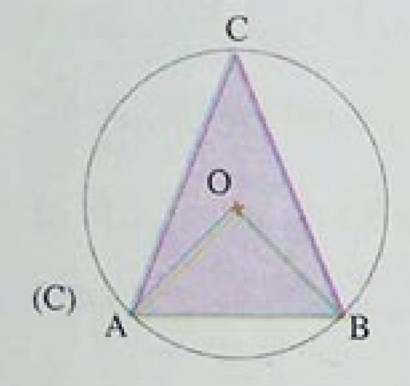
– أعط أقياس الزوايا الداخلية للمضلع الثماني.
– هل هذا المضلع الثماني منتظم ؟ علّل.

13 أنشىء سباعيا منتظما مركزه O وطول ضلعه 3 cm.

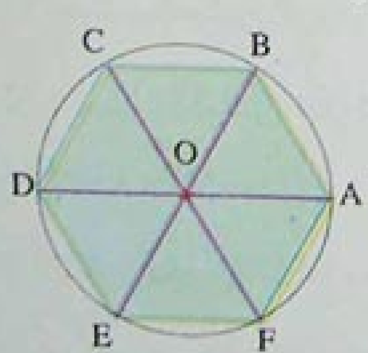
14 يمثل الشكل الموالي، عشاريا منتظمًا مركزه O.
نصف قطر الدائرة المحيطة بهذا العشاري المنتظم هو: AO = 2,5 cm ، K هو منتصف [AB].
احسب AB بالتقريب إلى 10^{-1} من السنتيمتر.



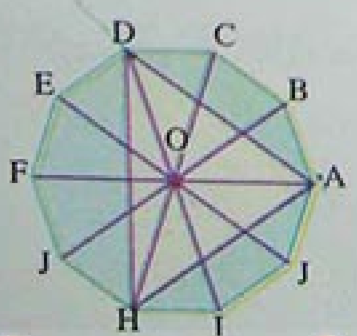
15 (C) دائرة مركزها O. (انظر الشكل الموالي).
ما هو قيس الزاويتين $\widehat{ACB}$ و $\widehat{AOB}$ علما أنّ :
$\widehat{AOB} = (2x + 34)°$،
$\widehat{CAB} = (x + 2)°$،
$\widehat{ABC} = (3x + 6)°$.



16 ABCDEF سداسي منتظم مركزه O.
ما هي صورة المثلث OAB بـ :
1) التناظر المحوري بالنسبة إلى (DA).
2) التناظر المركزي ذي المركز O.
3) الانسحاب بالشعاع $\overrightarrow{FE}$.
4) الدوران ذي المركز B، والزاوية 60° في الاتجاه السالب.

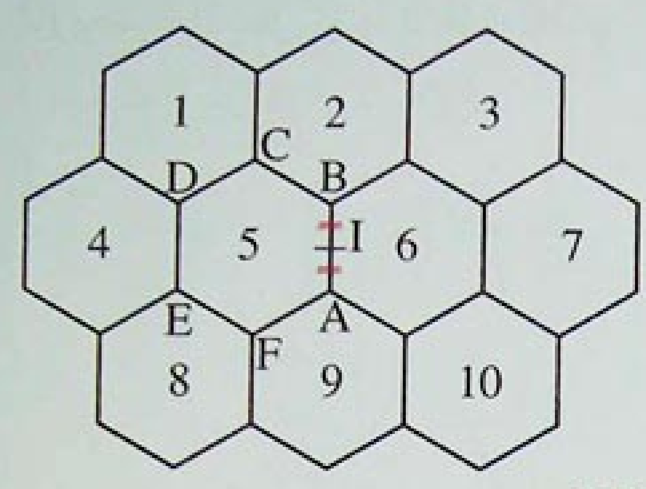


17 ABCDEFGHIJ عشاري منتظم مركزه O.
(انظر الشكل الموالي).
أعط أقياس زوايا المثلث ADH.



مســـائـل

1 يمثل الشكل المقابل عشرة سداسيات منتظمة مرقمة من 1 إلى 10 . نسمي السداسي المنتظم الخامس ABCDEF، ونرمز بـ I لمنتصف القطعة [AB].



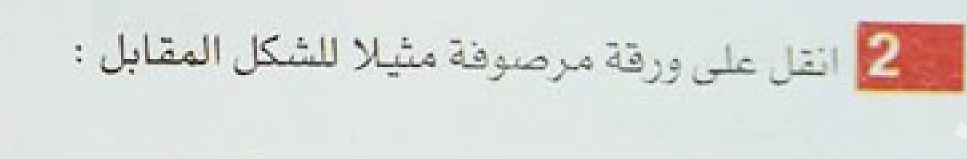
- أجب عن الأسئلة التالية (بدون تبرير) :

1) ما هي صورة السداسي المنتظم 2 بالتناظر المركزي الذي مركزه I ؟

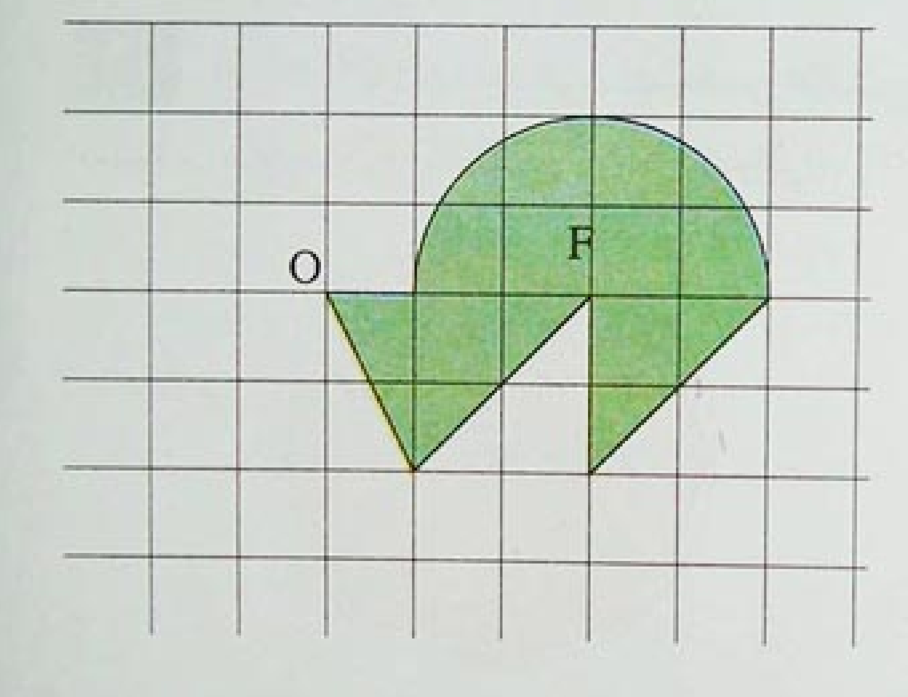
2) ما هي صورة السداسي المنتظم 7 بالتناظر المحوري الذي محوره المستقيم (AB) ؟

3) ما هي صورة السداسي المنتظم 3 بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BF}$ ؟

4) ما هي صورة السداسي المنتظم 10 بالدوران الذي مركزه A، وزاويته $120°$ في الإتجاه الموجب.



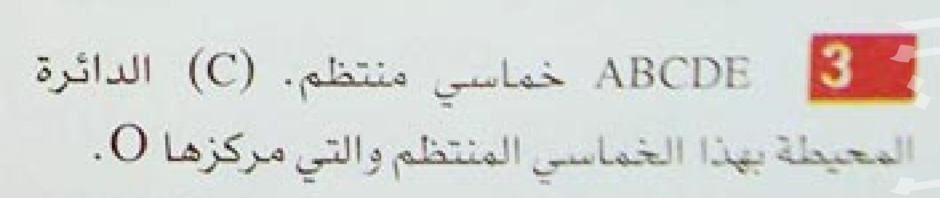
2 انقل على ورقة مرصوفة مثيلا للشكل المقابل :



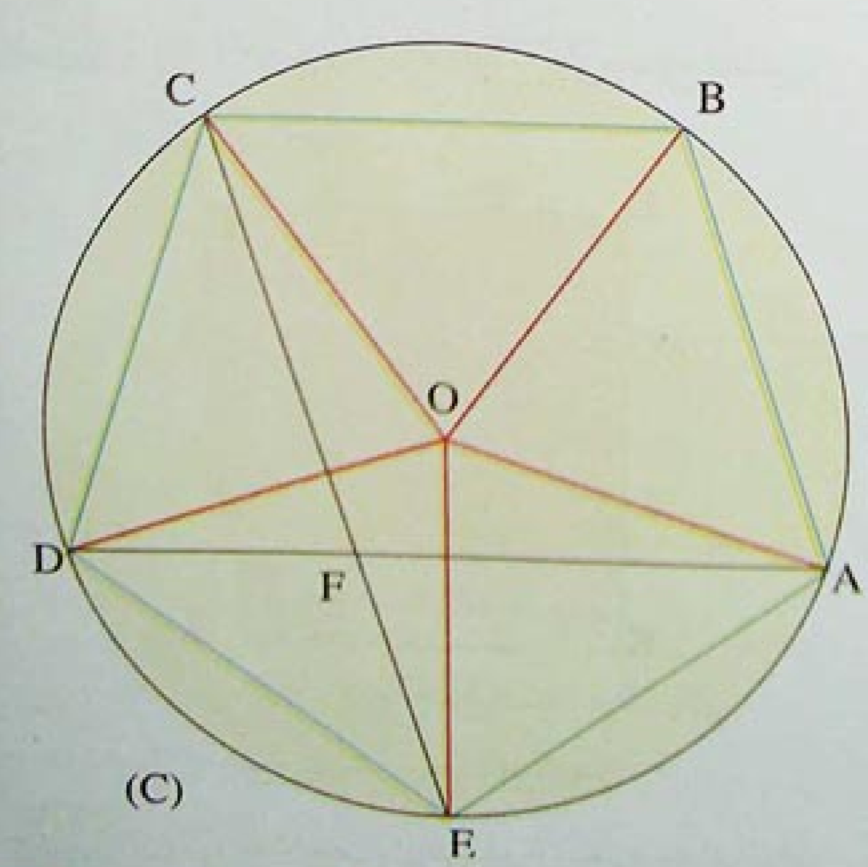
1) أنشىء F_1 صورة F بالدوران الذي مركزه O، وزاويته $30°$ في الاتجاه الموجب.

2) أنشىء F_2 صورة F_1 بالدوران الذي مركزه O، وزاويته $45°$ في الاتجاه الموجب.

3) F_2 هو صورة F بدوران. أعط مميزاته.



3 ABCDE خماسي منتظم. (C) الدائرة المحيطة بهذا الخماسي المنتظم والتي مركزها O.



1) احسب أقياس الزوايا المركزية $\widehat{DOE}$ و$\widehat{AOC}$.

2) احسب أقياس الزوايا المحيطية $\widehat{DAE}$ ، $\widehat{DCE}$، $\widehat{AEC}$، و$\widehat{ADC}$.

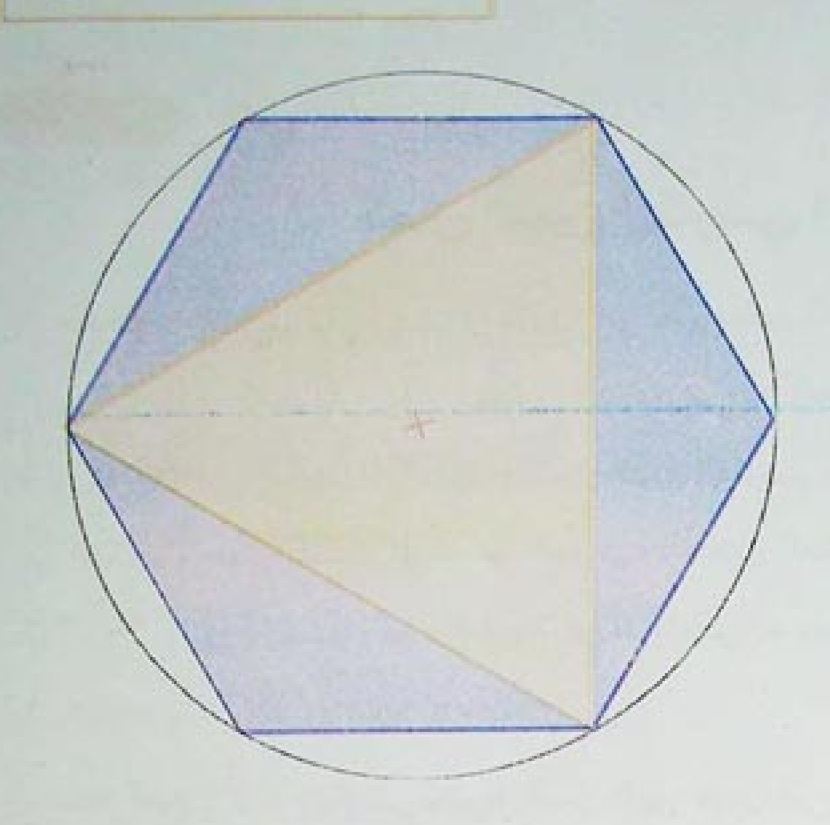
3) لتكن F نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و(EC).
برهن أن المثلثين EAF و DCF متقايسا الساقين.

4) برهن أن ABCF معين.

مسـائل

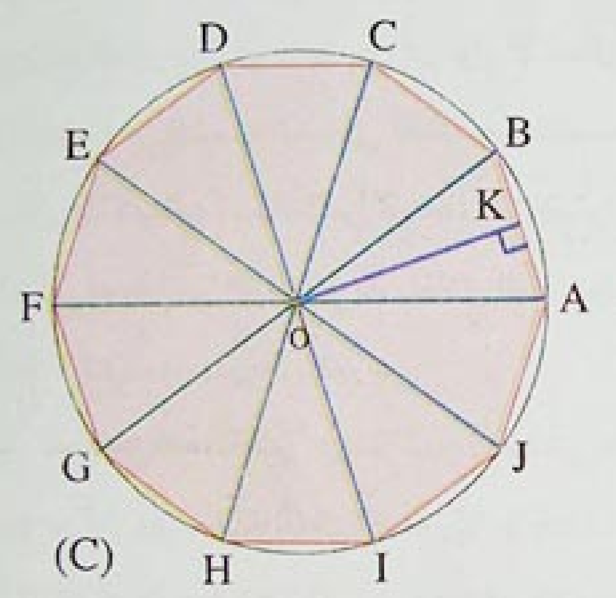
4 ننشىء مثلثًا متقايس الأضلاع وسداسيًا منتظمًا في نفس الدائرة المحيطة.

ما هي نسبة مساحة المثلث إلى مساحة السداسي المنتظم ؟



5 يمثل الشكل المقابل عشاريا منتظما مركزه O، مركز الدائرة المحيطية (C).

[OK] هو ارتفاع المثلث المتقايس الساقين OAB. إذا علمت أن محيط العشاري المنتظم ABCDEFGHIJ هو 150 m:



1) احسب طول الضلع [AB].

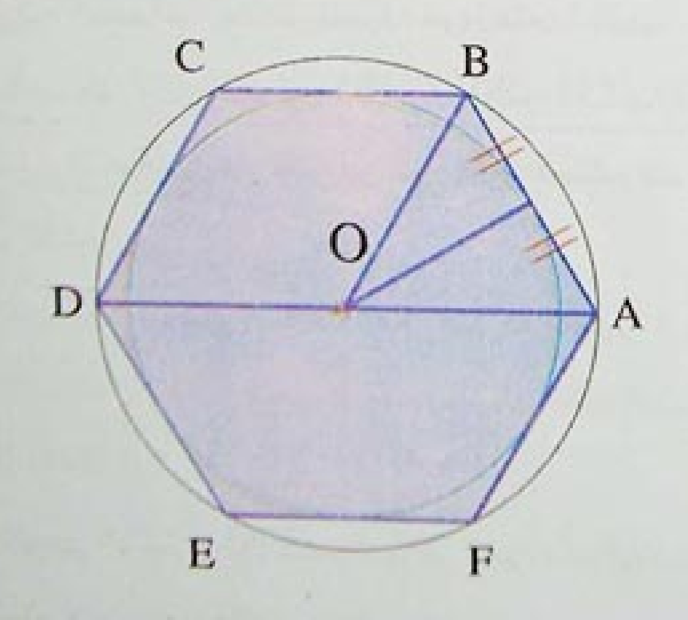
2) أعط قيس الزاوية $\widehat{AOB}$ وكذا $\widehat{OAB}$.

3) أعط القيمة المضبوطة ثم المقربة إلى 10^{-2} لطول القطعة [OK].

4) احسب مساحة المثلث OAB. استنتج مساحة العشاري المنتظم ABCDEFGHIJ.

6 لتكن S مساحة الدائرة الداخلية في السداسي المنتظم الذي مركزه O. ولتكن 'S مساحة الدائرة المحيطة بهذا السداسي المنتظم.

– احسب النسبة $\frac{S}{S'}$.



7 احسب نسبة مساحة مضلع منتظم ذي n رأسا ومساحة الدائرة المحيطة به (n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3).

– احسب هذه النسبة من أجل : $n = 5$ ، $n = 10$ ، $n = 20$ ، $n = 30$.

– فكّر في طريقة لحساب المساحة التقريبية لدائرة.



من التاريخ

كمال الدين الفارسي (665هـ/1266م - 718هـ/1319م)

حياته : ولد الفارسي في إيران وتوفّي عن عمر يناهز 53 سنة. وقد تنقّل كثيرا طلبا للعلم، وكتب في مقدمة كتابه "تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر" بأن أستاذه الشيرازي (634هـ/1236م-710هـ/1311) أشار عليه بكتاب المناظر لابن الهيثم (354هـ/965م-430هـ/1039م). ولكمال الدين الفارسي كتاب في الرياضيات كان مفقودا إلى عهد قريب، هو "تذكرة الأحباب في بيان التحاب"، حول الأعداد المتحابة. قدّم فيه العددين المتحابين 220 و 284، وكذا العددين المتحابين 17296 و 18416، في حين كان الأوربيون ينسبون هذه النتيجة إلى الرياضي السويسري ليونهارد أولر (1707-1783)، وسمّوا العددين المذكورين عددي أولر المتحابين!

ماذا قدّم : قدّم الفارسي نظرية تفسّر ظهور قوس قزح. يراها المختصون أكثر إقناعا من الناحية الرياضية مقارنة بما جاء به غيره. بل يؤكد المؤرخون المعاصرون أن أول الأعمال المتناسقة علميا للظواهر الضوئية هي أعمال الفارسي. وهكذا تبيّن للفارسي من خلال تجربته أن الشعاع الضوئي القادم من الشمس ينكسر مرتين فينجر عن ذلك انعكاس أو أكثر يحدث بين انكسارين.

وكان يرى بأنه يمكن استخلاص كل مميزات قوس قزح بدراسة مرور أشعة الضوء عبر قطرة ماء مثّلها الفارسي في تجربته بالكرة المليئة بالماء. وهنا تميّز الفارسي باستغلال الهندسة كأداة لتجربته الفيزيائية. ومن ثمّ استطاع أن يقدّم قبل ثلاثة قرون النتائج التي توصّل إليها ديكارت ونيوتن في الغرب.

كتاب "تنقيح المناظر" : لقد تبيّن لمحققي كتاب تنقيح المناظر أن الخاصية الموجية للضوء والصوت كانت حاضرة في ذهن الفارسي: وهو من رواد هذه الفكرة الحديثة. واكتشف الفارسي أن الألوان تظهر لأسباب عديدة، لكنها تتولد دائما من تداخل الضوء والمادة. لقد كانت ظاهرة التداخل من أهم انشغالات علماء القرن العشرين، ولا تزال تشغل بالهم إلى يومنا هذا! ومن جهة أخرى لاحظ الفارسي أنه لا يوجد فاصل بين لون ولون في طيف الألوان وأنه يمكن اعتبار عدد الألوان غير منته، ذلك أنه يرى بأن الضوء يتلوّن بالانعكاس والانكسار.

زرقة السماء : هناك ظاهرة أخرى خاصة بالضوء، وهي الحيود، ذات علاقة بزرقة السماء. لقد قدّم الفارسي التأويلات العلمية لهذه المسألة. وكان الكندي (185هـ/801م-252هـ/862م) قد أعطى قبله تفسيرا لزرقة السماء موضحًا أن هذا اللون ليس اللون الحقيقي للسماء، بل هو ناتج عن مزج اللون المظلم للسماء مع جزئيات الغبار المتطايرة في الجو التي صارت مضيئة بسبب انعكاس ضوء الشمس.

لقد أكد الفارسي هذه النظرية وفسّرها تفسيرا فيزيائيا. ويرى المختصون أن أفكار الفارسي حول الضوء كانت سابقة لأوانها، ولم يطوّرها اللاحقون فنسيت. نشير إلى أن كتاب "تنقيح المناظر" لم يكتشف من قبل الغربيين إلا عام 1876 بمكتبة هولندية فنشر ملخصا له.

الولد الأعز : قال الشيرازي في تلميذه كمال الدين الفارسي : "الولد الأعزّ الأكرم، والإمام الأفضل الأعلم، قدوة الأذكياء، ملك العلماء، كمال الملّة والدين". فلا غرابة أن يتساءل المؤرخون الغربيون اليوم عن صاحب هذه النظريات وعن أعماله التي لم تصلهم بعد، وأن يدرسوا ما عثروا عليه من مؤلفاته، سيما في حقل الفيزياء وعلم الفلك. ولا غرابة أيضا أن يطالب بعضهم بأن يسجّل اسم الفارسي إلى جانب أسماء العلماء الأوربيين اللامعين الذين عملوا في نفس الحقل الذي اهتم به الفارسي، أمثال الإنكليزي نيوتن (1642-1727) والعالم الهولندي هيوغنس (1629-1695).



استراحة

الرياضيات تتقدم

أين نجد الرياضيات (2)

نتابع استعراض بعض اهتمامات الرياضيات التطبيقية اليوم التي تبرز لنا دور الرياضيات في حل المسائل العلمية المطروحة حديثا :

8. الرقمنة : إن المعلومات (سواء كانت نصا مكتوبا أو صوتا مسجلا أو صورة متحركة أو غير متحركة) التي تجدها في حاسوبك أو في القرص المضغوط أو في الأمواج المرسلة من محطات فضائية أو من هاتف نقال جلها مشفرة بالنظام الثنائي 0 أو 1 . لكن إذا التصقت حبة غبار على القرص المضغوط أو دخل شعاع كوني وأصاب مركب إلكتروني مجهري أو حدثت عاصفة مخلفة اضطرابات كهرومغناطيسية فإن الإشارة 0 قد تتحول إلى 1 والإشارة 1 إلى 0. وإن حدث ذلك فهذا يعني أن "نعم" أصبحت "لا" ... و "لا" صارت "نعم". وفي هذا المجال لازالت البحوث الرياضية جارية، وهي مبنية على نظرية "الحقول المنتهية" وترتبط بحل المعادلات الجبرية.

9. كيف نبلّط : كان الرياضيون وعلماء البلورات قد تساءلوا عن كيفية تغطية المستوي أو الفضاء بأشكال هندسية معينة (مربعات، مستطيلات، مضلعات، مكعبات، ...). هذه المسألة لم ينته البحث فيها بعد رغم بساطتها الظاهرية! إن مسألة تغطية المستوي بنفس الشكل الهندسي لم يحل إلا في نهاية القرن التاسع عشر . والسبب في ذلك أن أداة حله الرئيسية، وهي نظرية الزمر، لم تظهر إلا في تلك الفترة بأعمال إفريست غالوا (1811–1832) حول حل المعادلات الجبرية. فمن قال أن نظرية المجموعات عديمة الجدوى؟

10. المحاكاة : صارت دراسة واختبار العديد من الحلول والمسائل (التجارب النووية، صناعة الطائرات، إطلاق الأقمار الصناعية ووضعها على مداراتها، الخ) تتم عبر المحاكاة العددية. وعلى سبيل المثال، كانت دراسة وقع الصدمة في حوادث المرور يتم في الماضي بوضع جسم إنسان اصطناعي داخل السيارة ، ثم نجعل السيارة تسير بسرعة معينة وتصدم حاجزا. لكن الأمر تطور الآن حيث صارت محاكاة الصدمة تتم رقميا ... أي بحساب ما يجري خلال الصدمة عبر نموذج رياضي. هذه النمذجة تؤدي إلى دراسة معادلات تفاضلية جزئية لازال البحث فيها جاريا.

11. الخطوط والبقع : لا شك أنك تساءلت لماذا تكون أجسام الحيوانات كالنمر والحمار الوحشي مخططة في حين نجد حيوانات أخرى كالفهد والزرافة تحمل بقعا؟ ولماذا تكون مساحات تلك البقع تختلف من حيوان لآخر؟ إلخ. لقد استطاعت الرياضيات أن تعالج هذا الموضوع. وهكذا تبيّن المعادلة الرياضية المتعلقة بهذه المسألة أن أشكال البقع التي تظهر على بعض الحيوانات تتوقف فقط على حجم وشكل المنطقة المتواجدة فيها على الجسم.

12. الغابات : ما هو تأثير المناخ وتغيراته على نمو الشجر؟ كيف يمكن الحفاظ بقدر الإمكان على الغابات؟ تلك أسئلة تجيب عنها النمذجة الرياضية، وفي هذه النمذجة تدخل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تصف العديد من الظواهر الطبيعية التي تتغير بتغير الزمان والمكان. وقد سجّل تقدم واضح في هذا المجال إبان أواخر القرن العشرين.

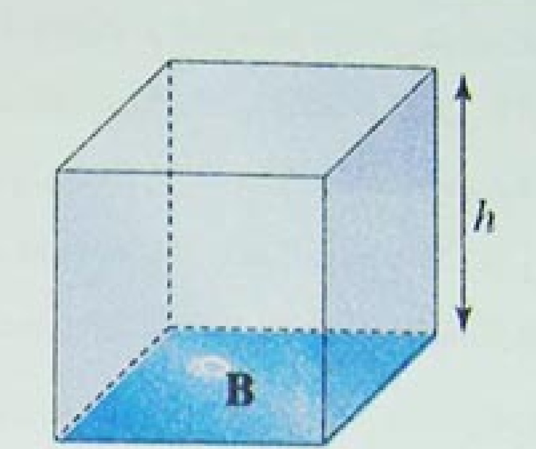
13. نظرية البيانات : هناك مسألة معروفة في الرياضيات تعرف باسم "مسألة جسور كونغسبرغ السبعة" : هل بإمكان متجول أن يطوف بالمدينة شريطة أن يمر مرة واحدة فوق كل جسر من الجسور السبعة التي بنيت فوق النهر العابر لمدينة كونغسبرغ البولندية؟ كان الرياضي السويسري أولر قد أجاب عن هذا السؤال بالنفي عام 1736. وما يلفت كانت هذه المسألة من وراء بزوغ فرع "نظرية البيانات" في الرياضيات عرف تطورا كبيرا منذ منتصف القرن العشرين. ومن المسائل التي حلت بفضل هذه النظرية مسألة الألوان الأربعة التي حلّت عام 1976 . والواقع أن نظرية البيانات لا تهمّ الرياضيين فحسب بل نجدها أيضا في الدوائر الكهربائية وفي حسابات الجزيئات الأولية لدى الفيزيائيين. كما تدخل في حقل الاقتصاد وتسمح بتقليص التكاليف وبالتسيير الجيد لحركة السيارات والطائرات وشبكات المترو.

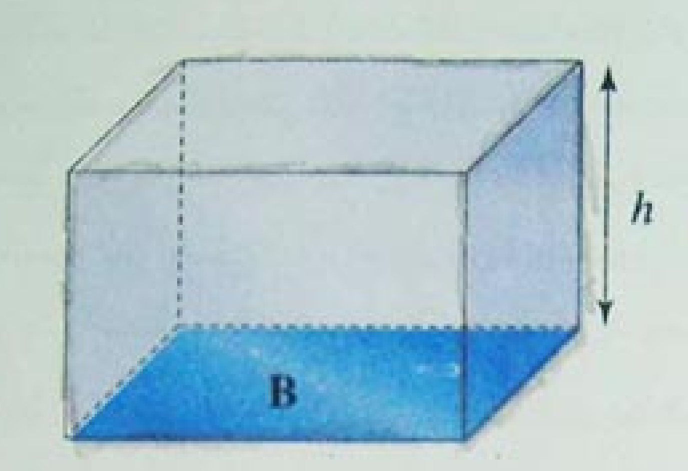


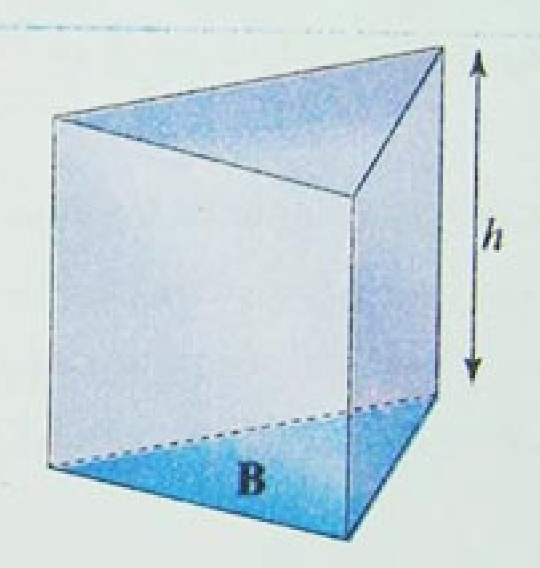
14 الهندسة في الفضاء

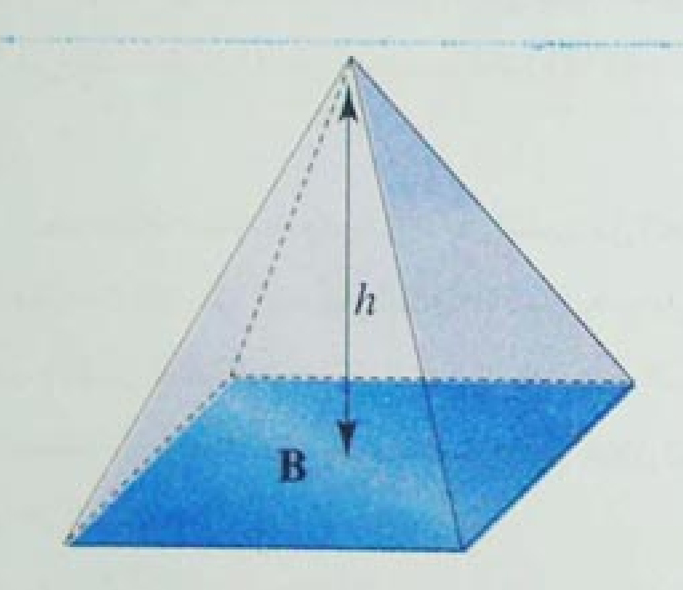
تمهيد

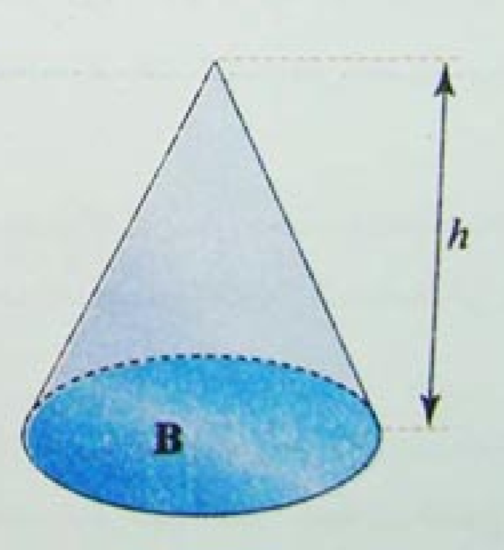
سمّ المجسمات التالية :

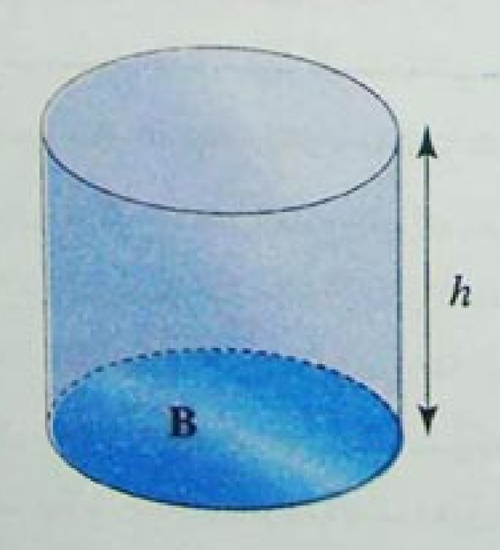








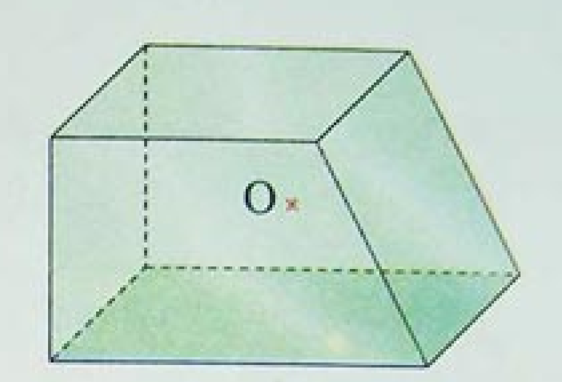




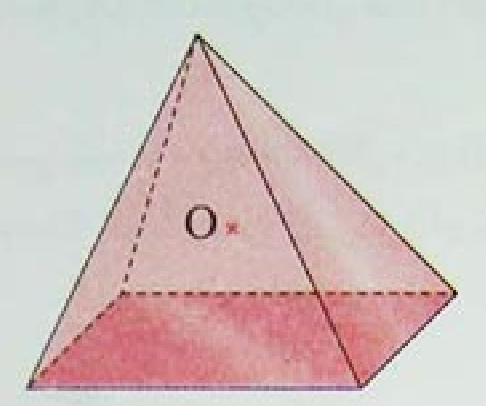
- ما هي خصائصها ؟
- أعط عبارة الحجم لكل مجسم من المجسمات السابقة، حيث B هي مساحة القاعدة لكل مجسم و h هو ارتفاعه.

1 الكرةُ والجُلَّة

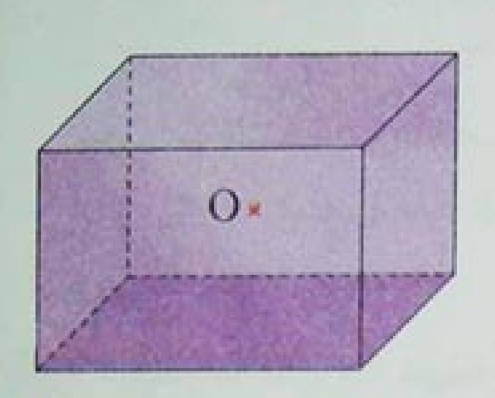
1 من بين الأشكال الآتية : هناك شكل يمثل مجموعة من النقط في الفضاء التي تبعد بنفس المسافة عن نقطة ثابتة O. جِدْ هذا الشكل.



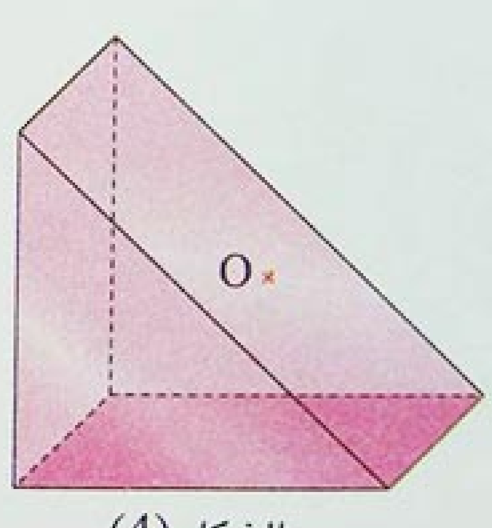
الشكل (1)



الشكل (2)



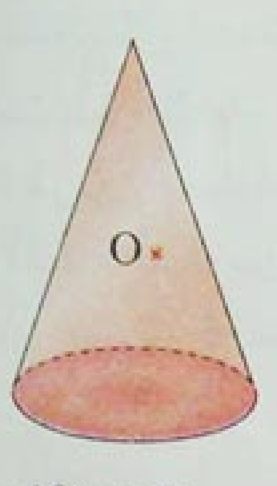
الشكل (3)



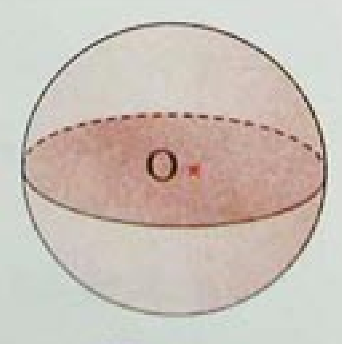
الشكل (4)



الشكل (5)



الشكل (6)



الشكل (7)

الشكل ... يسمى كرة.

النقطة الثابتة O تسمى : مركز الكرة.

المسافة الثابتة بين نقط المجموعة والنقطة O تسمى نصف قطر الكرة.

2 ما هي مجموعة النقط في الفضاء التي تبعد بمسافة تقل أو تساوي 2 cm عن نقطة ثابتة O ؟ اختر إحدى الإجابات التالية :

- القرص الذي مركزه O ونصف قطره 2 cm.
- الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 cm.
- الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 cm.
- الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 cm وداخل هذه الكرة.

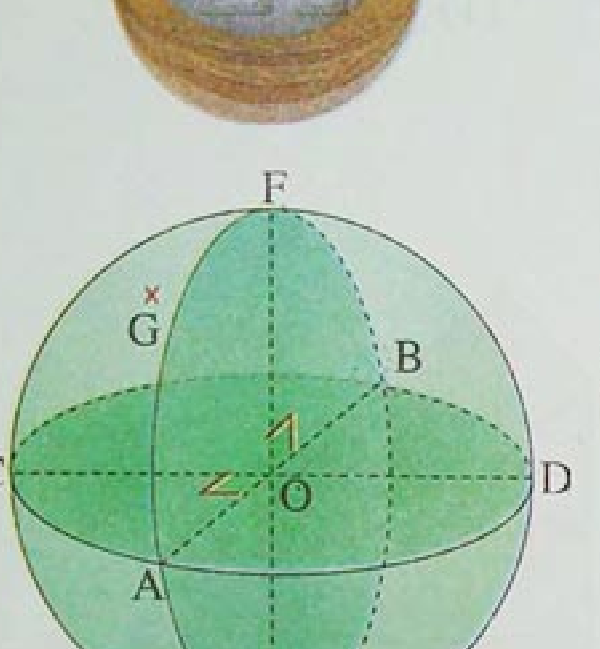
- أكمل ما يلي :

مجموعة النقط من الفضاء التي تبعد بمسافة أقل من أو تساوي مسافة ثابتة R عن نقطة ثابتة O هي .... نسمي هذه المجموعة : الجُلّة ذات المركز O ونصف القطر R.

إذن : الجُلّة هي : ....

3 ارم قطعة نقد 50 ديناراً في الجو.

- ما هو شكل قطعة النقد؟
- ما هو الشكل الناتج عن دوران قطعة النقد في الجو؟
- أرسم الشكل المولّد.
- أكمل : الكرة مولّدة من دوران .... حول أحد ....



4 إليك الشكل الممثل لكرة نصف قطرها 5 cm ومركزها O.

المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان وكذا المستقيمان (FE) و (AB)

- ما هو طول القطعة [AB] ؟

إذا كانت G نقطة من الكرة :

- ماذا يعني ذلك؟ أعط إذن طول القطعة [GO].
- ما طبيعة المثلثات : AFB ، OBD ، AOE ، EOB ؟

برّر إجابتك.

ملاحظة

نسمي الدوائر التي مركزها O، ونصف قطرها مساو لنصف قطر الكرة، بالدوائر الكبرى في الكرة.

5 نقبل ما يلي :

إذا سمينا : S مساحة الكرة و V هو حجم الجلة فإنّ : $S = 4\pi R^2$ ، $V = \frac{4}{3}\pi R^3$، حيث R نصف القطر لكل منهما.

أ) ما هي مساحة الكرة التي نصف قطرها 7 cm؟ ...... = S

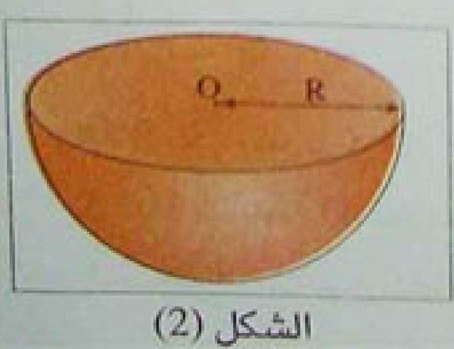
- ما هو حجم الجُلّة التي نصف قطرها 5 cm؟

ب) نأخذ جزئين من كرة نصف قطرها 4 cm.

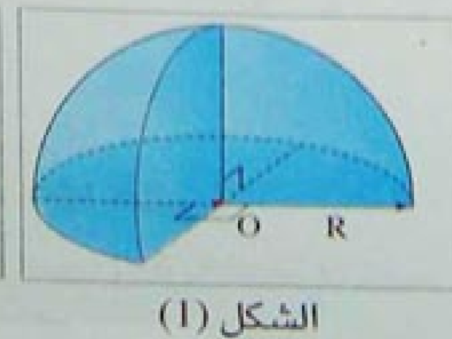
كما هو موضح في الشكلين المقابلين :

1) احسب مساحة الجزئين.

2) احسب حجميهما.



الشكل (2)



الشكل (1)

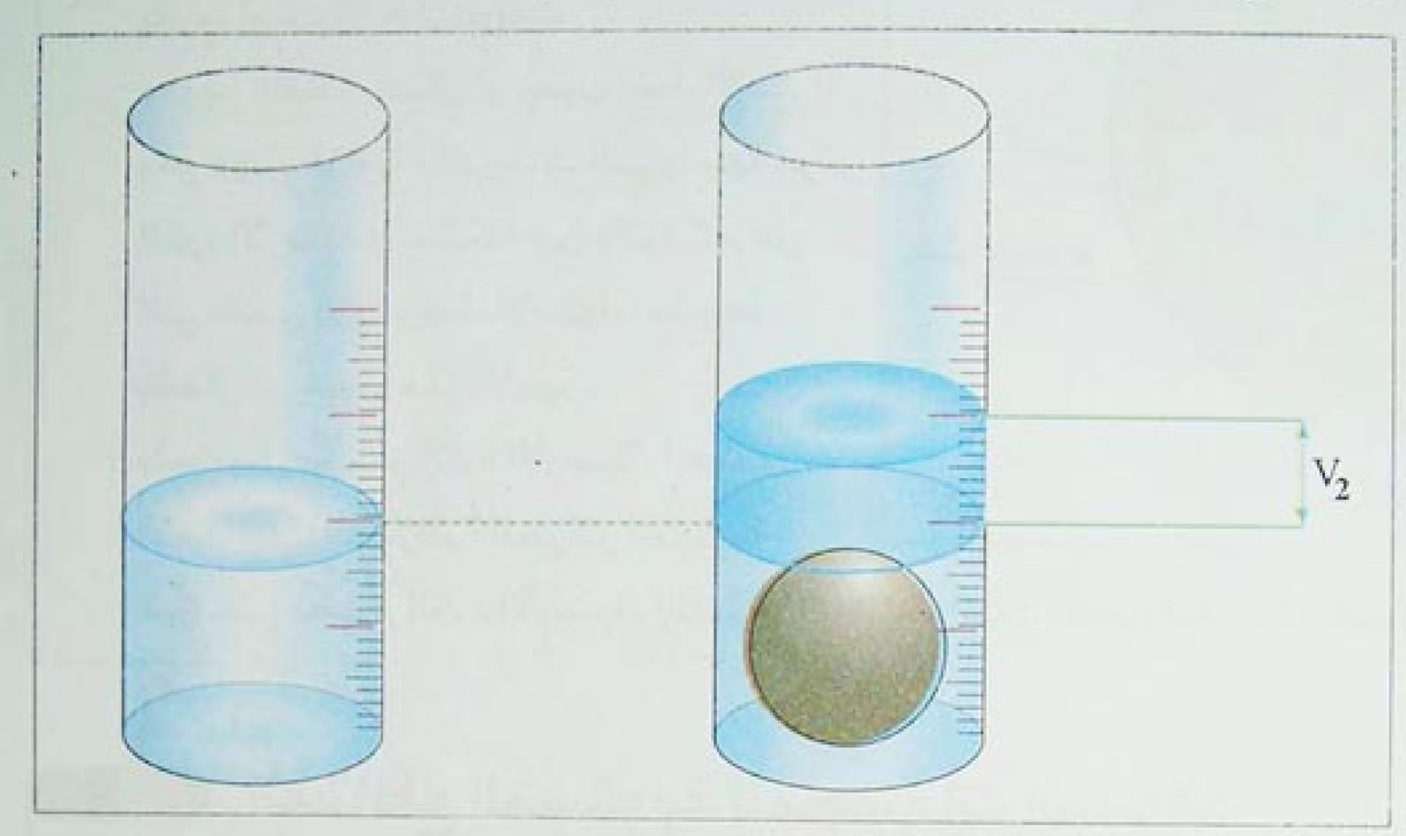


6 لتحقق تجريبيا من القاعدة السابقة لحساب حجم كرة،، نقوم بما يلي :

- خذ كرية. ما هو نصف قطرها R؟ $R = ...$.
- احسب باستعمال القاعدة قيمة تقريبية لحجمها V_1.

$$V_1 = \frac{4\pi}{3} R^3 \approx ....$$

- ضع هذه الكرية في أنبوب مدرّج فيه ماء بحيث تغمر كلّيا كما هو موضح في الشكل :



ما هي كمية الماء المزاح V_2؟

$V_2 = ...$

قارن بين V_2 و V_1

$V_1 .... V_2$

2 الكرة الأرضية والاحداثيات الجغرافية

1 الأرض عبارة عن كرة (مفلطحة في قطبيها)، نصف قطرها $R = 6400 \text{ km}$

احسب باستعمال الكتابة العلمية مساحتها S وحجمها V.

$S = ...$ ، $V = ...$.

خط الاستواء هو دائرة كبرى محيطها :

$2\pi R \approx ......$

خطوط الطول هي أنصاف دوائر كبرى تمر بقطبي الكرة الأرضية.

دوائر العرض هي دوائر موازية لخط الاستواء.

القطب الشمالي

دائرة عرض

خط طول

6400 km

خط الإستواء

القطب الجنوبي

2 الاحداثيات الجغرافية

لتعيين نقطة (مكان) على الكرة الأرضية، علينا معرفة خط الطول ودائرة العرض التي تنتمي إليهما ثم إعطاء :

- موقع النقطة غرب أو شرق خط غرينيتش، وهو قيس الزاوية بالدرجات التي رأسها مركز الكرة الأرضية والمشكلة بين خط الطول الذي تنتمي إليه وخط غرينيتش، متبوعا بغرب أو شرق خط غرينيتش.
- وموقع النقطة شمال أو جنوب خط الاستواء وهو قيس الزاوية بالدرجات التي رأسها مركز الكرة الأرضية والمشكلة بين دائرة العرض التي تنتمي إليها وخط الاستواء، متبوعا بشمال أو جنوب هذا الأخير.
- باستعمال مجسّم الكرة الأرضية، أعط الاحداثيات الجغرافية للجزائر العاصمة.
- عيّن على مجسّم الكرة الأرضية، النقطة ذات الاحداثيات الجغرافية : $21°$ شمالا و $39,5°$ شرقا.

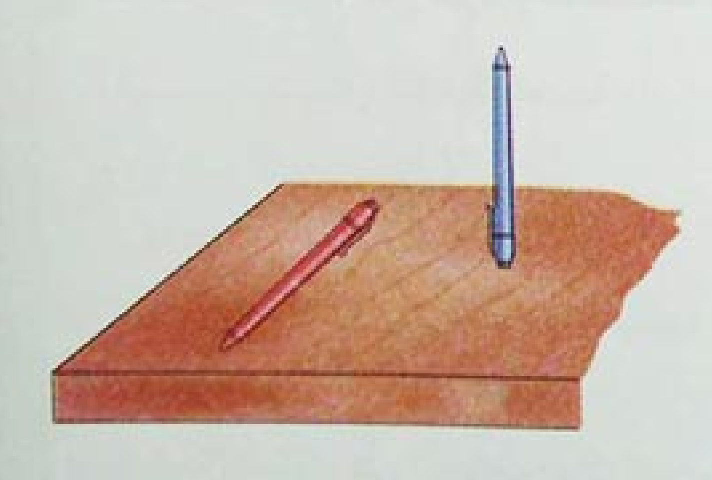
الشمال
خط غرينتش
M
الغرب
الشرق
$0°$
خط الإستواء
الجنوب

3 المقاطع المستوية للمجسمات المألوفة

نسمي مقطعا مستويا لمجسم، تقاطع مستو بهذا المجسم.

1 المستويات والمستقيمات المعامدة لها

ضع سيالتيك الزرقاء والحمراء فوق الطاولة كما هو موضح في الشكل، بحيث تكون السيالة الزرقاء عمودية على سطح الطاولة.



لاحظ جيّدا ثم أجب :

- هل السيالتان متعامدتان؟
- حرّك في اتجاهات مختلفة السيالة الحمراء مع ابقائها على سطح الطاولة.

هل تبق السيالتان : الحمراء والزرقاء متعامدتان في كل الحالات؟

- إذا مثّلنا السيالة الزرقاء بقطعة مستقيم حاملها المستقيم (D) والسيالة الحمراء بقطعة مستقيم حاملها (D').

فإن السّطح الحامل للمستقيم (D') والممثل لسطح الطاولة الأفقي يسمى مستويًا معامدًا للمستقيم (D).

نرمز للمستوي بالرمز (P) ونمثله بأحد التمثيلين المقابلين:

(P) أو (P)

ماذا تستنتج ممّا سبق ؟ أكمل :

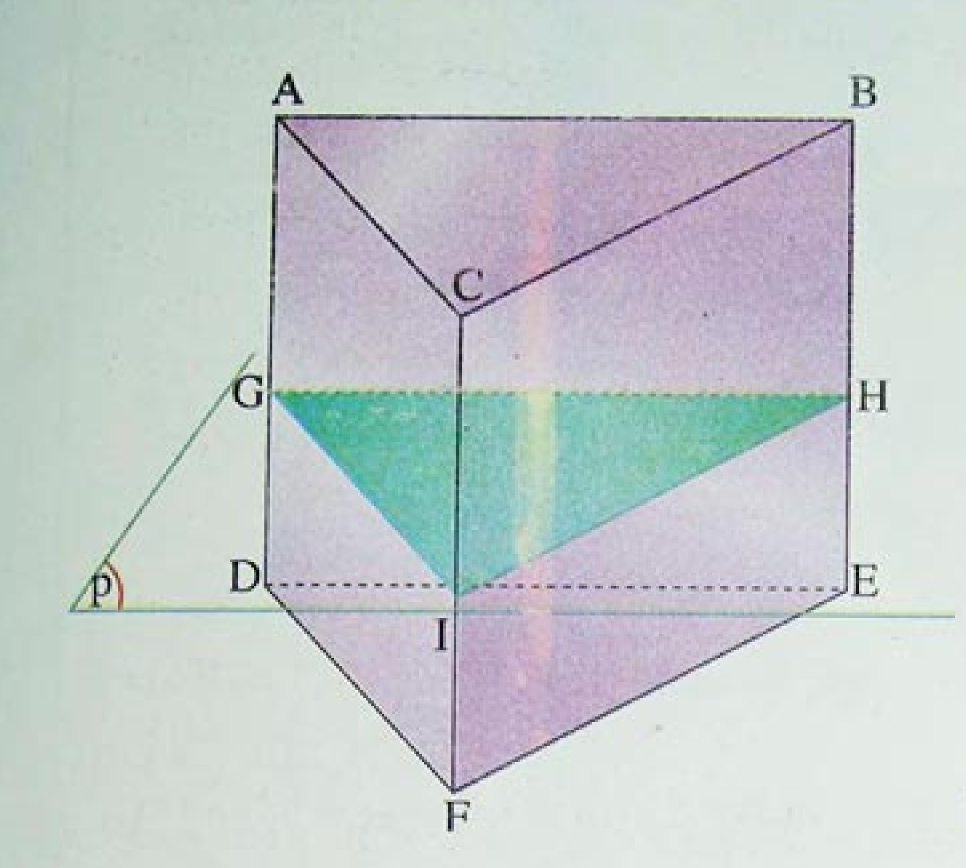
إذا كان (D) مستقيما معامدا للمستوي (P) فإنّه ... كل المستقيمات (D') التي تنتمي إلى (P).

ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمات المعامدة للمستقيم المعامد للمستوي (P)؟



2 المقطع المستوي الموازي لقاعدة موشور قائم

الشكل الملون بالأخضر هو المقطع الموازي لقاعدة الموشور القائم ABCDEF بالمستوي (P).



1) ما طبيعته ؟ قارنه بقاعدة الموشور ؟

2) ما هي الأقياس الحقيقية للزوايا :

$\widehat{FIH}$ ، $\widehat{IFE}$ ، $\widehat{FEH}$ ، $\widehat{IHE}$.

3) ما طبيعة الرباعيات : IHEF ، GIFD ، GHED؟

4) أكمل ما يلي :

GH ... DE ، GI ... DF ، IH ... FE.

5) هل قاعدة الموشور القائم ومقطعه GHI متطابقان ؟ نعم

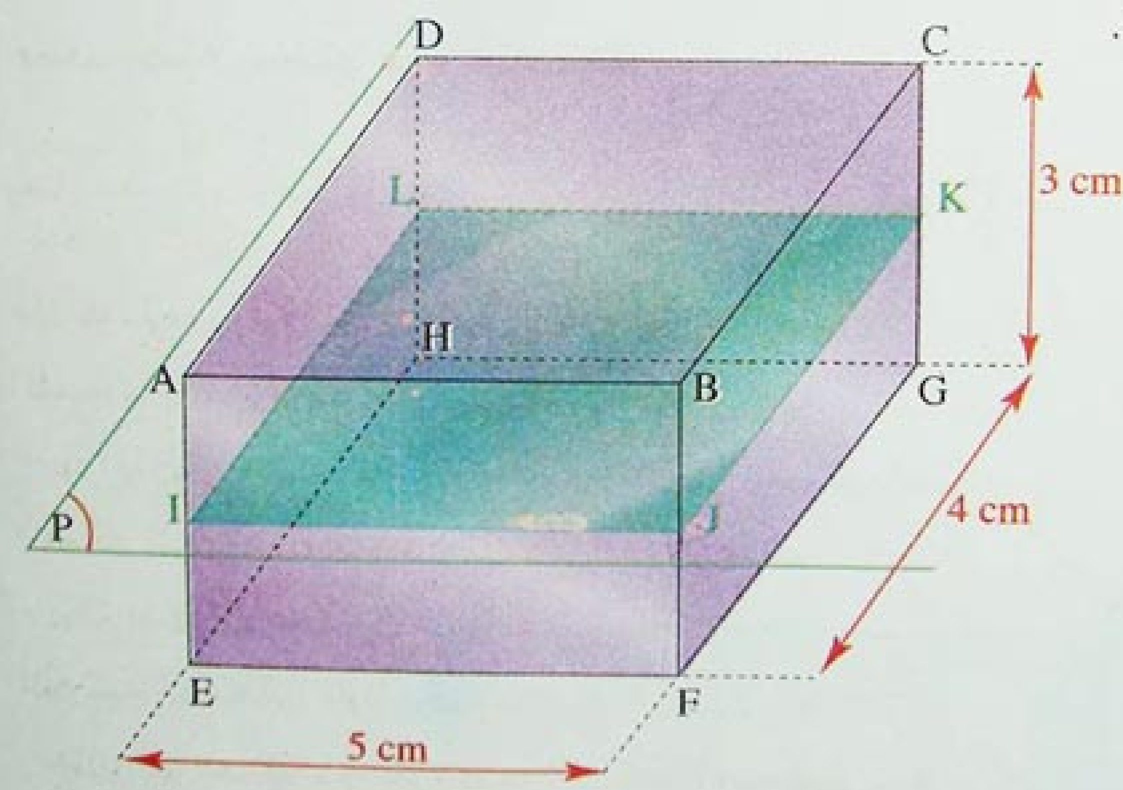
أكمل : المقطع المستوي الموازي لقاعدة موشور قائم هو سطح له نفس طبيعة قاعدته ونفس البعدين

3 مقطع متوازي المستطيلات بمستو

أ) مقطع متوازي المستطيلات بمستو مواز لوجه

إليك المقطع الموازي للوجه ABCD لمتوازي المستطيلات ABCDEFGH.

والذي أبعاده : 3 cm ، 4 cm ، 5 cm.



1) ما هي أقياس الزوايا : $\widehat{IJK}$ = 90 ، $\widehat{FJK}$ = 90 ، $\widehat{JKG}$ = ... ؟

2) ما هي أطوال القطع : [IJ] ، [JK] ، [IL] ، [LK] ؟

3) ما طبيعة الرباعي IJKL الممثل للمقطع الموازي للوجه ABCD لمتوازي المستطيلات ABCDEFGH؟

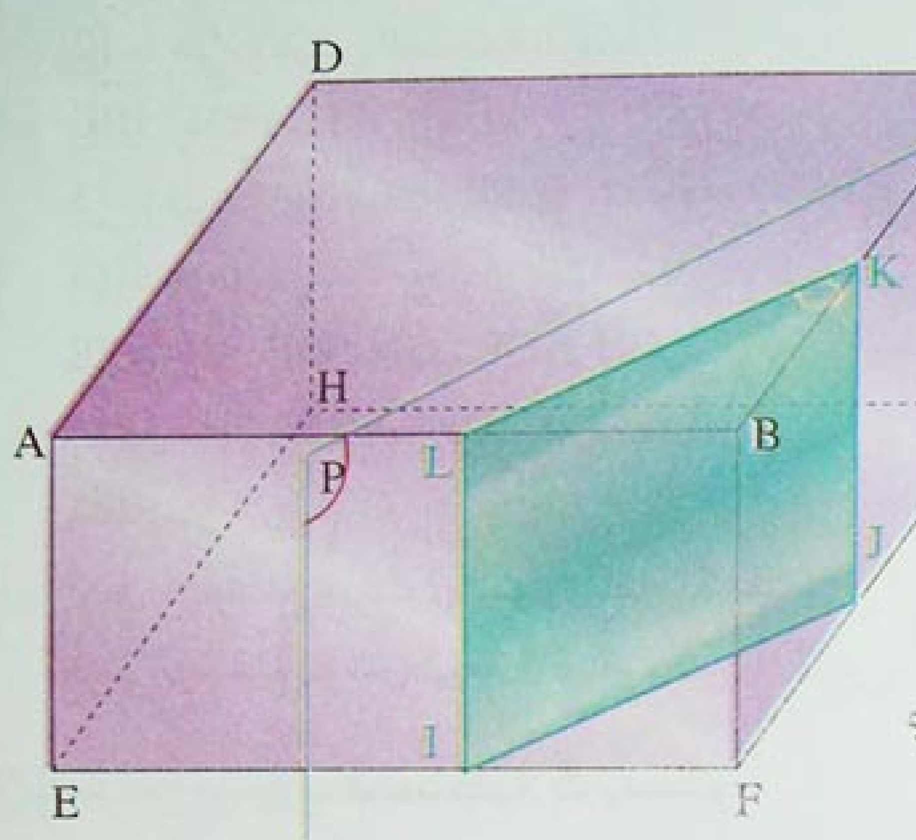
4) هل للرباعي IJKL نفس بعدي الوجه ABCD الموازي له ؟

5) استنتج وأكمل : المقطع الموازي لأحد أوجه متوازي المستطيلات هو مستطيل له نفس بعدي الوجه الموازي له.

ب) مقطع متوازي المستطيلات بمستو مواز لأحد حروفه

يمثل الرباعي الأخضر IJKL مقطعًا موازيًا للحرف [BF] لمتوازي المستطيلات ABCDEFGH بالمستوي (P).

المستقيم (JK) ينتمي إلى المستوي (P)، ماذا يعني ذلك لوضعيته بالنسبة للمستقيم (BF) ؟ متوازي



هل القطع [BF] ، [JK] ، [IL] متقايسة؟ نعم

ما هي أقياس الزوايا :

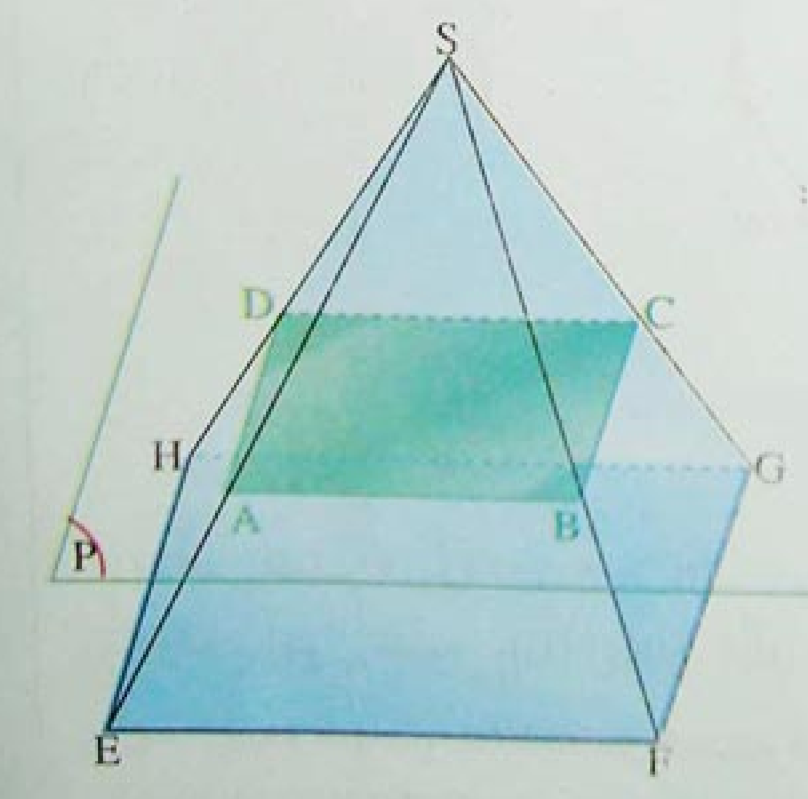
$\widehat{LIJ} = 90°$ ، $\widehat{IJK} = 90°$ ، $\widehat{LKJ} = 90°$ ، $\widehat{ILK} = 90°$؟

- استنتج طبيعة المقطع IJKL. مستطيل

أكمل : مقطع متوازي المستطيلات بمستو مواز لأحد أحرفه هو مستطيل طوله أحد أبعاد متوازي المستطيلات.

4 مقطع هرم بمستو مواز لقاعدته

يمثل هذا الرسم منظورا لمقطع الهرم SEFGH بالمستوي (P) الموازي لقاعدته EFGH.



هل لمقطع الهرم وقاعدته نفس الطبيعة ؟

المستوي (P) مواز لقاعدة الهرم.

- ماذا يعني ذلك بالنسبة للعلاقات الرابطة بين المستقيمات :

(GF) و (BC) ، (AB) و (EF) ، (HG) و (DC)؟

- ماذا يمثل المجسم SABCD ؟ أكمل :

المجسم SABCD هو ... قاعدته ...

- قارن بين بعدي قاعدة المجسم SABCD وبعدي قاعدة الهرم SEFGH؟

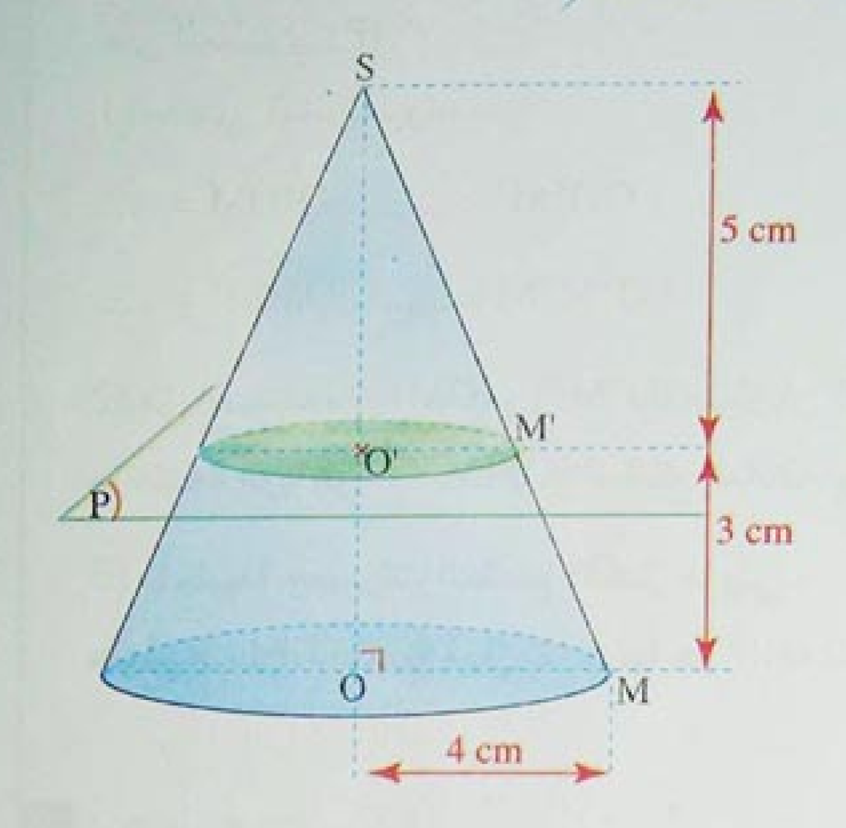
ماذا يعني ذلك ؟

أكمل ما يلي مستعينا بما سبق :

- مقطع هرم بمستو مواز لقاعدته هو ... لقاعدته.

5 - مقطع مخروط دوراني بمستو مواز لقاعدته

يمثل الشكل الأخضر المقابل، مقطعا موازيا لقاعدة المخروط الدوراني.



لاحظ جيدا الشكل ثم أجب :

ما طبيعة المقطع ؟ ما هي مميزاته ؟

ما هو قيس الزاوية $\widehat{MOS}$؟ماذا يعني ذلك بالنسبة للمستقيمين (OM) و (O'M') ؟ هل يمكن تطبيق نظرية طالس على المثلث SOM؟ إذا كان ذلك ممكنا، فما هي العلاقة المتحصل عليها ؟

استنتج O'M' ثم قارنه بنصف قطر القاعدة.

ماذا يعني ذلك بالنسبة لمقطع المخروط وقاعدته ؟

أكمل : مقطع مخروط دوراني بمستو مواز لقاعدته هو .... لقاعدته الدائرية.

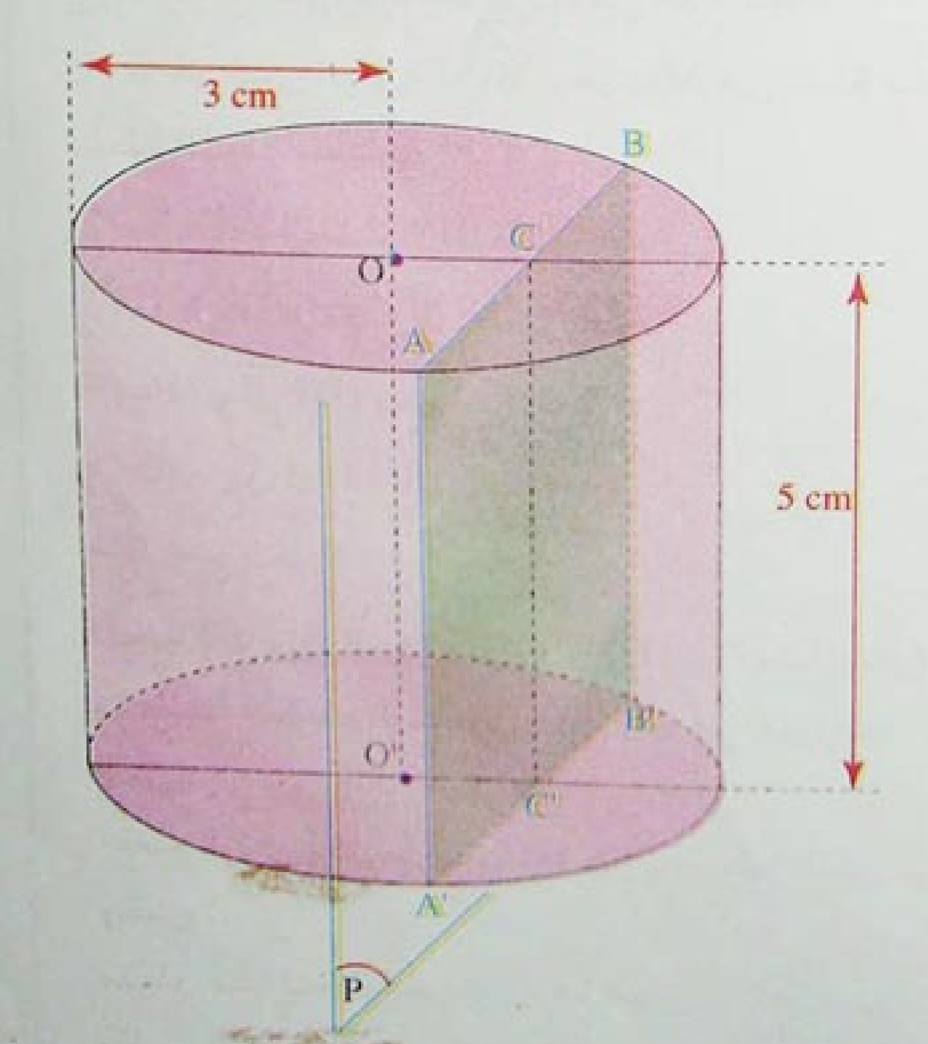
6 مقطع اسطوانة

أ) مقطع اسطوانة بمستو مواز لمحورها

يمثل الرسم المقابل اسطوانة ارتفاعها 5 cm ونصف قطر قاعدتها 3 cm.

يمثل الرباعي ABB'A' مقطعا موازيا لمحور الاسطوانة.

لاحظ جيدا الشكل، ثم أجب عن الأسئلة التالية :



1) ما هي الأطوال الحقيقية للقطع [AA'] ، [CC'] و [BB'] ؟ ماذا تمثل هذه القطع بالنسبة للاسطوانة؟

2) ما هي الأقياس الحقيقية للزوايا :

$\widehat{A'B'B}$ = ...،

$\widehat{ABB'}$ = ...،

$\widehat{A'AB}$ = ...،

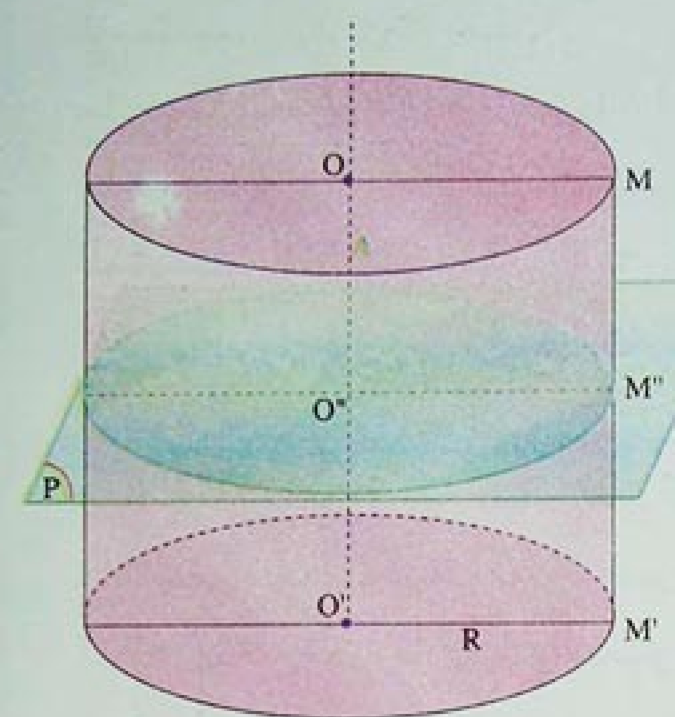
$\widehat{AA'B'}$ = ...؟

3) استنتج مما سبق طبيعة المقطع ABB'A'.

أكمل : مقطع اسطوانة بمستو مواز لمحورها هو ... أحد بعديه هو ... الاسطوانة.

ب) مقطع اسطوانة بمستو مواز لقاعدتها

لتكن "M نقطة تقاطع العمود النازل من M على المستوي (P) ولتكن "O نقطة تقاطع العمود النازل من O على المستوي (P).



1) ما هي أقياس الزوايا :

$\widehat{O''OM} = ...$ ، $\widehat{OO''M''} = ...$ ،

$\widehat{OMM''} = ...$ ، $\widehat{O''M''M} = ...$ ؟



2) هل المستقيمان (OM) و (O"M") متوازيان ؟

ما طبيعة الرباعي "OMM"O؟ استنتج العلاقة بين OM و "O"M.

3) ما طبيعة ومميزات المقطع ؟ أكمل ما يلي :

مقطع اسطوانة بمستو مواز لقاعدتها هو ... له نفس ... قاعدتها.

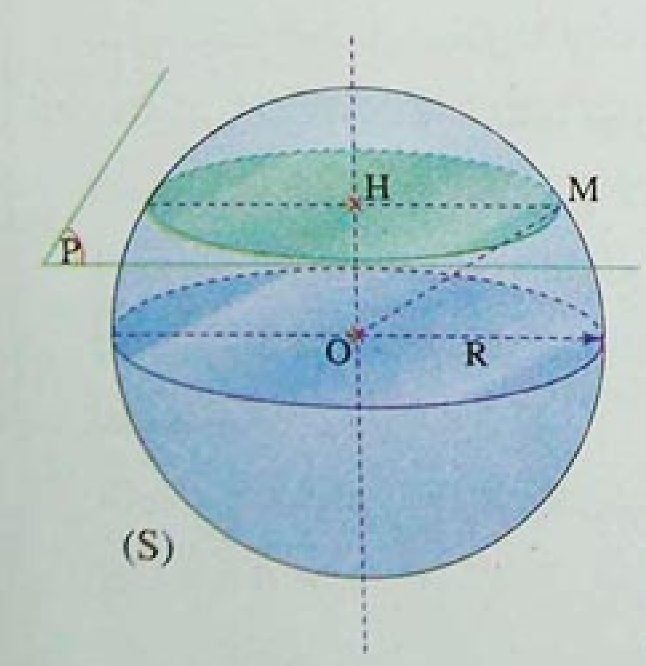
7 مقطع كرة، جِلَّة

لتكن (S)الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R = 5 cm وليكن (P) مستويا من الفضاء. نسمي H نقطة تقاطع العمود الصاعد من مركز الكرة O مع المستوي (P).

نميز أربع حالات :

الحالة 1 : إذا كان $0 \neq OH < R$.

إليك مقطع الكرة بالمستوي (P) في هذه الحالة.



1) ما هو قيس الزاوية $\widehat{OHM}$، حيث M هي نقطة مشتركة بين سطح الكرة والمستوي (P) ؟

2) ما طبيعة المثلث OHM؟

3) ما طبيعة المقطع المتحصل عليه ؟

4) ماذا يمثل HM لهذا المقطع ؟

5) قارن بين HM و R.

ماذا يعني ذلك ؟

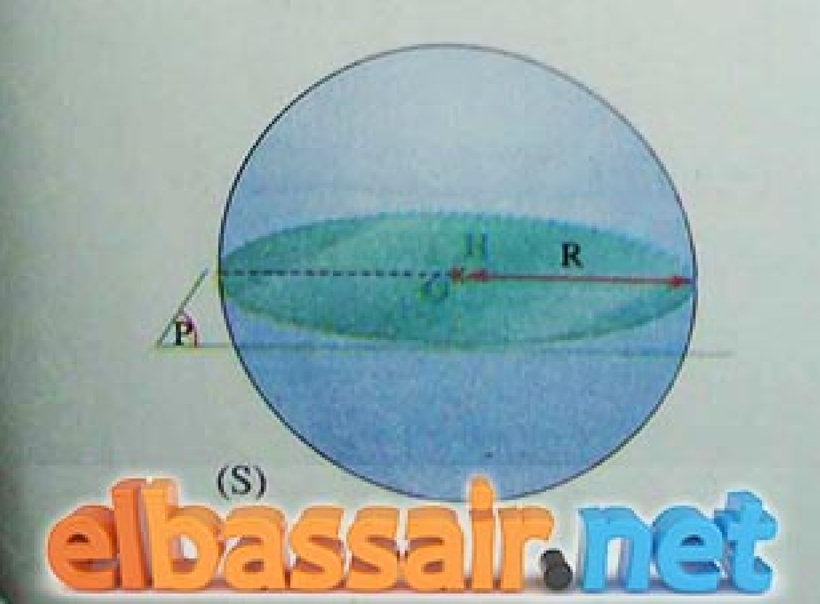
الحالة 2 : إذا كان OH = 0 (أي H و O متطابقان).

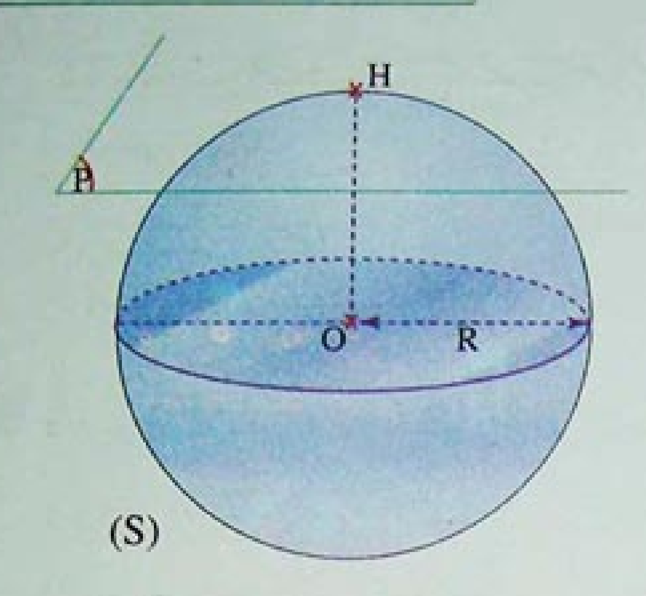
ما طبيعة المقطع المتحصل عليه ؟ ما هي مميزاته؟

أكمل :

مقطع كرة بمستو يمر بمركزها هو ...... لها نفس ...... ونفس ......

مقطع جُلّة بمستو يمر بمركزها هو ...... له نفس ...... ونفس ......



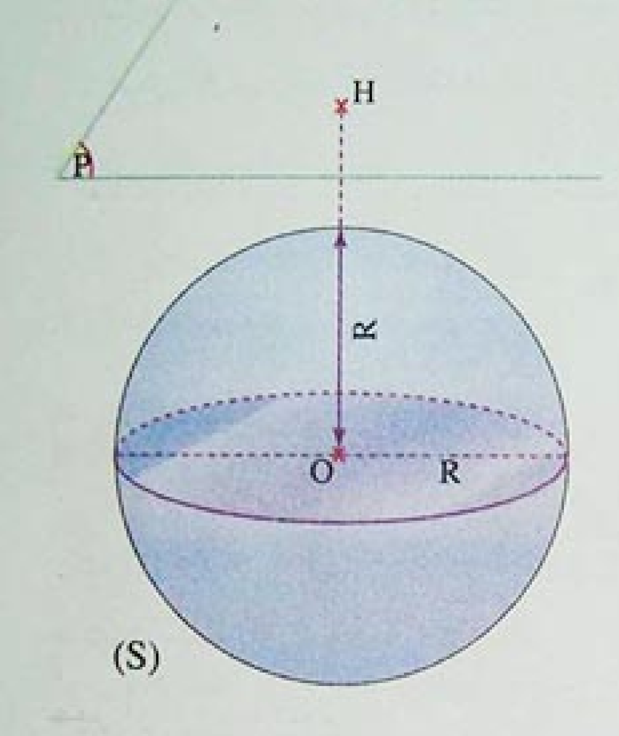


الحالة 3 : إذا كان $OH = R$.

ماذا يمثل H في هذه الحالة ؟

أكمل : H هي النقطة الوحيدة ... بين (S) والمستوي (P).

نقول في هذه الحالة أنّ : المستوي (P) مماس للكرة (S) في النقطة H.



الحالة 4 : إذا كان $OH > R$.

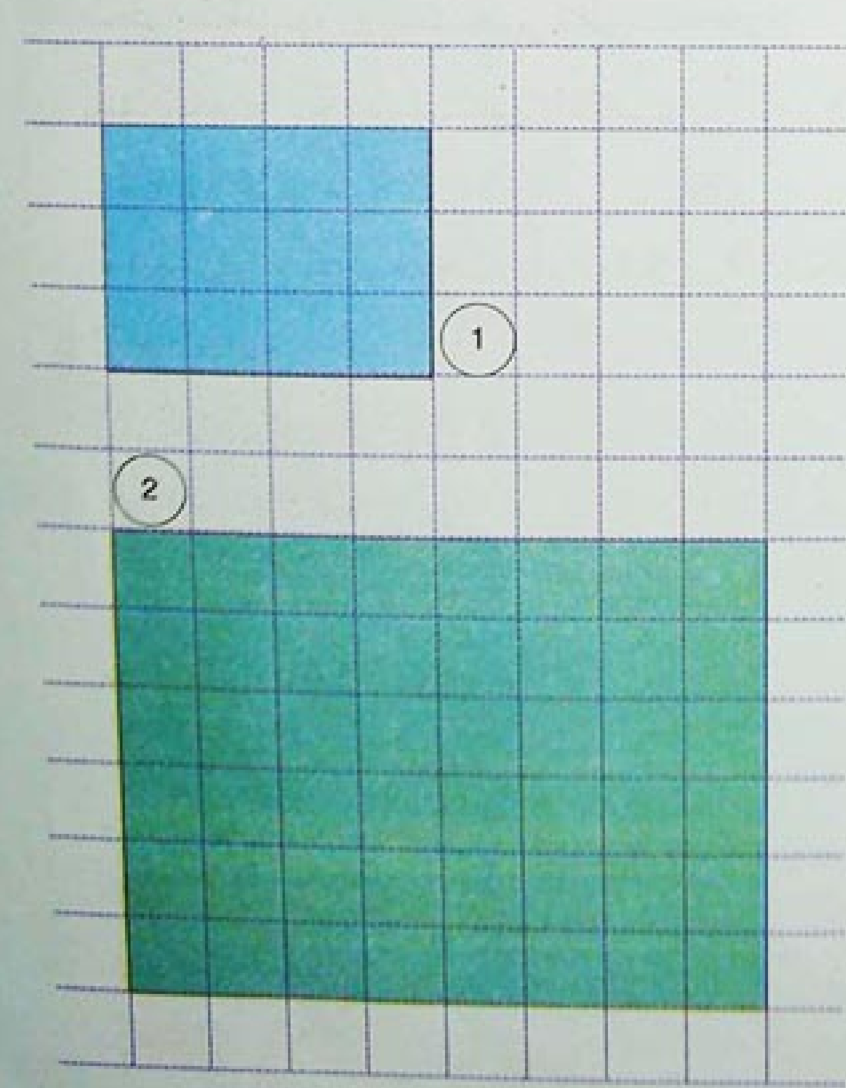
1) ما هو موقع النقطة H بالنسبة إلى الكرة ؟

2) هل هناك نقاط مشتركة بين المستوى (P) والكرة ؟

ماذا تستنتج ؟

4 التكبير والتصغير

1 تأثير التكبير والتصغير على الأبعاد



تمعن في الشكلين المقابلين :

1) في أي عدد ضُرِب بعدا الشكل (1) حتى تحصلنا على الشكل (2) ؟

2) في أي عدد ضُرِب بعدا الشكل (2) حتى تحصلنا على الشكل (1) ؟

3) أكمل ما يلي بالكلمتين : **تصغير** أو **تكبير**.

- الشكل (2) هو .... للشكل (1).
- الشكل (1) هو .... للشكل (2).

4) أكمل ما يلي بالكلمتين : **أصغر** أو **أكبر**.

- إذا ضربنا بعدي الشكل في عدد ..... من 1، فقد قمنا بتكبير هذا الشكل.
- إذا ضربنا بعدي الشكل في عدد ..... من 1، فقد قمنا بتصغير هذا الشكل.



أنشطة

2 تاثير التكبير والتصغير على الزوايا

- ارسم المثلث ABC بحيث : $AB = 4cm$ ، $AC = 3cm$ ، $BC = 5cm$.
- ارسم المثلث $A'B'C'$ تكبير المثلث ABC مرتين.
- قس زوايا المثلث ABC وكذا زوايا المثلث $A'B'C'$، ماذاتستنتج ؟

3 تاثير التكبير والتصغير على المساحات

1) ارسم المستطيل ABCD بحيث $AB = 4cm$ ، $BC = 3cm$.

2) ارسم المستطيل EFGH تكبير المستطيل ABCD ثلاث مرات.

3) لتكن S مساحة المستطيل ABCD.

ولتكن S' مساحة المستطيل EFGH.

- تحقق من أنّ : $S' = 3^2S$.

4) إملء الجدول التالي :

الانتقال	الأبعاد ضربت في	المساحة ضربت في
من المستطيل ABCD إلى المستطيل EFGH	....	....
من المستطيل EFGH إلى المستطيل ABCD	....	....

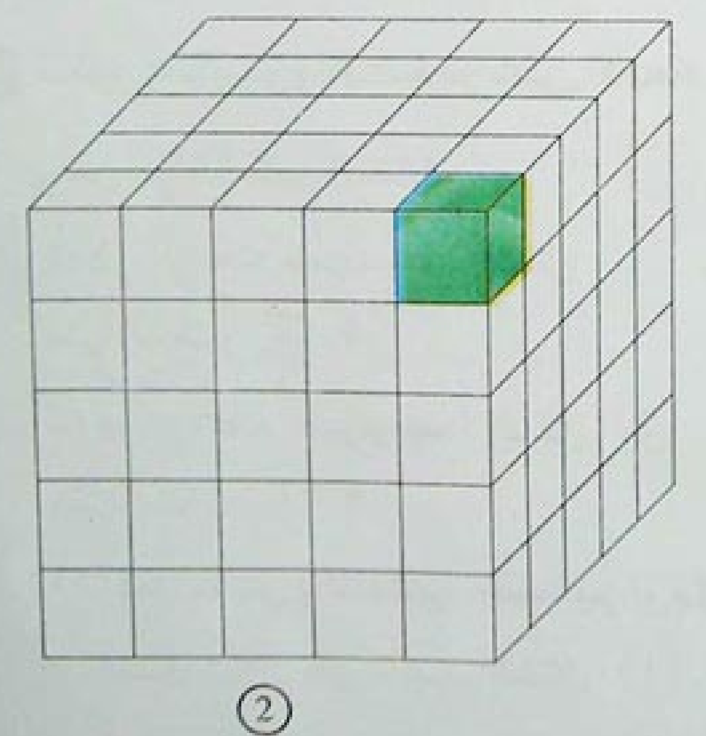
4 تاثير التكبير والتصغير على الحجوم

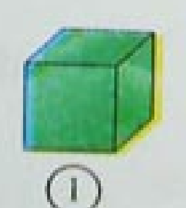
1) مكعب ② هو تكبير للمكعب ①. ما هو معامل هذا التكبير ؟

2) ليكن V حجم المكعب ①، وليكن V' حجم المكعب ②.

تحقق من أن : $V' = 5^3V$.

3) إملء الجدول التالي :



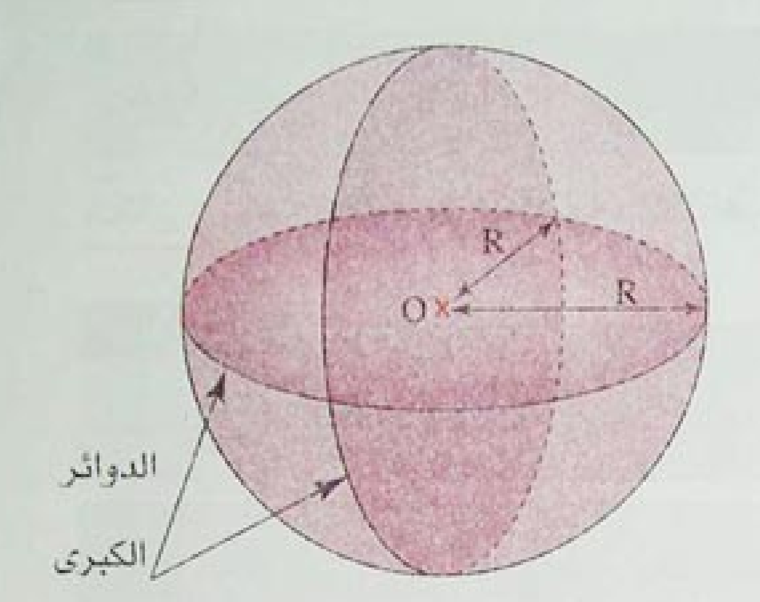


الانتقال	ضربت الأبعاد في	ضرب الحجم في
من المكعب ① إلى المكعب ②	....	....
من المكعب ② إلى المكعب ①	....	....

1 الكرة والجُلّة

تعريف

- الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R هي مجموعة من النقط M من الفضاء بحيث :
.OM = R



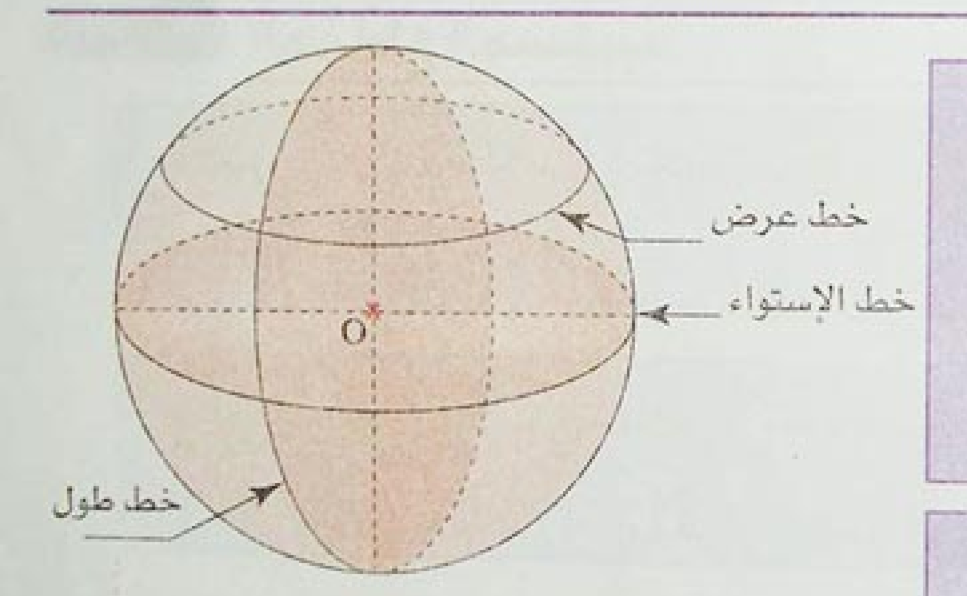
تعريف

الجُلّة التي مركزها O ونصف قطرها R هي مجموعة من النقط M من الفضاء بحيث :
.OM ≤ R

تمثل كرة (جُلَّة) كما في الشكل المقابل .

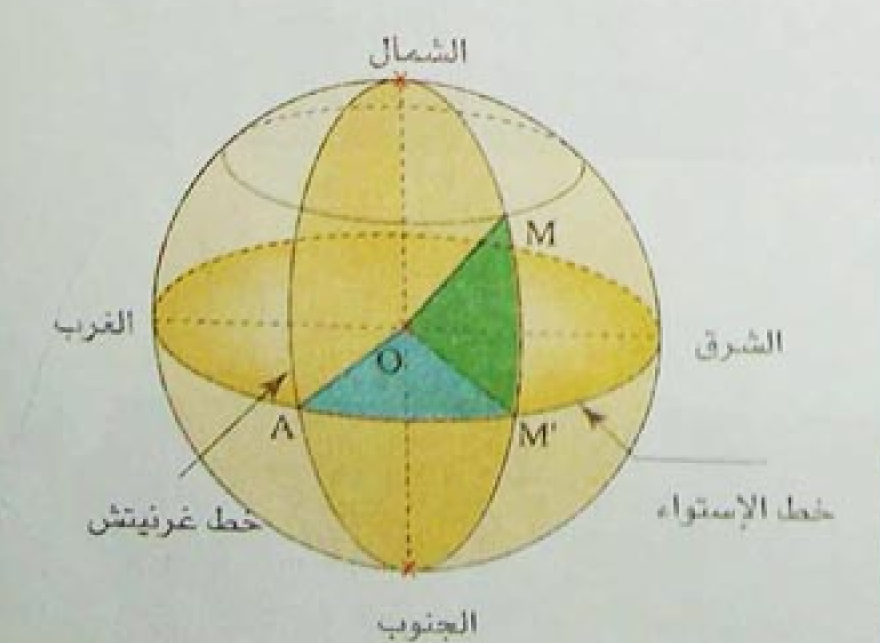
2 الاحداثيات الجغرافية

- الأرض عبارة عن كرة نصف قطرها 6400 km
- خط الاستواء هو دائرة كبرى محتواة في المستوي المعامد لمحور دوران الكرة الأرضية.
- خطوط الطول هي أنصاف دوائر كبرى تمر بالقطبين : الشمالي والجنوبي.



لتحديد المكان M على الكرة الأرضية :

- نعطي قيس الزاوية $\widehat{AOM'}$ بالدرجات، حيث 'M تمثل نقطة تقاطع خطّ الطول المار بالنقطة M وخط الإستواء، متبوعة بشرق أو غرب خط غرينتش حسب موضع النقطة 'M بالنسبة لهذا الخط.
- ونعطي قيس الزاوية $\widehat{M'OM}$ بالدرجات متبوعة بشمال أو جنوب خط الاستواء، حسب موقع النقطة M بالنسبة لهذا الخط.



ملاحظة

قيسا الزاويتين $\widehat{AOM}$ و $\widehat{MOM'}$، يقرآن مباشرة على مجسم الكرة الأرضية.

مثال : موقع صنعاء (عاصمة اليمن) : °15شمالا و °44 شرقا.



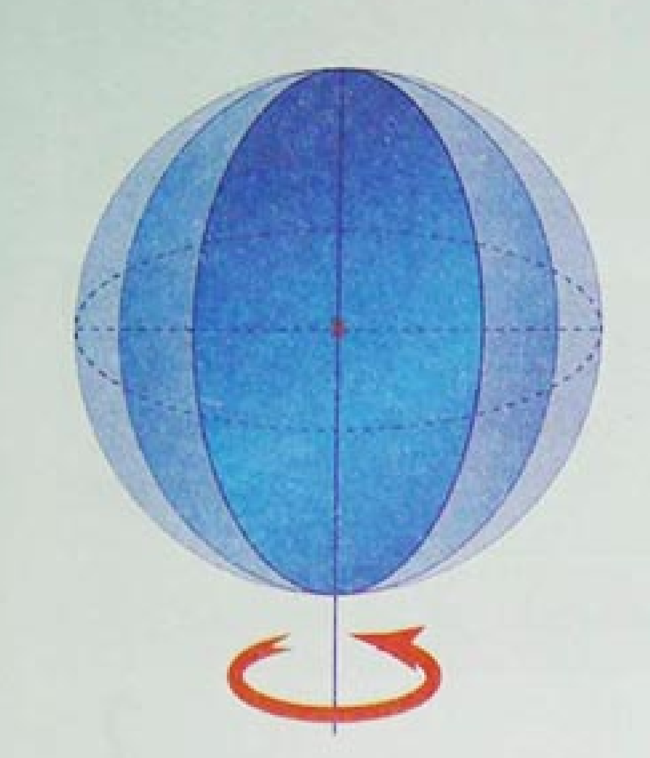
3 مساحة الكرة، حجم الجُلَّة

مساحة كرة نصف قطرها R تعطى بالقاعدة : $4\pi R^2$.

مثال : مساحة كرة نصف قطرها 2 cm هي : $16\pi cm^2$.

حجم جلة نصف قطرها R تعطى بالقاعدة : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

مثال : حجم جلة نصف قطرها 3 cm هو : $36\pi\ cm^3$.



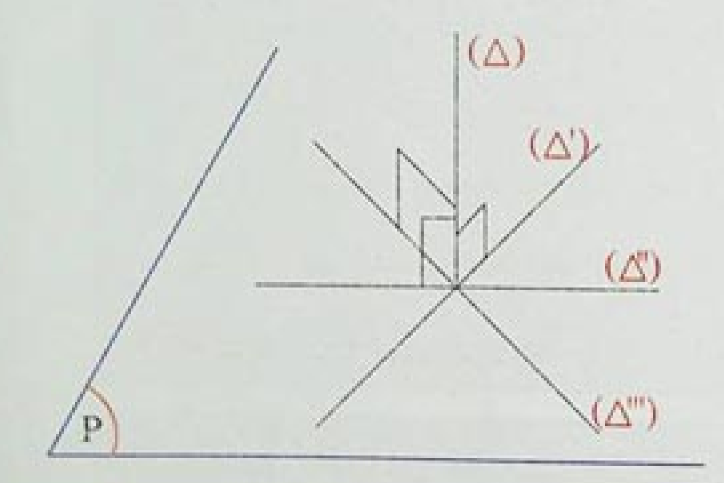
ملاحظة

لا تنس مراعاة الوحدات للمساحة والحجم.

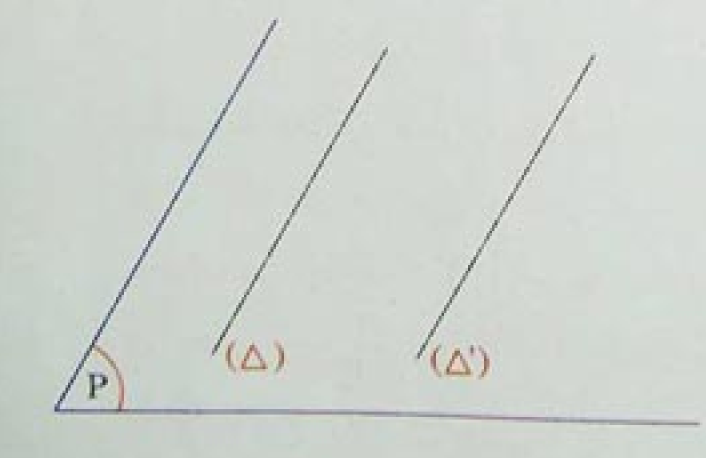
تولّد الكرة من دوران دائرة حول أحد أقطارها .

4 المقاطع المستوية

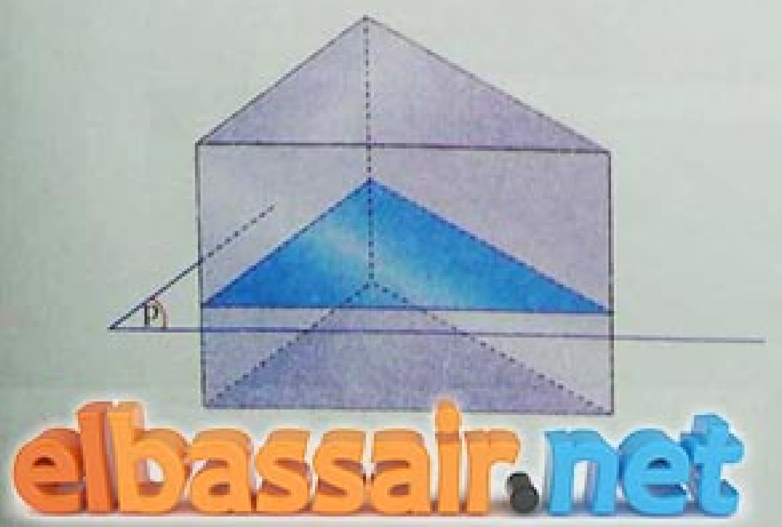
- تقاطع مستو بمجسّم يسمّى مقطعا مستويا لهذا المجسم.



- المستقيم المعامد لمستو، يعامد كل المستقيمات المحتواة في هذا المستوي.



نقول عن مستقيمين أنهما متوازيان في الفضاء، إذا كانا محتويين في نفس المستوى، ولا يلتقيان.



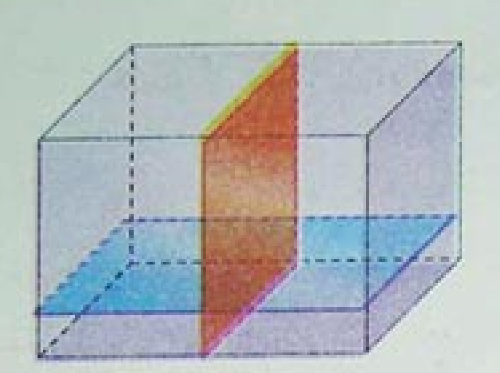
1) **مقطع موشور قائم بمستو**

- المقطع المستوي، الموازي لقاعدة موشور قائم، هو سطح له نفس طبيعة القاعدة ونفس بعديها .

معارف



2) مقطع متوازي مستطيلات بمستو

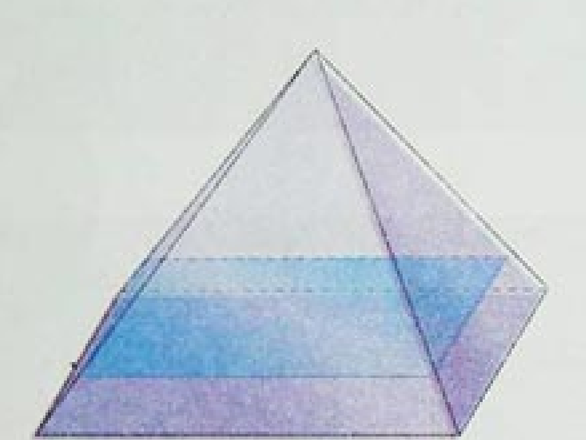


مقطع متوازي مستطيلات بمستو يوازي أحد أوجهه هو مستطيل له نفس بعدي الوجه الموازي له.

مقطع متوازي مستطيلات بمستو يوازي أحد أحرفه هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي طول ذلك الحرف.

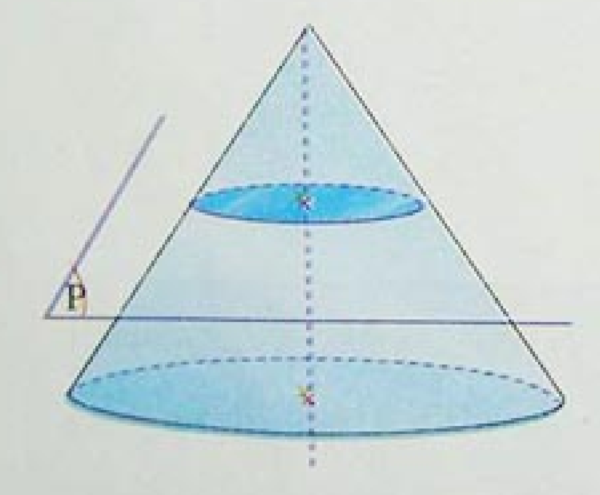


3) مقطع هرم بمستو



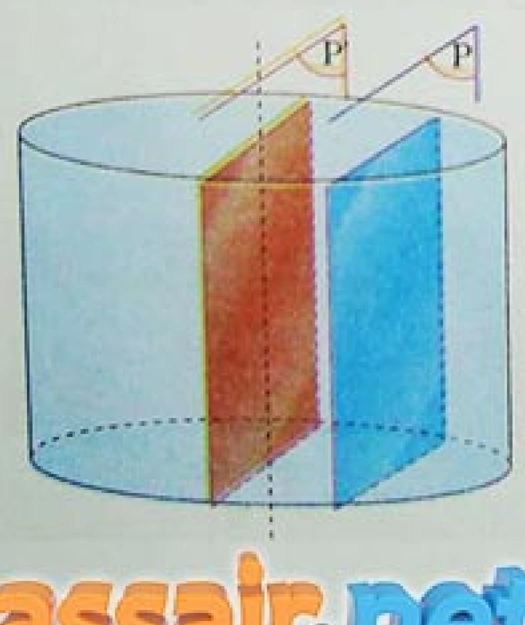
مقطع هرم بمستو مواز لقاعدته هو سطح له نفس طبيعة القاعدة وبأبعاد مصغرة.

4) مقطع مخروط بمستو



مقطع مخروط دوراني بمستو مواز لقاعدته هو قرص مصغر لقاعدته.

5) مقطع أسطوانة بمستو



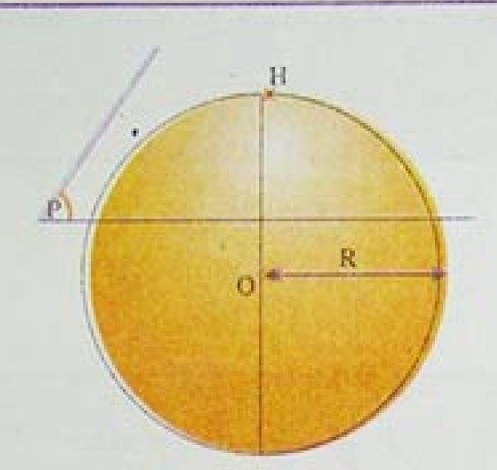
مقطع اسطوانة بمستو مواز لمحورها هو مستطيل، طوله أو عرضه يساوي ارتفاع الاسطوانة.



مقطع اسطوانة بمستو مواز لقاعدتها هو قرص مطابق لقاعدتها.



5 مقطع كرة بمستو

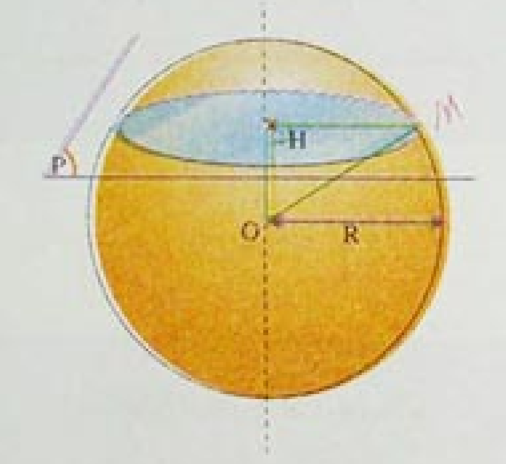


الحالة 1 : $OH = R$.

مقطع الكرة بالمستوي (P) هو النقطة H.

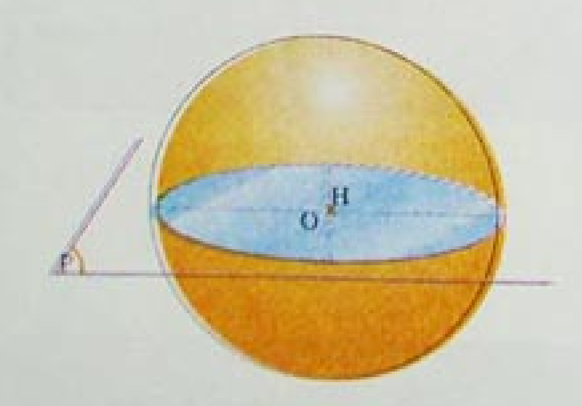
نسمي المستوي (P) : مستويا مماساً للكرة.

نسمي النقطة H : نقطة تماس الكرة بالمستوي (P).



الحالة 2: $0 < OH < R$.

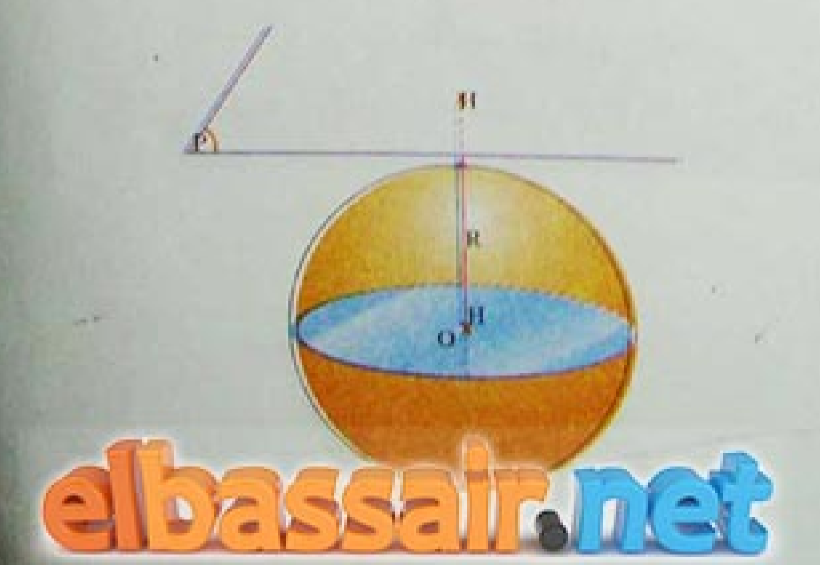
مقطع الكرة بالمستوي (P) هو دائرة نصف قطرها : $\sqrt{R^2 - OH^2}$.



الحالة 3 : $OH = 0$ أي أن O و H متطابقان،

وهذا يعني أن المستوي (P) يمر من مركز الكرة.

مقطع كرة بمستو يمر بمركزها هو دائرة كبرى.



الحالة 4 : $OH > R$.

في هذه الحالة، المستوي (P) لا يقطع الكرة.

6 التكبير والتصغير

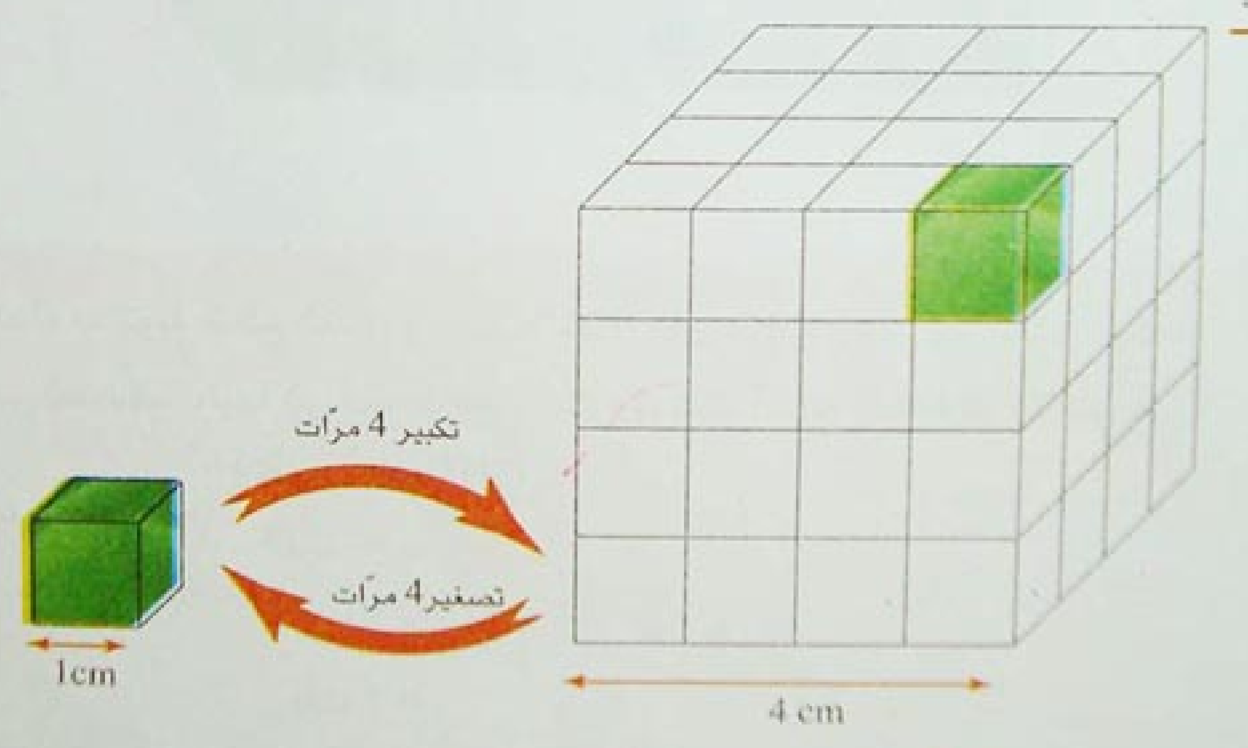
إذا ضربنا أبعاد مجسم بالعدد k ، فقد قمنا :
- بتكبير المجسم، إذا كان $k > 1$.
- بتصغير المجسم، إذا كان $0 < k < 1$.

التكبير والتصغير لا يغيران طبيعة المجسمات.
التكبير والتصغير لا يغيران أقياس الزوايا.

يسمى العدد k : سلّم التكبير $(k > 1)$ أو سلّم التصغير $(0 < k < 1)$.

إذا كبّرنا أو صغّرنا مجسّما بالسلم k، فإنّ :
- أبعاده تضرب في العدد k.
- مساحته تضرب في العدد k^2.
- حجمه يضرب في العدد k^3.

مثال :



حرفه : 4 cm
مساحة وجهه : 4^2 cm^2
حجمه : 4^3 cm^3

حرفه : 1 cm
مساحة وجهه : 1 cm^2
حجمه : 1 cm^3



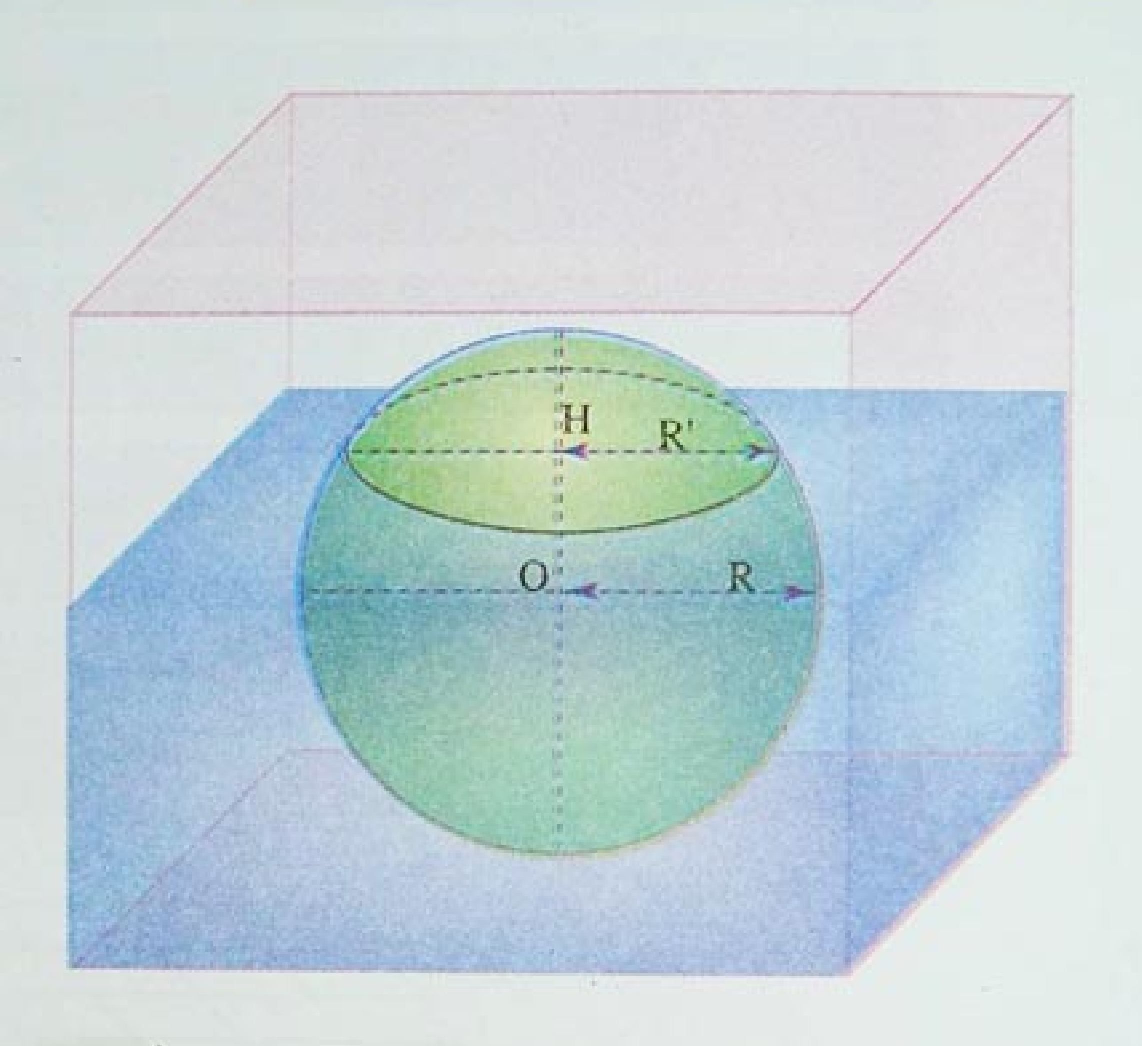
تمرين

تُغمر كرة جزئيا كما هو موضح في الشكل.

نصف قطر الكرة $R = 5\ cm$.

نصف قطر الدائرة الظاهرة جرّاء تقاطع سطح الماء بالكرة : $R' = 4\ cm$.

اوجد ارتفاع الجزء المغمور من الكرة؟



الحل

يمكن اعتبار سطح الماء مستويا يقطع الكرة. وحسب الشكل فإنّ : $OH < R$. إذن يمكن استعمال العلاقة بين OH ، R' و R التي تحصّلنا عليها في نشاط قطع الكرة بمستو (حالة $OH < R$) والتي هي :

$$OH^2 = R^2 - (R')^2$$
$$= 5^2 - 4^2$$
$$= 3^2$$

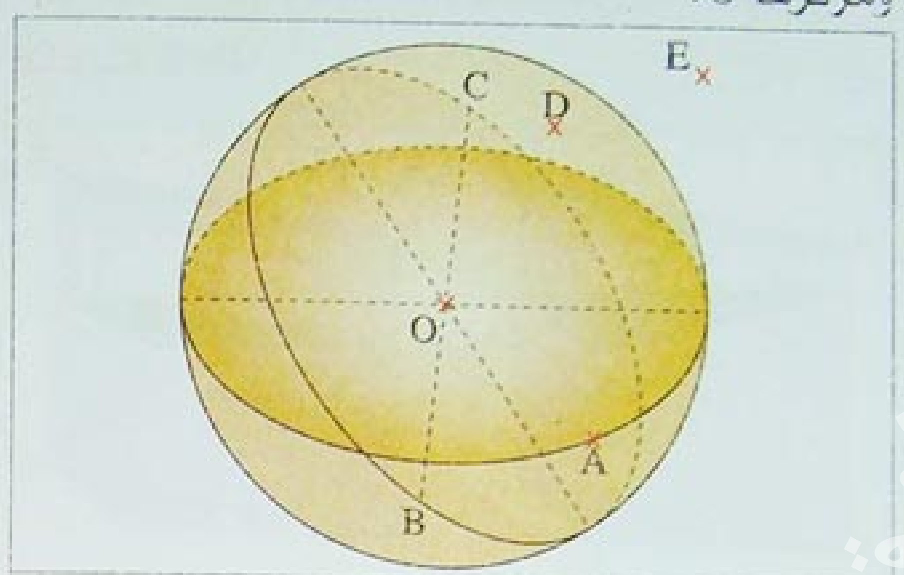
يعني أنّ : $= 3\ cm$

لكن المطلوب هو ارتفاع الجزء المغمور، أي : $OH + R = 8\ cm$.

ومنه ارتفاع الجزء المغمور من الكرة هو : $8\ cm$.

تمارين للتطبيق المباشر

1 يمثل الشكل الموالي كرة نصف قطرها 3cm ومركزها O.



- احسب إن أمكن، الأطوال : OC ، OA ، OD ، CB ، OE.

2 نصف قطر كرة القدم 22 cm.

- احسب بدلالة π مساحتها وحجم الكرة.

3 يمثل الشكل الموالي كرة نصف قطرها 2,5 cm. نعلم أنّ : CB = 4 cm.

احسب CA مع التعليل.

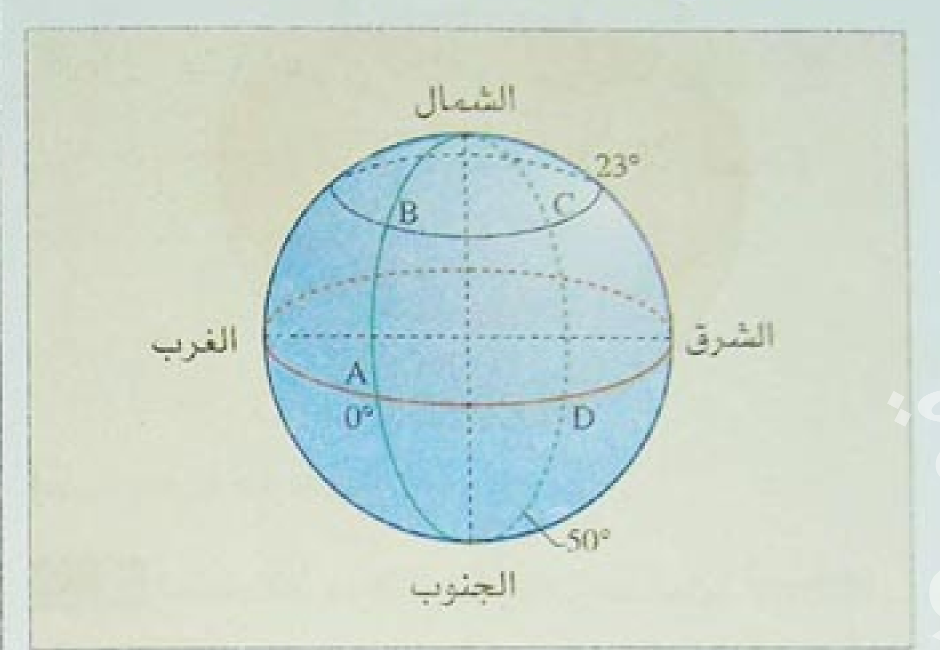
4 احسب نصف قطر الكرة التي مساحتها $16\pi cm^2$.

5 احسب قطر الجلة التي حجمها $288\ \pi cm^3$.

6 احسب حجوم المجسمات الآتية :

7 يمثل الشكل الموالي الكرة الأرضية.

- ماذا تمثل كل من الدائرة الحمراء ونصف الدائرة الخضراء في الشكل ؟
- أعط احداثيات النقاط : A ، B ، C ، D.

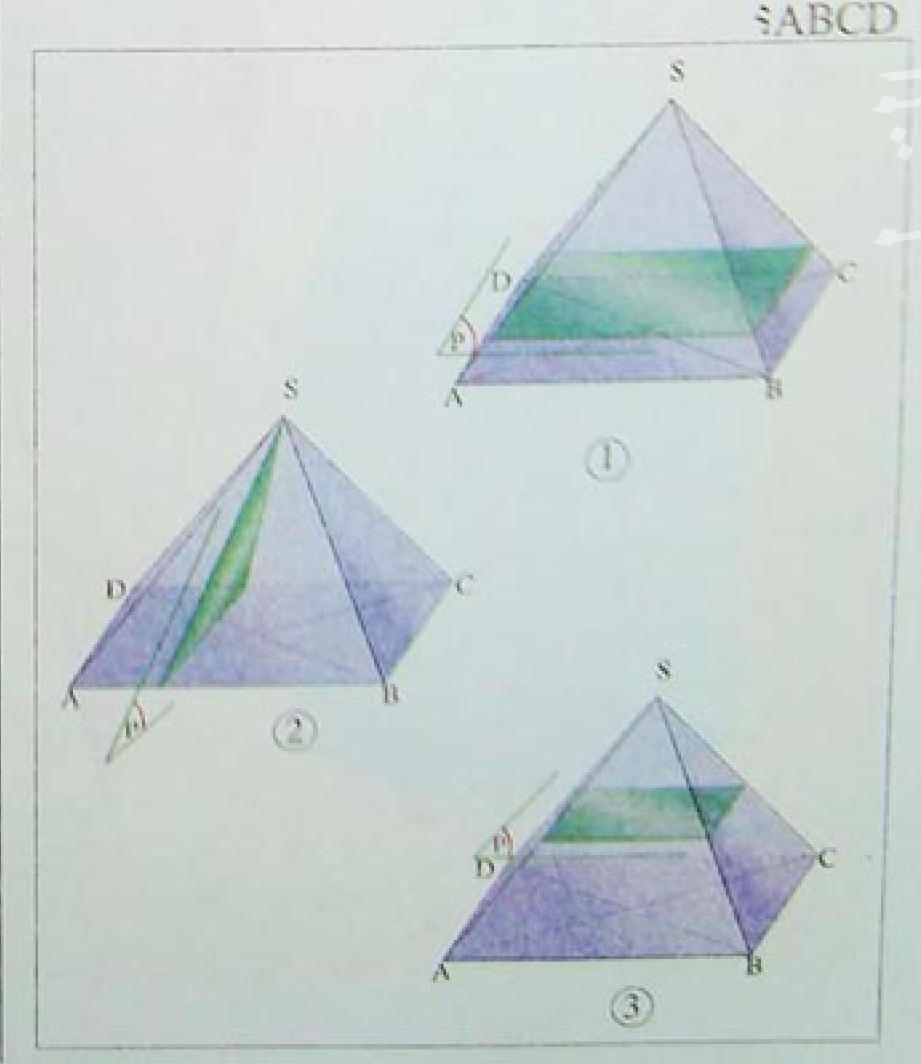


8 تلقى فريد برقية يقول صاحبها :

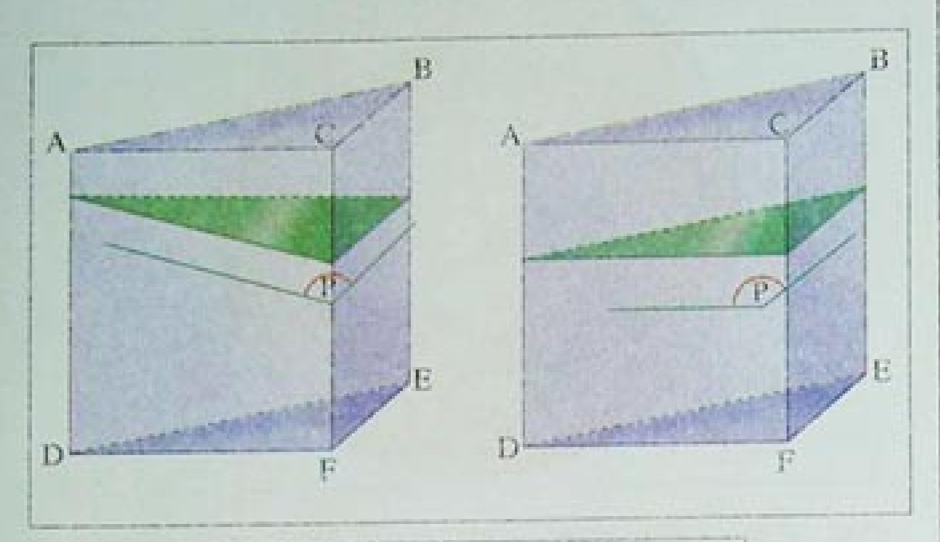
«مساحة بلدي : 9984670 km² (الثانية في العالم).
موقع عاصمة بلدي : 45° شمالا و 75,5° غربا»

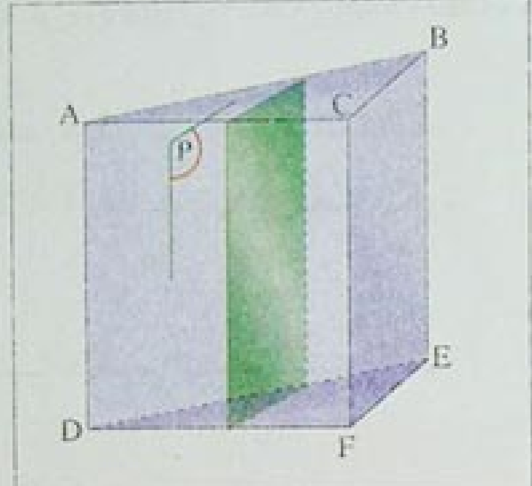
- ما هو بلد وعاصمة بلد المُرسِل؟

9 أي شكل من الأشكال الآتية، يمثل مقطعا للهرم SABCD بالمستوي (P) الموازي لقاعدته ABCD؟

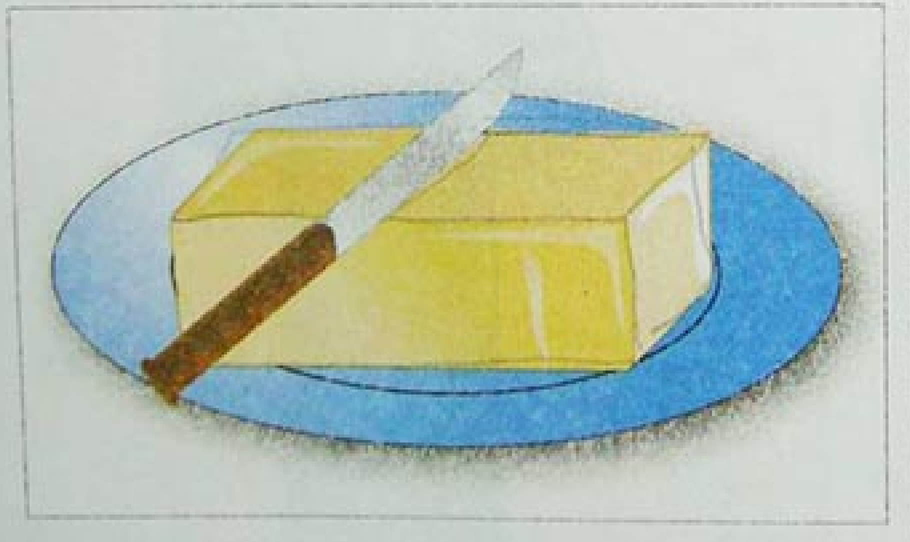


10 أي شكل من الأشكال الآتية، يمثل مقطعا للموشور القائم ABCDEF بالمستوي (P) الموازي لقاعدته DFE؟

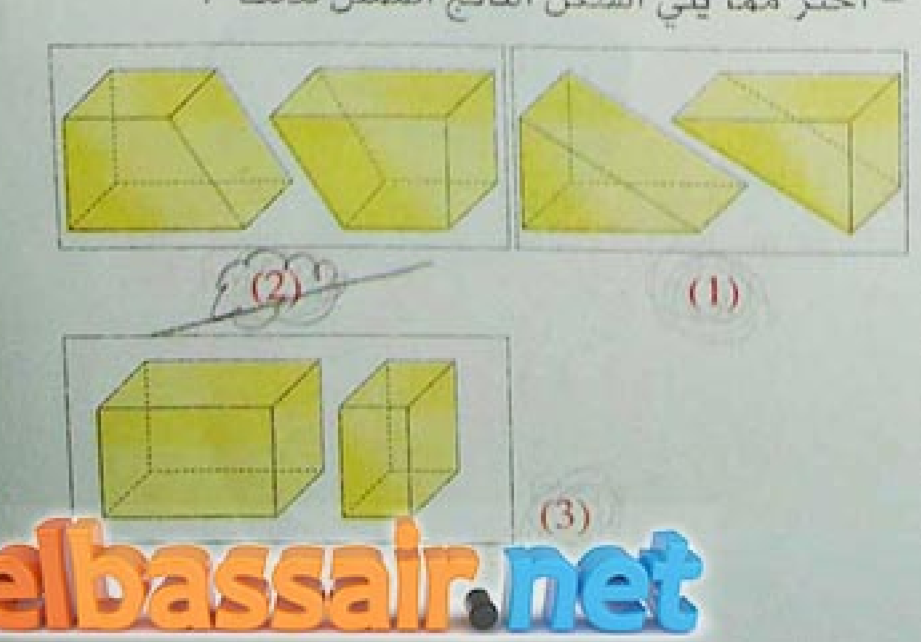




11 قطع عمر قالبا من الزبدة شاقوليا كما هو موضح في الشكل :

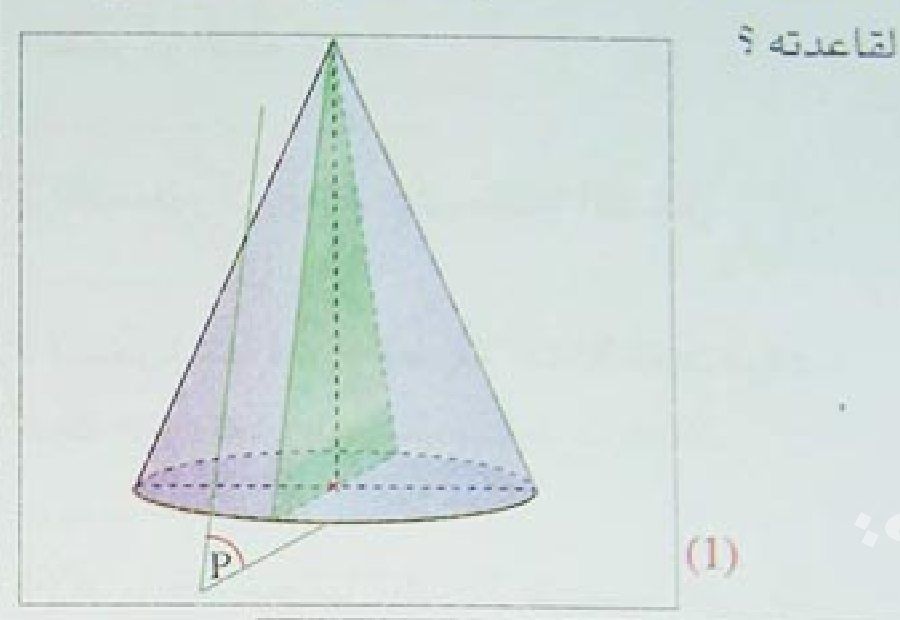


- اختر مما يلي الشكل الناتج الممثل لذلك :

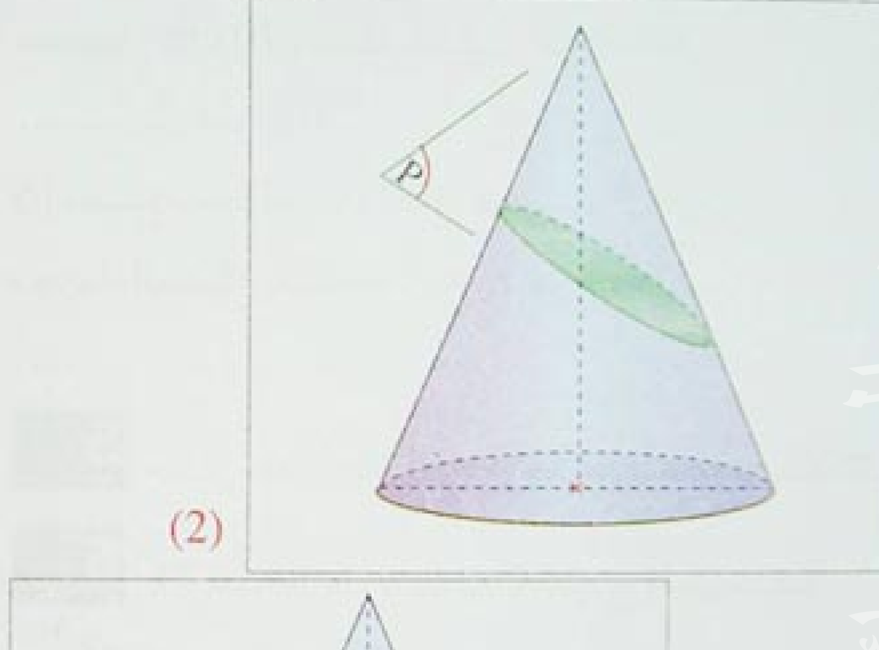


تمارين للتطبيق المباشر

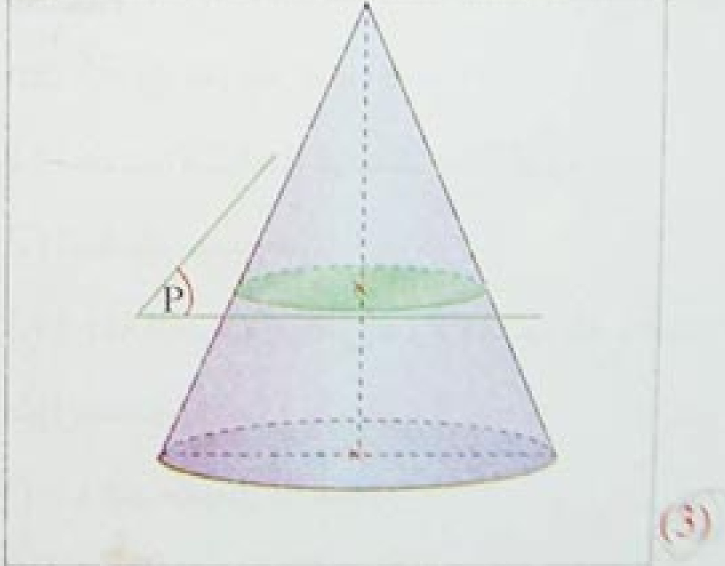
12 أي شكل من الأشكال الخضراء الآتية، يمثل مقطعا للمخروط الدوراني بالمستوي (P) الموازي لقاعدته ؟



(1)



(2)



(3)

13 قطع نجّار قطعة خشبية اسطوانية الشكل كما هو موضح في الشكل :

– أرسم الشكل الناتج عن القطع.

14 ليكن المثلث ABC الذي مساحته $18,5\ m^2$.

– ما هي مساحة المثلث المكبّر EFG بالمعامل 4 للمثلث ABC؟

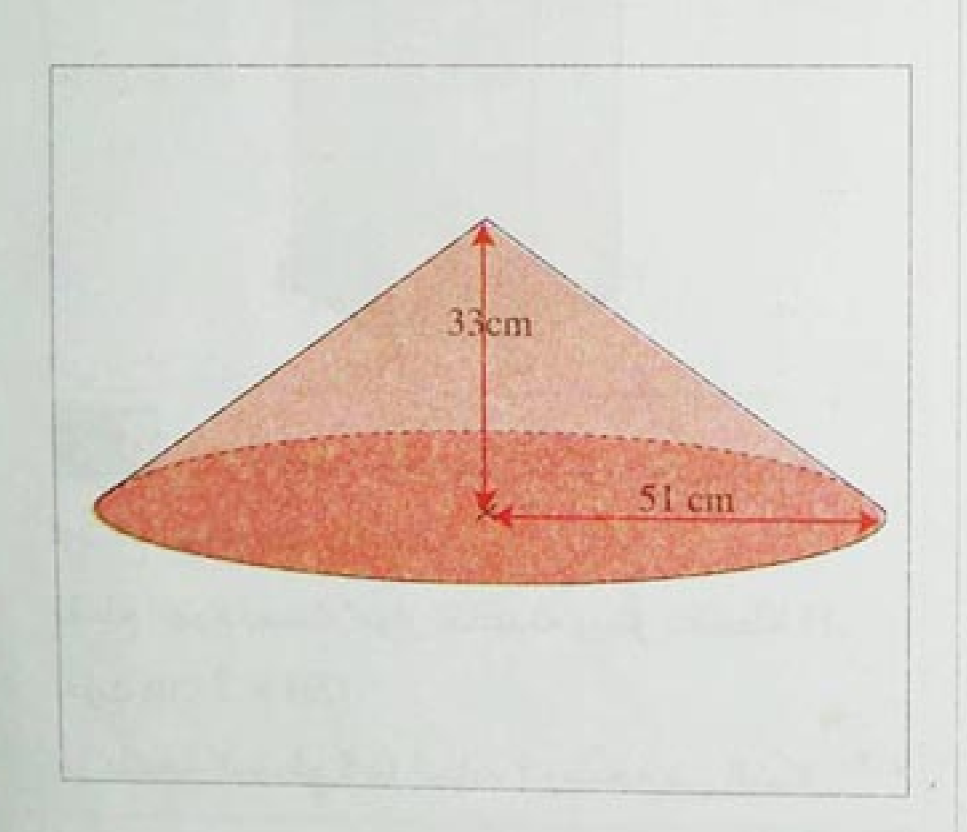
15 ليكن المربع ABCD ذو المساحة $12\ m^2$

– ما هي مساحة المربع المصغر EFGH بالمعامل $\frac{1}{2}$ للمربع ABCD؟

16 مخروط دوراني نصف قطر قاعدته 51 cm وارتفاعه 33 cm .

1) ما هو حجمه؟

2) ما هو حجم المخروط الدوراني المتحصل عليه بعد تصغير هذا المخروط إلى الثلث؟



17 مساحة شكل هندسي $16,5\ cm^2$. قمنا بتحويل له، فأصبحت مساحته $103,125\ cm^2$.

– هل هذا التحويل تصغير أو تكبير للشكل ؟

ما هو معامله؟

18 أصبح حجم هرم $2000\ cm^2$ بتكبير معامله 5.

– ما هو حجم الهرم قبل التكبير؟



تمارين

1 تقطع كرة مركزها O بمستو (P). ليكن H مركز دائرة القطع و A نقطة من هذه الدائرة.

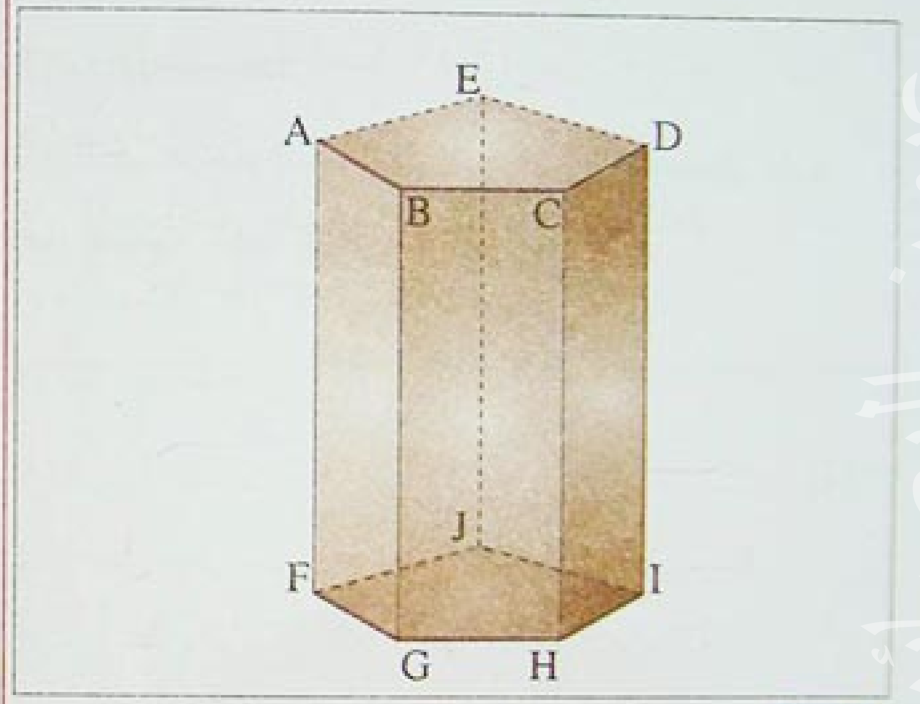
1) مثل هذه الوضعية.

2) إذا علمت أن $OH = 3\ cm$ و $OA = 4\ cm$،

- فما هو نصف قطر دائرة القطع ؟

2 ABCDEFGHIJ موشور قائم خماسي القاعدة نقطعه بمستو معامد للمستقيم (AF) في نقطة k من [AF].

- ما طبيعة المقطع ؟ وضحه في الشكل.

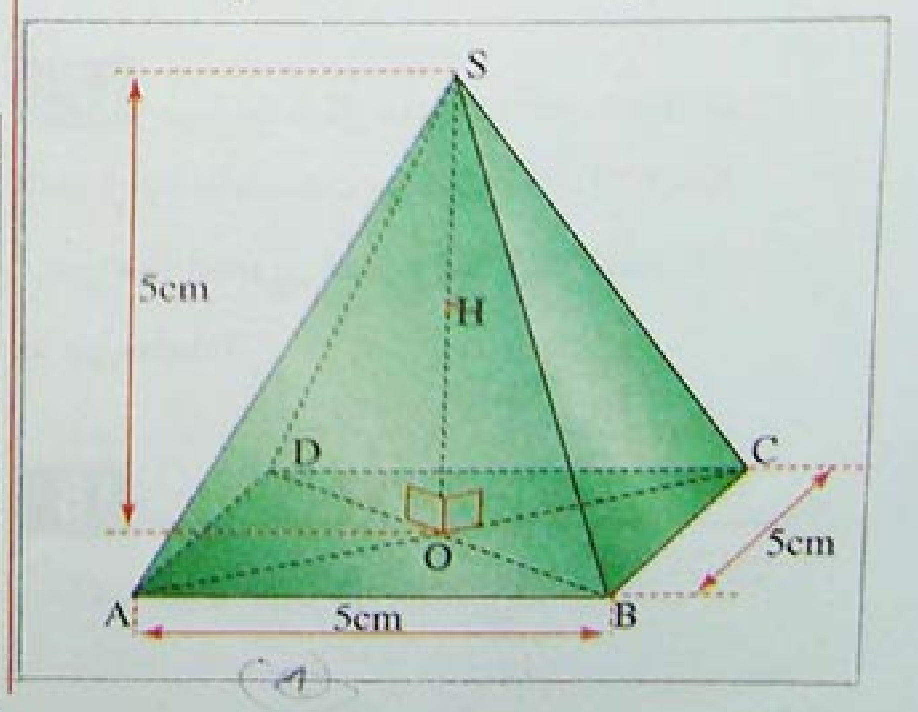


3 هرم قاعدته مربعة الشكل طولها 5 cm،

ارتفاع الهرم $OS = 5\ cm$.

نقطع الهرم بمستو مواز لقاعدته ويمر بالنقطة H، حيث $OH = 2\ cm$.

ما طبيعة المقطع ؟ ما أبعاده ؟ وضّحه في الشكل.



4 صحّح الخطأ، إن وجد، فيما يلي :

1) التكبير الذي يضاعف المساحات 4 مرات هو التكبير ذو السلم $k = 2$.

....

2) التصغير لا يحافظ على طبيعة الأشكال.

....

3) صغّرنا جلة نصف قطرها 30 cm ثلاث مرات، الجلة المتحصّل عليها نصف قطرها 5 cm.

....

4) كبرنا جلة حجمها $10\ cm^3$ فتحصلنا على جلة حجمها $270\ cm^3$. سلم التكبير هو $k = 2$.

....

5) مضلع محيطه 100 cm، صغرناه 5 مرات. محيط المضلع المتحصل عليه هو 20 cm.

....

5 حجم جلة $36\pi m^3$ ، اوجد مساحتها بدلالة π.

6 SABCD هرم قاعدته مربع طول ضلعه 35 cm وارتفاعه 20 cm.

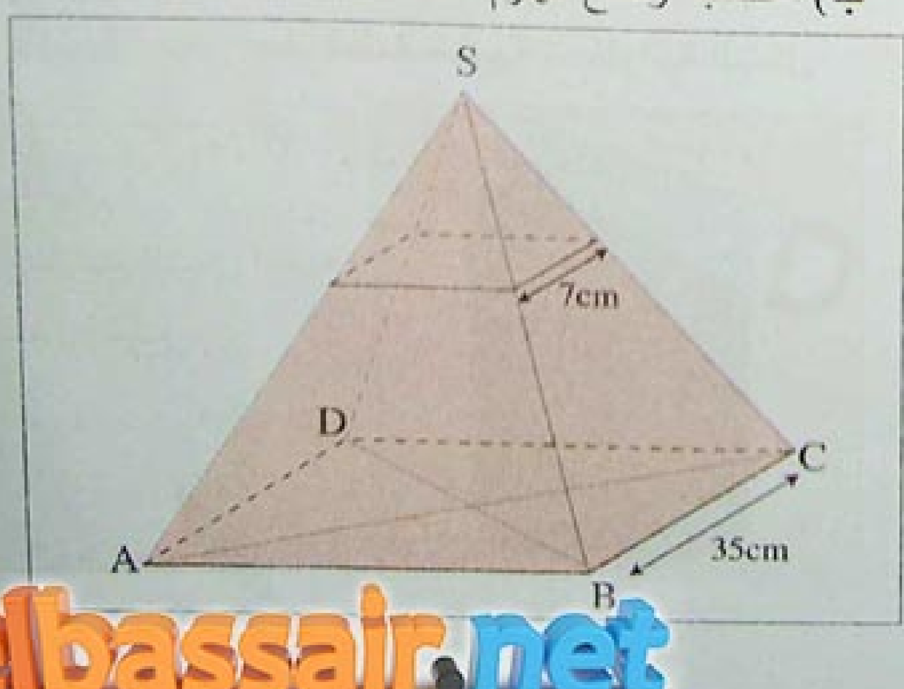
1) احسب مساحة قاعدة هذا الهرم.

2) احسب حجم هذا الهرم.

3) أردنا الحصول على هرم مصغر له بحيث يكون طول ضلع قاعدته هو 7 cm.

أ) ما هو معامل التصغير ؟

ب) احسب ارتفاع الهرم المصغر.



7 ABCD مربع طول ضلعه 6 cm.

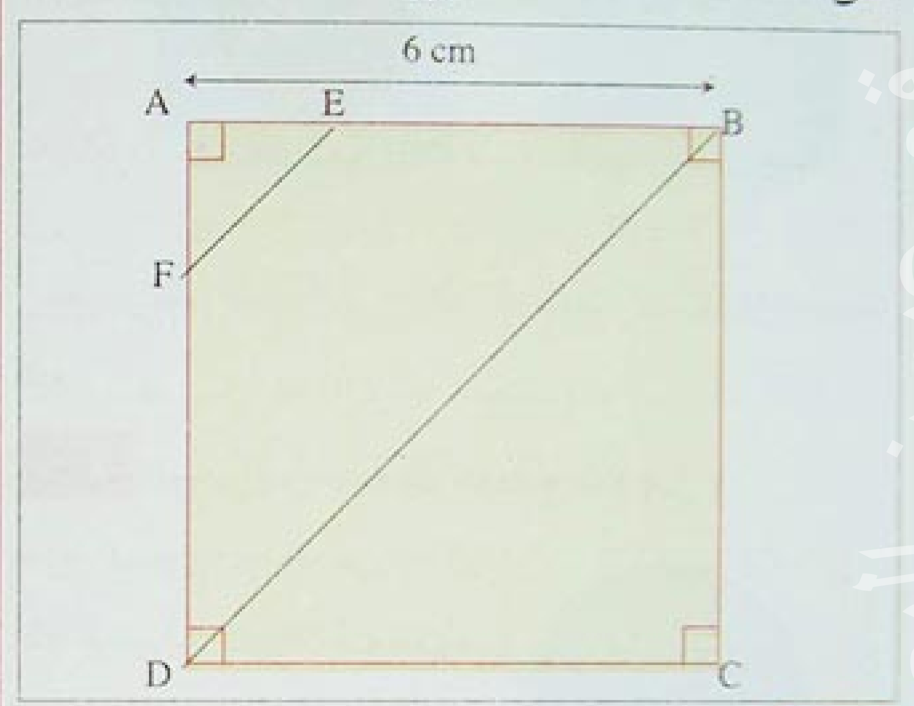
E نقطة من [AB] بحيث $AE = \frac{1}{3} AB$.

F نقطة من [AD] بحيث $AF = \frac{1}{3} AD$.

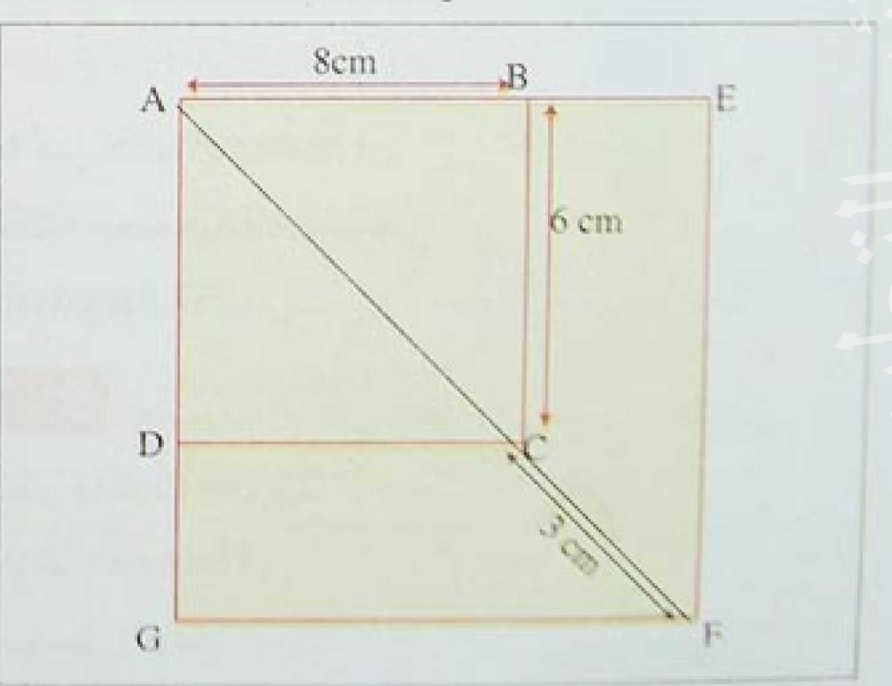
1) احسب BD ثم مساحة المثلث ABD.

2) في أي عدد نضرب BD للحصول على EF؟

في أي عدد نضرب مساحة المثلث ABD للحصول على مساحة المثلث AEF؟ برّر.



8 إليك الشكل الموالي :



المستطيل AEFG هو تكبير للمستطيل ABCD.

النقاط A ، C ، F في استقامية.

(EF) // (BC).

(FG) // (DC).

1) احسب الطول AC.

2) احسب الطولين AG و AE.

3) ما هو معامل التكبير ؟

9 1) أنشىء المثلث متقايس الساقين SAB بحيث SA = SB = 6,5cm ، و AB = 5cm.

نسمي I نقطة تقاطع العمود النازل من S مع الضلع [AB].

عيّن على المستقيم (SI) وخارج المثلث SAB النقطة D، بحيث ID = 3cm.

2) أ – ما هو طول القطعة [AI] ؟ برّر إجابتك.

ب – أعط القيمة المقربة بالنقصان إلى الدرجة لقيس الزاوية $\widehat{ISA}$.

جـ – أعط القيمة المقربة بالنقصان إلى الدرجة لقيس الزاوية $\widehat{IAD}$.

د – احسب طول القطعة [SI]. برّر إجابتك.

3) بيّن أنّ BD = AD.

4) المستقيم الذي يشمل D ويوازي (AB) يقطع (AS) في A' و (SB) في B'.

-احسب النسبة $\frac{DA'}{IA}$. برّر إجابتك.

5) ندير المثلثين SAB و S'A'B' حول المستقيم (SI)، فنحصل على مخروطين دورانيين (أنظر الشكل)

– علمّ على الشكل النقاط S، A، B، A'، B'.

نسمي C المخروط الدوراني الذي رأسه S وقاعدته القرص ذو القطر [AB]، و C' المخروط الذي رأسه S وقاعدته القرص ذو القطر [A'B'].

أ – ليكن V حجم المخروط الدوراني C.

– أعط القيمة المضبوطة لـ V بدلالة π.

– أعط القيمة المقربة بالنقصان الى cm^3 للحجم V.

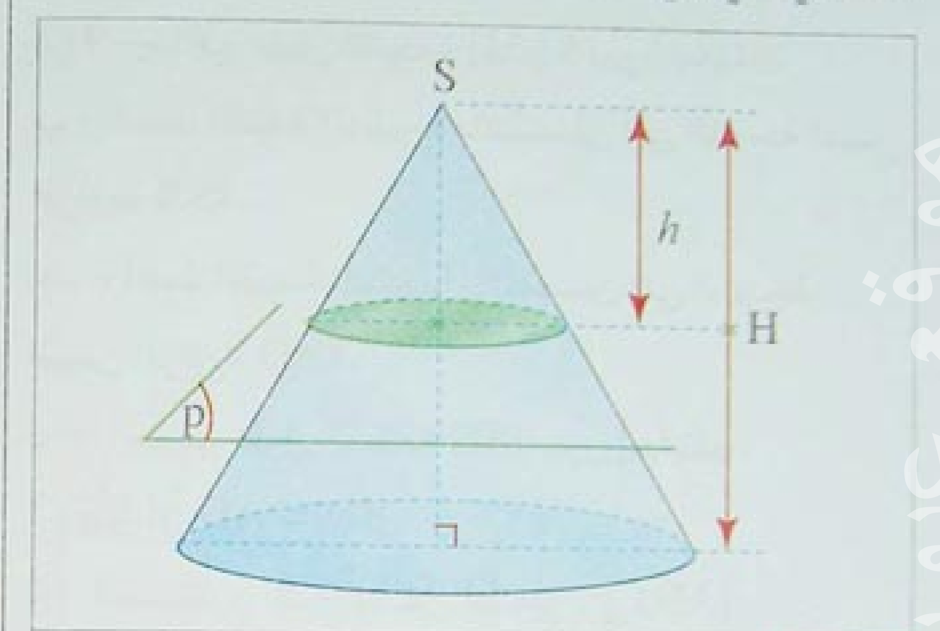
ب) المخروط الدوراني C، تكبير للمخروط الدوراني C.

– عبر عن V' حجم المخروط الدوراني C' بدلالة V.



1 يمثل الشكل الموالي مخروطا دورانيا ارتفاعه H، نقطعه بالمستوي (P) الموازي لقاعدته على بعد h من رأسه S.

احسب النسبة $\frac{h}{H}$ ، إذا علمت أنّ مساحة المقطع الدائري هي ربع مساحة قاعدته.

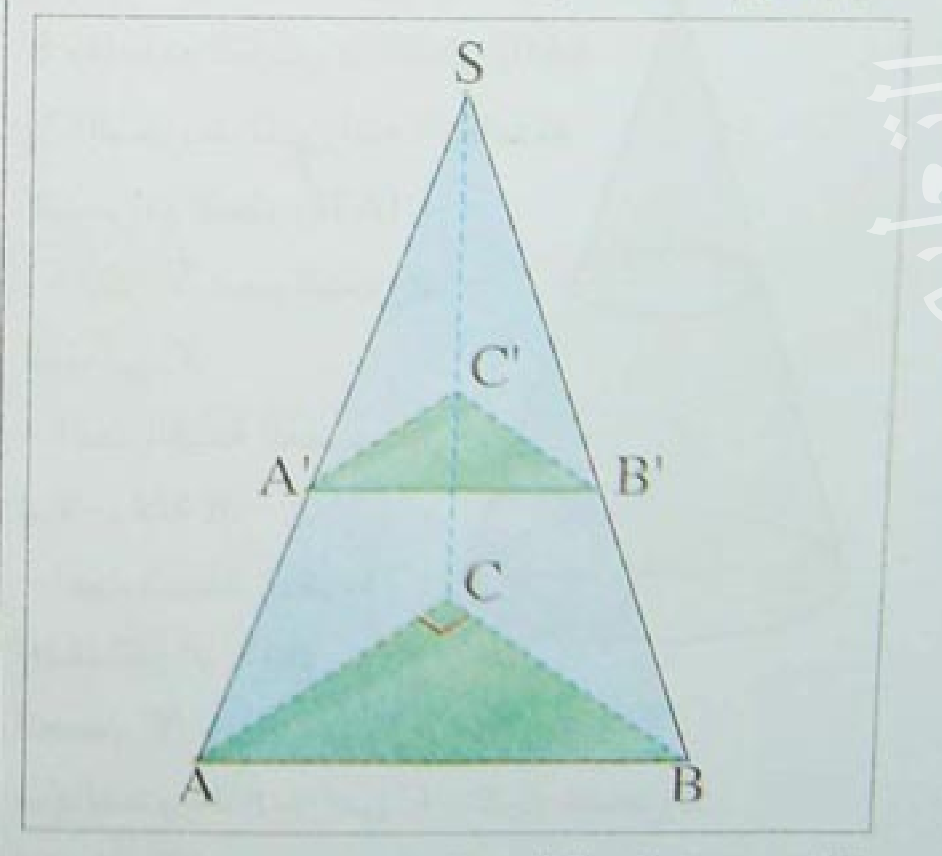


2 المجسم SABC هرم، قاعدته المثلث ABC القائم في C. نقطعه بمستو مواز لقاعدته، فنتحصّل على المثلث A'B'C'.

يعطى : SA = 12m ، SA' = 8 m ، SC = 9 m.

مساحة المثلث ABC هي $64\ m^2$.

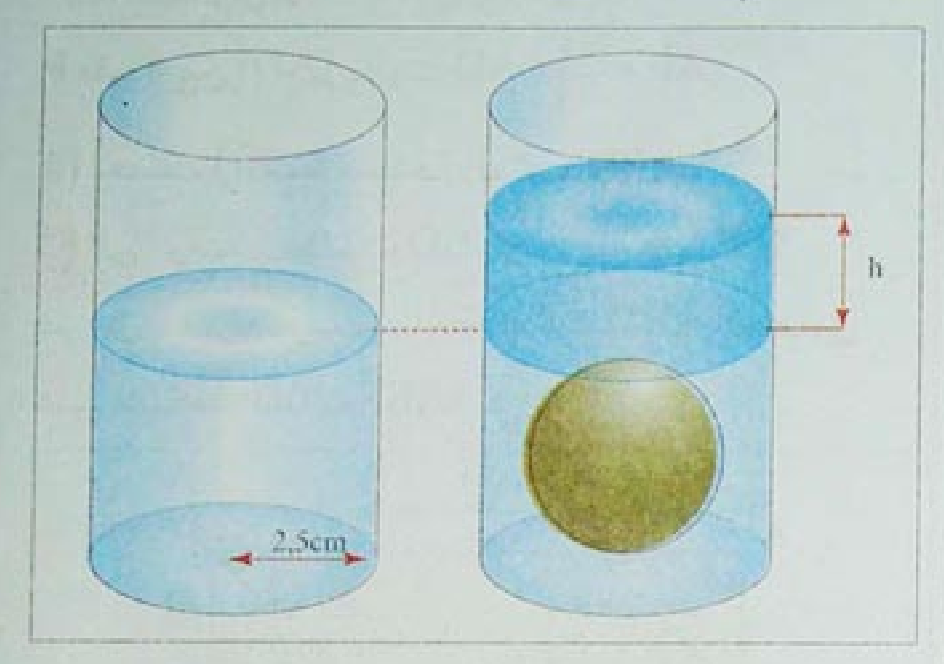
حجم الهرم SABC هو $192\ m^3$.



1) احسب الطول SC' مع التبرير.

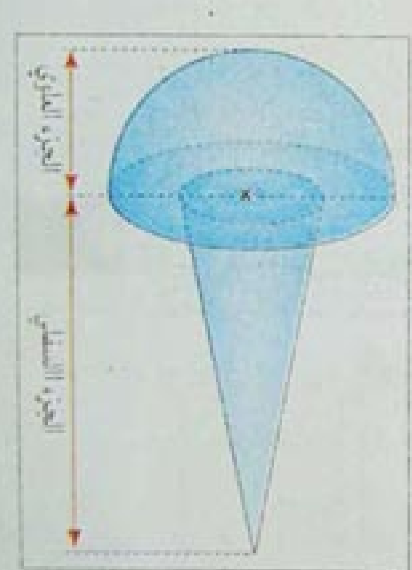
2) استنتج مساحة A'B'C' وحجم المجسم SA'B'C'

3 نضع كرية من حديد قطرها 2 cm في حوض مائي اسطواني الشكل كما هو موضح في الشكل :



اوجد ارتفاع الماء المزاح h إذا علمت أن الكرية غُمرت كليا.

4 دبوس من الحديد موضح كما يلي :



جزؤه العلوي عبارة عن نصف جلة قطرها 10 mm وجزؤه السفلي عبارة عن مخروط دوراني نصف قطر قاعدته 1,5 mm وارتفاعه 10 mm.

ما هي كتلته إذا علمت أن الكتلة الحجمية للحديد هي : $7,86\ g/cm^3$؟

5 حضّرت أمّ علي حساء في قدر اسطواني قطر قاعدته 25 cm وارتفاعه 15 cm.

تستعمل أم علي مغرفا جزؤه السفلي عبارة عن نصف كرة، نصف قطرها 5 cm لتقديم الطعام.

كم مرة استعملت المغرف لإطعام أفراد عائلتها إذا علمت أنّ ارتفاع الحساء في القدر هو $\frac{2}{3}$ ارتفاع القدر ولم يستهلك $\frac{1}{5}$ كمية الحساء.



مسـائـل

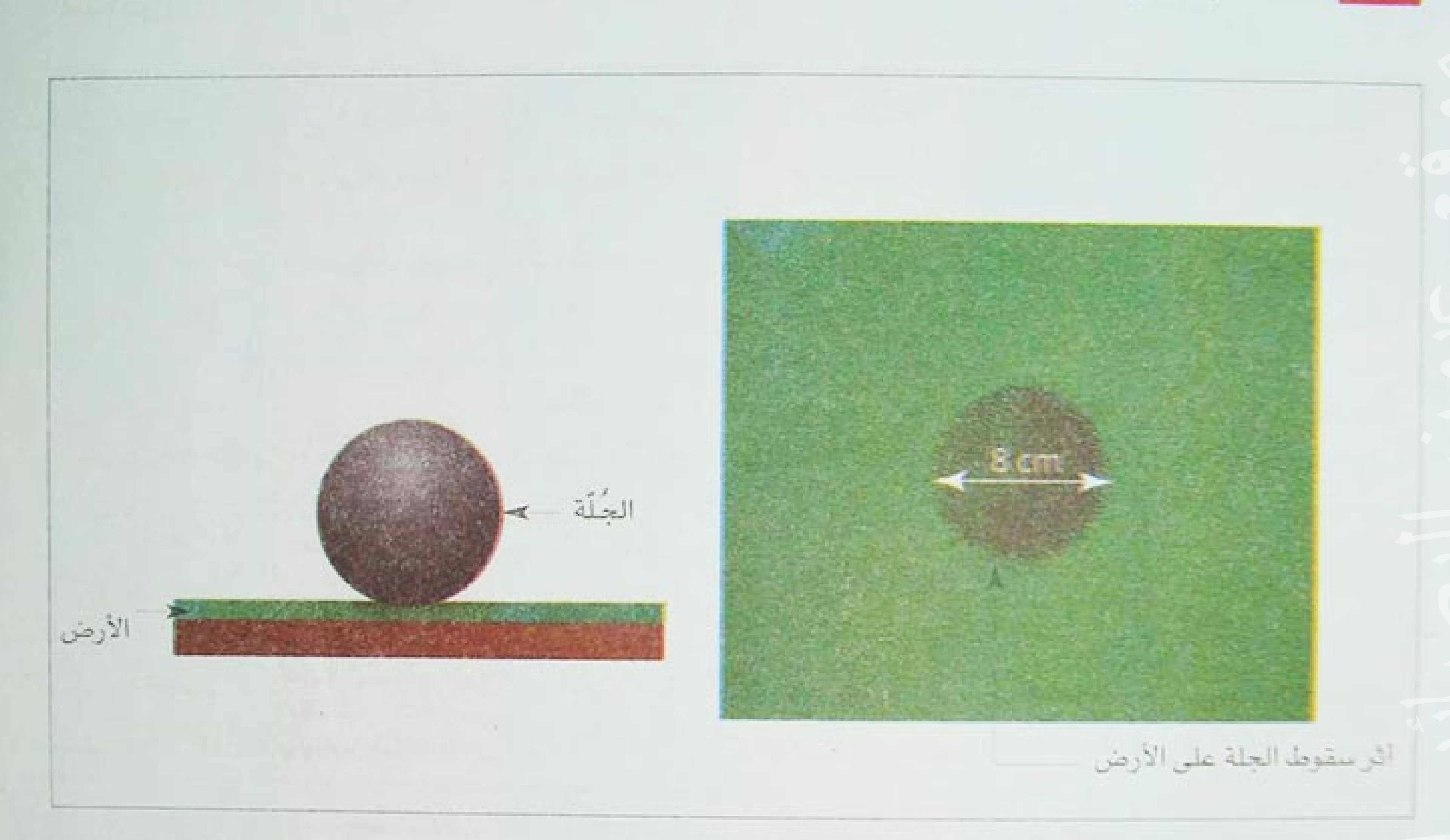
6 تطفو كرة قطرها 28 cm على سطح الماء.

ارتفاع الجزء المغمور منها هو 20 cm.

1) ارسم هذه الوضعية.

2) باعتبار أنّ سطح الماء، هو مستو يقطع الكرة، احسب مساحة المقطع الممثل لتلامس الكرة بسطح الماء.

7 سقطت جُلّة من حديد قطرها 15 cm على الأرض، فتركت أثرا دائريا قطره 8 cm.



أثر سقوط الجلة على الأرض

ما هو عمق أثر سقوط هذه الجُلّة على الأرض؟

8 ليكن المثلث A'B'C' القائم في A' ذو المساحة $54\ cm^2$ والذي يمثل تكبيرًا للمثلث ABC القائم في A.
طولي الضلعين [AB] و [AC] للمثلث ABC هما على الترتيب 3 cm و 4 cm.

- احسب الطولين A'C' و A'B'.

9 جلة نصف قطرها 10 cm، كتلتها 300 g.

- ما هي كتلة جلة مصنوعة من نفس المادة والتي نصف قطرها 30 cm؟

من علمائنا في الهندسة

أدى علماء العرب والمسلمين دورا رئيسيا في مواصلة البحث في الهندسة من القرن التاسع حتى القرن السابع عشر الميلادي. وهذه قائمة ببعض الأسماء التي لمعت في الهندسة متبوعة بتاريخ الوفاة (بالتقويم الهجري ثم الميلادي) :

الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في الهندسة	الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في الهندسة	الرياضي وتاريخ وفاته	أهم مؤلفاته في الهندسة
يوحنا بن الحراني (200- 815)	اختصار جدولين في الهندسة	السجستاني الجزي (415-1024)	الشكل الملقب بالقُطّاع	ابن الصلاح (540- 1145)	كتاب المقالات السبع
سنان بن الفتح الحراني (210-825)	كتاب المكعبات	جعفر بن علي المهندس (420-1029)	كتاب في الهندسة؛ رسالة في المكعب	السموأل المغربي (570 -1175)	إعجاز المهندسين؛ المثلث القائم الزاوية
أبو كامل (267-880)	المساحة والهندسة والطير	النسويّ (420-1029)	تجريد أقليدس	الرازي (606-1209)	مصادرات أقليدس
المهاني (271-884)	كتاب النسبة: شرح الكتاب الخامس والعاشر من أقليدس	ابن السمح المهري (426-1035)	المدخل إلى الهندسة في تفسير كتاب أقليدس	ش. الدين الطوسي (606-1209)	رسالة في الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان
ثابت بن قرة (288-900)	المخروط المكافئ؛ المسائل الهندسية	ابن الهيثم (430-1039)	كتاب في تربيع الدائرة؛ مساحة الكرة	ابن اللبودي (670-1271)	مختصر كتاب أقليدس؛ مختصر مصادرات أقليدس
قسطا بن لوقا (300-912)	المدخل إلى علم الهندسة: شكوك كتاب أقليدس	البيروني (440-1048)	استخراج الأوتار في الدائرة: المسائل الهندسية	محيي الدين المغربي (680-1280)	كتاب هندسة أقليدس
المروزي (310-922)	الدوائر الثلاث المماسة	ابن معاذ الجيّاني (471-1079)	كتاب مجهولات قسي الكرة	السمرقندي (690-1291)	أشكال التأسيس في الهندسة
الكرابيسي (315-927)	حساب الدور؛ مساحة الحلقة	المؤتمن بم هود (477-1085)	كتاب الاستكمال	غ. الدين الكاشي (828-1424)	الرسالة المحيطة؛ الجيب والوتر
أبو إسحاق إبراهيم بن ثابت بن قرة (335-946)	استخراج المسائل الهندسية؛ رسم القطوع الثلاثة	الأسفزاري (480-1087)	مقدمة في المساحة؛ اختصار الأصول لأقليدس	قاضي زاده الرومي (835-1432)	رسالة في الجيب؛ شرح كتاب أشكال التأسيس
الكوهي (350-961)	رسالة في المضلع المسبع في الدائرة؛ رسالة البركار التام	عمر الخيام (515-1121)	شرح ما يشكل من مصادرات أقليدس	ابن القاضي المكناسي (1025-1616)	المدخل إلى الهندسة